объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-862

Р.М.Кашаев, А.А.Осипов

РАСШИРЕНИЕ АЛГЕБРЫ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ СТРУНЫ С МИРОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ФИКСИРОВАННОЙ ТОПОЛОГИИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1988

Введение

Каноническое квантование классических систем, функционал действия которых инвариантен относительно преобразований локальной группы, связано с процедурой исключения нефизических степеней свободы. Это, с одной стороны, учет связей между динамическими переменными, с другой – факторизация оставшейся области фазового пространства по орбитам локальной группы, генераторами которой являются сами связи.

В обобщенном гамильтоновом подходе Дирака[1] факторизация осуществляется путем выбора явных выражений для неопределенных функций, присутствующих в уравнениях движения и играющих роль множителей Лагранжа. Чтобы фиксировать вид этих функций, накладывают дополнительные условия на динамические переменные (по одному на каждую связь). Делается это так, чтобы множители Лагранжа определялись однозначно. Правильный выбор дополнительных условий задаёт меру в функциональном интеграле Фейнмана так, что в действительности интегрирование производится по множеству орбит локальной группы[2].

В общем виде эта задача была решена Баталиным, Фрадкиным и Вилковыским (БФВ)[3]. В основе их метода лежит идея расширения фазового пространства за счет антикоммутирующих динамических переменных и введения BRST-инвариантного гамильтониана на нем[4]. Функциональный интеграл БФВ допускает широкий выбор калибровочных функций[5].

В работах[6,7] было показано, что в теориях струн калибровку можно зафиксировать так, чтобы связи и дополнительные условия образовывали замкнутую алгебру. В этом случае обнаруживается симметрия гамильтониана относительно группы $OSP(1,1|2)$. Более широкая группа симметрии квантовой теории позволяет исключить нефизические степени свободы не прибегая к их явному выделению. Здесь применяется механизм Паризи-Соурласа, известный в теории стохастического квантования /8,9/.

Расширенная алгебра, которую образуют связи Φ_i и дополнительные условия Ψ^j, имеет вид /7/

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = U^k_{ij} \Phi_k \quad , \tag{1}$$

$$\{\Phi_i, \Psi^j\} = B^j_i - T^j_{ik} \Psi^k \quad , \tag{2}$$

$$\{\Psi^i, \Psi^j\} = 0. \tag{3}$$

Фигурные скобки обозначают классические скобки Пуассона. Для того чтобы уравнения $\Psi^j = 0$ правильно фиксировали калибровку должно выполняться следующее неравенство

$$\det \| \{\Phi_i, \Psi^j\} \| \Big|_{\Phi_i = \Psi^j = 0} = \det \| B^j_i \| \neq 0. \tag{4}$$

Константы B^j_i и T^k_{ij} удовлетворяют соотношениям, вытекающим из тождеств Якоби

$$T^n_{im} T^m_{jk} - T^n_{jm} T^m_{ik} = U^m_{ij} T^n_{mk} \quad , \tag{5}$$

$$T^n_{im} B^m_j - T^n_{jm} B^m_i = U^m_{ij} B^n_m \quad . \tag{6}$$

Если алгебра связей (1) является классической алгеброй Вирасоро, то $B^j_i = \delta^j_i$.

Изучение вопросов, связанных с взаимодействием замкнутых струн, а также исследования в области двумерных конформных теорий поля приводят к задачам, формулируемым на римановых поверхностях произвольного рода g. В работах /10,11/ Кричевер и Новиков на этих поверхностях ввели базис в пространство векторных полей,

голоморфных вне двух отмеченных точек, и изучили возникающие здесь тензорные объекты. Базисные векторные поля образуют обобщенно-градуированную алгебру Кричевера-Новикова (алгебра КН), которая совпадает с алгеброй Вирасоро при $g = 0$.

В настоящей работе установлено, какая геометрическая конструкция на римановой поверхности рода g соответствует расширенной алгебре (1)-(3), где в качестве (1) взята алгебра КН. Найдена реализация полученной алгебры в терминах динамических переменных замкнутой бозонной струны, мировой поверхностью которой является данная риманова поверхность. На этом этапе мы, из соображения удобства, формулируем результаты, используя классические скобки Пуассона. Подробно обсуждается классическая динамика такой струны. Показано, что ковариантные гамильтоновы уравнения движения эквивалентны лагранжевым только в том случае, когда "временная" функция на мировой поверхности струны, задающая систему контуров, является гармонической. В этом смысле функция "времени", введенная в работе /11/, соответствует правильным уравнениям Гамильтона.

1. Геометрическая конструкция, отвечающая расширенной алгебре связей на римановой поверхности рода g

Кратко напомним основные объекты, возникающие на римановой поверхности Σ рода g , которые нам потребуются в дальнейшем /10/. Отметим на Σ две точки общего положения P_+ и P_- с локальными координатами z_+ и z_-, такими, что $z_\pm(P_\pm)=0$. На Σ существует алгебра мероморфных векторных полей, голоморфных вне точек $P_\pm$. В этой алгебре можно зафиксировать базис, представляемый векторными полями e_i, которые, согласно теореме Римана-Роха, единственным образом определяются своим поведением в окрестностях точек $P_\pm$,

$$e_i = a_i^\pm Z_\pm^{\pm i-g_0+1} [1+O(Z_\pm)] \frac{\partial}{\partial Z_\pm}, \quad a_i^+ = 1. \tag{1.1}$$

Здесь индекс i принимает целые значения ($i = \dots -1,0,1\dots$) для четных g и полуцелые ($i = \dots -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\dots$) для нечетных g, а $g_0 = \frac{3}{2} g$.

Векторные поля e_i образуют замкнутую g_0-градуированную алгебру $\mathfrak{m}^\Sigma$ относительно скобки Ли (алгебра КН),

$$\mathcal{L}_{e_i} e_j = [e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^s e_{i+j-s}. \tag{1.2}$$

Она может быть разложена в сумму $\mathfrak{m}^\Sigma = \mathfrak{m}_-^\Sigma + \mathfrak{m}_0^\Sigma + \mathfrak{m}_+^\Sigma$, где базисы подалгебр $\mathfrak{m}_\pm^\Sigma$ составляют векторы $\langle e_i \rangle$, у которых $i \ge g_0-1$ и $i \le -g_0+1$ соответственно. Подпространство $\mathfrak{m}_0^\Sigma$ ($\langle e_i \rangle: |i| \le g_0-2$) имеет комплексную размерность $3g-3$ (для $g>1$) и может быть отождествлено с касательным пространством к многообразию модулей в точке, определяемой комплексной структурой на поверхности Σ. Векторные поля $\langle e_i \rangle \in \mathfrak{m}_0^\Sigma$ генерируют деформации комплексной структуры на Σ.

Кроме касательного. на поверхности Σ существуют тензорные расслоения $f_j^{(\lambda)}$, параметризуемые целыми числами λ (конформный вес). Они голоморфны на Σ за исключением, быть может, полюсов в $P_\pm$. В окрестностях этих точек формы $f_j^{(\lambda)}$ при $\lambda \neq 0,1$ имеют следующее поведение

$$f_j^{(\lambda)} = a_j^{(\lambda)\pm} Z_\pm^{\pm j-S(\lambda)} [1+O(Z_\pm)](dZ_\pm)^\lambda, \tag{1.3}$$

где

$S(\lambda) = \frac{g}{2} - \lambda(g-1)$. В случае $\lambda = 0,1$ формула (1.3) модифицируется:

$$f_j^{(0)} = \begin{cases} a_j^{(0)\pm} Z_\pm^{\pm j-g/2} [1+O(Z_\pm)], & |j|>g/2, \\ a_j^{(0)\pm} Z_\pm^{\pm j-g/2\pm 1/2-\varepsilon} [1+O(Z_\pm)], & j=-g/2,\dots,g/2-1, \\ 1, & j=g/2. \end{cases} \tag{1.4}$$

$$f_j^{(1)} = \begin{cases} a_j^{(1)\pm} Z_\pm^{\pm j+g/2-1} [1+O(Z_\pm)]dZ_\pm, & |j|>g/2, \\ a_j^{(1)\pm} Z_\pm^{\pm j+g/2\mp 1/2-\varepsilon} [1+O(Z_\pm)]dZ_\pm, & j=-g/2+1,\dots,g/2, \\ \omega, & j=-g/2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь $\varepsilon=1/2$, а ω – единственный мероморфный дифференциал третьего рода, который в точках $P_\pm$ имеет простые полюса с вычетами ± 1 и чисто мнимые периоды по всем циклам. Формулы (1.3)-(1.5) в силу теоремы Римана-Роха однозначно, с точностью до множителя, определяют формы $f_j^{(\lambda)}$ на всей поверхности Σ. Числовые множители зафиксируем, положив $a_j^{(\lambda)+}=1$. Введём также удобные обозначения:

$$A_j = f_j^{(0)}, \qquad \omega^j = f_{-j}^{(1)}, \qquad \Omega^j = f_{-j}^{(2)}. \tag{1.6}$$

Выполняются следующие соотношения дуальности

$$\frac{1}{2\pi i} \oint A_i\, \omega^j = \delta_i^j, \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint e_i\, \Omega^j = \delta_i^j \tag{1.7}$$

при всех значениях i и j. **Здесь и далее, где мы не будем этого явно** указывать, интегрирование осуществляется по любому несамопересекающемуся контуру, который разделяет Σ на две части $\Sigma^\pm$ так, что $P_\pm \subset \Sigma^\pm$. Поскольку все такие контуры гомологичны, а подынтегральные функции голоморфны вне $P_\pm$, то интеграл не зависит от выбора контура.

Определим скобки

$$[e_i, A_j] = \mathcal{L}_{e_i} A_j = e_i dA_j = T_{ij}^k A_k, \tag{1.8}$$

$$[e_i, \omega^j] = \mathcal{L}_{e_i} \omega^j = d(e_i \omega^j) = -T_{ik}^j \omega^k. \tag{1.9}$$

Напомним, что производная Ли формы $f_j^{(\lambda)}$ в локальной системе координат, в которой $e_i = e_i(z)\partial/\partial z$, $f_j^{(\lambda)} = f_j^{(\lambda)}(z)(dz)^\lambda$, имеет вид

$$\mathcal{L}_{e_i} f_j^{(\lambda)} = \left[e_i(z) \frac{\partial f_j^{(\lambda)}(z)}{\partial z} + \lambda f_j^{(\lambda)}(z) \frac{\partial e_i(z)}{\partial z} \right] (dz)^\lambda. \tag{1.10}$$

Для коэффициентов T^k_{ij} , если воспользоваться соотношениями (1.7), получается следующее интегральное представление

$$T^k_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega^k e_i dA_j . \qquad (1.11)$$

Структурные константы алгебры КН можно также выразить через контурный интеграл

$$[e_i, e_j] = U^k_{ij}\, e_k , \qquad U^k_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint \Omega^k\, [e_i, e_j] . \qquad (1.12)$$

Выполнение тождеств Якоби (5) очевидно, в силу свойств производной Ли.

Перейдем к поиску центральных расширений скобок (1.8), и (1.9). Нас интересуют выражения для нетривиальных коциклов $A(e_i, A_j)$ и $B(e_i, \omega^j)$. Первый из них определяется единственным образом:

$$A(e_i, A_j) = A_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \oint A_j \nabla^2 e_i . \qquad (1.13)$$

Ковариантный голоморфный дифференциал ∇ в локальной системе координат имеет вид $\nabla = dZ \otimes \nabla_{\partial/\partial Z}$, а его действие на базис $(dZ)^\lambda$ следует из формулы

$$\nabla_{\partial/\partial Z} (dZ)^\lambda = - \lambda\, \Gamma(Z) (dZ)^\lambda . \qquad (1.14)$$

На пересечении карт $U_\alpha \cap U_\beta$ связность $\Gamma(Z)$ преобразуется обычным образом, т.е. если $Z_\beta = f(Z_\alpha)$, то $\Gamma_\beta(Z_\beta) f' = \Gamma_\alpha(Z_\alpha) - f''/f'$, где $f' = \partial Z_\beta / \partial Z_\alpha$. В работе /11/ использовалась проективная связность R, которую можно выразить через Γ и ее производную .

$$R = \Gamma^2 / 2 - \Gamma' . \qquad (1.15)$$

Центральный член A_{ij} удовлетворяет условию коцикличности

$$A(e_i, [e_j, A_k]) - A(e_j, [e_i, A_k]) - A([e_i, e_j], A_k) = 0$$

и локален, т.е. $A_{ij} = 0$, если $|i + j| > 2g$. При $R = 0$ из (1.13) получаем, что

$$A(e_i, A_{2g-i}) = [(i - g_o)^2 - (i - g_o)] .$$

Имеется два типа нетривиальных центральных расширений $B(e_i, \omega^j)$, которые удовлетворяют условию коцикличности

$$B(e_i, [e_j, \omega^k]) - B(e_j, [e_i, \omega^k]) - B([e_i, e_j], \omega^k) = 0 .$$

Это

$$B^{(1)}(e_i, \omega^j) = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega^j\, \nabla e_i , \qquad (1.16)$$

и

$$B^{(2)}(e_i, \omega^j) = \frac{1}{2\pi i} \oint e_i \omega^j \sigma , \qquad (1.17)$$

где σ-неточная форма на рассматриваемой системе замкнутых контуров римановой поверхности Σ.

Коцикл $B^{(1)}(e_i, \omega^j) = 0$ при $|i - j| > g$, а в частном случае $i - j = g$, при $R = 0$, $B^{(1)}(e_i, \omega^{i-g}) = i - g_o - 1$. Если в качестве σ взять дифференциал третьего рода ω, то коцикл $B^{(2)}(e_i, \omega^j)$ будет удовлетворять тому же условию локальности, что и $B^{(1)}(e_i, \omega^j)$. Кроме того, при $g = 0$ и $\sigma = \omega$ $B^{(2)}(e_i, \omega^j)|_{g=0, \sigma=\omega} = \delta^j_i$, что совпадает с известным результатом работы /7/. Все это свидетельствует о том, что на римановой поверхности рода g расширенной алгебре (1)-(3) будет отвечать следующая геометрическая конструкция

$$\begin{aligned} &[e_i, e_j] = U^k_{ij}\, e_k , \\ &[e_i, \omega^j] = B^j_i - T^j_{ik}\, \omega^k , \qquad (1.18) \\ &[\omega^i, \omega^j] = 0 , \end{aligned}$$

где $B^j_i = B^{(2)}(e_i, \omega^j)$, а скобки понимаются как абстрактные коммутаторы.

2. Классическая динамика замкнутой бозонной струны с мировой поверхностью фиксированной топологии

Чтобы реализовать абстрактную алгебру (1.18) в терминах скобок Пуассона, определим фазовое пространтво замкнутой бозонной струны, мировой поверхностью которой является Σ. В соответствии с характером задачи нам потребуется ковариантная формулировка гамильтонова формализма. Будем исходить из действия

$$S = \frac{1}{2}\int dX_\mu \wedge * dX^\mu, \tag{2.1}$$

где X_μ-динамическая переменная бозонной струны. Лоренцевский индекс μ принимает значения от нуля до $D-1$ (D-размерность пространства Минковского), а метрика на Σ евклидова.

Введем дополнительную динамическую переменную P_μ, которая является действительной 1-формой на Σ. С ее помощью перейдем к формализму первого порядка для (2.1),

$$S = \int (P_\mu \wedge dX^\mu - \frac{1}{2} P_\mu \wedge *P^\mu). \tag{2.2}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$dX^\mu = *P^\mu, \tag{2.3}$$

$$dP^\mu = 0\ . \tag{2.4}$$

Для ковариантного описания "временной" эволюции на Σ зададим вещественную функцию f, такую, что $f(P_\pm) = \mp\infty$. Ее линии уровня $C_\tau = \{Q\in\Sigma, f(Q) = \tau\}$ должны делить Σ на две части так, чтобы точки $P_\pm$ принадлежали различным кускам Σ, что является выражением принципа причинности. Эти контуры будут соответствовать форме струны в момент "собственного времени" τ. Критические точки функции f, определяемые из уравнения $df=0$, отвечают точкам деления или слияния несвязных компонент контура C_τ. В дальнейшем будем рассматривать только такие контуры, которые не содержат критических точек. Дополнительные ограничения на функцию f возникнут в процессе конструирования гамильтонова формализма.

Вне критических точек функции f рассмотрим векторное поле $v \sim \mathrm{grad} f$, нормированное так, что $\langle v,\tilde{v}\rangle = 1$, где $\tilde{v} = df$, а также

определим векторное поле $v*$ из требования $\langle v*,\beta\rangle = \langle v,*\beta\rangle$ для произвольной 1-формы β, ($*\beta$-дуальная форма). Имеет место равентво

$$\langle v*,\tilde{v}\rangle = \langle v,*\tilde{v}\rangle = 0, \tag{2.5}$$

которое означает, что вектор $v*$ всегда касателен к контуру C_τ.

Система (2.3), (2.4) эквивалентна следующим трем уравнениям

$$\mathcal{L}_v X_\mu = \langle v, *P_\mu\rangle, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}_v P_\mu = d\langle v, P_\mu\rangle, \tag{2.7}$$

$$\langle v, P_\mu + *dX_\mu\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Первые два описывают изменения динамических переменных вдоль векторного поля v и являются первым шагом на пути построения уравнений Гамильтона. Третье уравнение возникает в результате проецирования (2.3) на касательное направление к контуру C_τ.

Наша дальнейшая задача заключается в том, чтобы представить правые части выражений (2.6) и (2.7) в виде скобок Пуассона переменных X_μ и P_ν с соответствующим гамильтонианом. Для этого необходимо определить симплектическую структуру фазового пространства на C_τ, а также построить функцию Гамильтона $\mathcal{H}_v$.

Скобки Пуассона между основными динамическими переменными на контуре C_τ имеют вид

$$\{X_\mu(Q), X_\nu(Q')\} = 0, \tag{2.9}$$

$$\{X_\mu(Q), P_\nu(Q')\} = \eta_{\mu\nu}\, \Delta_\tau^{(0)}(Q,Q'), \tag{2.10}$$

$$\{P_\mu(Q), P_\nu(Q')\} = -\eta_{\mu\nu}\, (* + *')\, \tilde{d}\Delta_\tau^{(0)}(Q,Q'). \tag{2.11}$$

Первое соотношение выписано по аналогии с обычным гамильтоновым формализмом. Вторая скобка рассматривалась в работе /11/, там же была введена инвариантная "дельта-функция" $\Delta_\tau^{(0)}(Q,Q')$ на контуре C_τ. По первому аргументу она является гладкой функцией на C_τ, а по второму 1-формой. Вид скобки Пуассона (2.11) связан с тем, что $P_\mu(Q)$ - двухкомпонентная величина как тензор на Σ, а истинным импульсом является только одна компонента. Здесь мы ввели обозначение $\tilde{d}$ для проекции внешнего дифференциала d на контур C_τ.

Чтобы получить гамильтониан $\mathcal{H}_\upsilon$, проварьируем действие (2.2) по метрическому тензору g_{ab}.

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} \sim T_{ab} = P^\mu_a P^\mu_b - \frac{1}{2} g_{ab}\, g^{cd} P^\mu_c P^\mu_d . \tag{2.12}$$

Тогда

$$\mathcal{H}_\upsilon = \oint_{C_\tau} *T_\upsilon = \frac{1}{2} \oint_{C_\tau} [\langle\upsilon, P_\mu\rangle *P_\mu + \langle\upsilon, *P_\mu\rangle P_\mu], \tag{2.13}$$

где $T_\upsilon = \upsilon^a T_{ab}\, d\xi^b$ 1-форма на Σ.

Теперь мы располагаем всем необходимым для вычисления следующих скобок Пуассона:

$$\{X_\mu, \mathcal{H}_\upsilon\} = \langle\upsilon, *P_\mu\rangle, \tag{2.14}$$

$$\{P_\mu, \mathcal{H}_\upsilon\} = \tilde{d}\langle\upsilon, P_\mu\rangle - *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle. \tag{2.15}$$

Кроме формул (2.10), (2.11) и (2.13), в процессе расчетов мы использовали свойства "дельта-функции"

$$\begin{gathered} \langle\upsilon(Q'), \Delta^{(o)}_\tau(Q,Q')\rangle = 0, \\ \oint_{C_\tau} *\Delta^{(o)}_\tau(Q',Q)\rangle\varphi(Q) = 0, \\ \oint_{C_\tau} \Delta^{(o)}_\tau(Q',Q)\ \varphi(Q) = \varphi(Q'), \end{gathered} \tag{2.16}$$

где $\varphi(Q)$ – произвольная на C_τ функция. Если соотношение (2.14) совпадает с правой частью уравнения (2.6), то результат (2.15) требует дополнительного исследования. С этой целью заметим, что действие оператора внешнего дифференцирования на произвольную функцию $\varphi(Q)$ можно представить в виде

$$d\varphi = (\tilde{d} + \tilde{\upsilon}\mathcal{L}_\upsilon)\varphi . \tag{2.17}$$

Возьмем в качестве φ функцию $\langle\upsilon, P_\mu\rangle$ и вычислим производную Ли

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\upsilon\langle\upsilon, P_\mu\rangle &= -\mathcal{L}_\upsilon i(\upsilon*)*P_\mu = \\ &= -[\mathcal{L}_\upsilon i(\upsilon*) - i(\upsilon*)\mathcal{L}_\upsilon + i(\upsilon*)\mathcal{L}_\upsilon]*P_\mu = \\ &= -(i([\upsilon, \upsilon*]) + i(\upsilon*)d\,i(\upsilon)\ )*P_\mu . \end{aligned}$$

Здесь мы использовали уравнение (2.8), а $i(\upsilon)$ – операция внутреннего умножения на υ. Чтобы преобразовать второе слагаемое, используем формулы (2.17) и (2.5).

$$i(\upsilon*)d\langle\upsilon, *P_\mu\rangle = \langle\upsilon, *d\langle\upsilon, *P_\mu\rangle\ \rangle = \langle\upsilon, *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle\ \rangle .$$

Далее

$$\tilde{\upsilon}\langle\upsilon, *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle\rangle = (i(\upsilon), \tilde{\upsilon}\wedge)_+ *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle - i(\upsilon)(\tilde{\upsilon} \wedge *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle),$$

где $i(\upsilon)\tilde{\upsilon}=1$, а из соотношения (2.5) следует, что $\tilde{\upsilon}\wedge*\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle = \tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle\wedge*\tilde{\upsilon} = 0$. Собирая все вместе, получаем

$$d\langle\upsilon, P_\mu\rangle = \tilde{d}\langle\upsilon, P_\mu\rangle - *\tilde{d}\langle\upsilon, *P_\mu\rangle + \tilde{\upsilon}\langle[\upsilon, \upsilon*], *P_\mu\rangle . \tag{2.18}$$

Правая часть данного выражения совпадет с правой частью формулы (2.15) только в том случае, когда векторное поле υ будет удовлетворять уравнению

$$[\upsilon, \upsilon*] = 0. \tag{2.19}$$

В свою очередь, отсюда следует дополнительное ограничение на выбор функции "времени" $f(Q)$: $\Delta f=0$. Таким образом, только для гармонической функции $f(Q)$ уравнения (2.7) будут гамильтоновыми.

В алгебро-геометрических конструкциях Кричевера и Новикова функция "времени" вводится через дифференциал третьего рода ω, а именно: система контуров C_τ определяется требованием $C_\tau = \{Q, \mathrm{Re}\ p(Q) = \tau\}$, где $p(Q) = \int_{Q_o}^{Q} \omega$, а Q_o – произвольная начальная точка. Функция τ в данном случае гармоническая, что позволяет отождествить $f(Q) = \mathrm{Re}\ p(Q)$.

В заключение данного раздела отметим, что если, воспользовавшись свойством полноты системы базисных функций $\{A_n\}$ и $\{\omega^n\}$ на контуре C_τ /10/, ввести разложения

$$x_\mu(Q)=x^n_\mu A_n(Q), \qquad P_\mu(Q)=P_{\mu n}\omega^n(Q). \tag{2.20}$$

а также учесть свойства "дельта-функции" (2.16), то несложно установить вид скобок Пуассона между коэффициентами x^n_μ и P^μ_n:

$$\{x^n_\mu, x^m_\nu\}=0, \qquad \{x^n_\mu, P_{\nu m}\}=\eta_{\mu\nu}\,\delta^n_m, \qquad \{P^\mu_n, P^\nu_m\}=0. \tag{2.21}$$

Эти соотношения будут исходными в процессе реализации алгебры (1.18) в терминах фазовых переменных струны.

3. Реализация алгебры (1.18) в терминах струнных переменных

Комплексные координаты на Σ можно выбрать таким образом, что 1-форма $P_\mu(Q)$ будет суммой голоморфной и антиголоморфной частей

$$P_\mu(Q) = \pi_\mu(Q) + \bar\pi_\mu(Q). \tag{3.1}$$

В этом случае функционал действия (2.2) примет вид

$$S = \int \bar\pi_\mu\wedge \partial x^\mu + \pi_\mu\wedge \bar\partial x^\mu + i\bar\pi_\mu\wedge \pi^\mu. \tag{3.2}$$

Здесь мы воспользовались разложением $d=\partial+\bar\partial$, а также учли, что $*\pi_\mu=-i\pi_\mu$. Соответственно, уравнения движения (2.3) и (2.4) перейдут в следующие соотношения

$$\partial x_\mu = -i\pi_\mu, \qquad \bar\partial x_\mu = i\bar\pi_\mu, \tag{3.3}$$

$$\partial\bar\pi_\mu = \bar\partial\pi_\mu = 0, \tag{3.4}$$

а у тензора "энергии-импульса" будут отличными от нуля только голоморфная и антиголоморфная компоненты

$$T(Q)=T_{zz}dZ^2=\pi_\mu(Q)\pi^\mu(Q), \qquad \bar T(Q)=T_{\bar z\bar z}d\bar Z^2=\bar\pi_\mu(Q)\bar\pi^\mu(Q). \tag{3.5}$$

Уравнения движения (3.3) позволяют выразить $\pi_\mu(Q)$ и $\bar\pi_\mu(Q)$ через динамические переменные $P_\mu(Q)$ и $x_\mu(Q)$,

$$\pi_\mu = \tfrac{1}{2}(P_\mu+i\,dx_\mu)= \tfrac{1}{2}(P_\mu+i*P_\mu),$$
$$\bar\pi_\mu = \tfrac{1}{2}(P_\mu-i\,dx_\mu)= \tfrac{1}{2}(P_\mu-i*P_\mu). \tag{3.6}$$

Их ограничения на контур C_τ, согласно (2.20), равны

$$\pi_\mu(Q) = \tfrac{1}{2}(P_{\mu n}+i\gamma_{nm}x^m_\mu)\,\omega^n(Q) = \tfrac{1}{\sqrt2}\,\alpha_{\mu n}\omega^n(Q), \tag{3.7}$$

$$\bar\pi_\mu(Q) = \tfrac{1}{2}(P_{\mu n}-i\gamma_{nm}x^m_\mu)\,\omega^n(Q) = \tfrac{1}{\sqrt2}\,\bar\alpha_{\mu n}\omega^n(Q), \tag{3.8}$$

где $Q\in C_\tau$, а

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\tau} A_n\, dA_m. \tag{3.9}$$

В отличие от переменных x^n_μ и P^μ_m, которые зависят от собственного времени τ, коэффициенты α^μ_n не чувствительны к выбору контура C_τ, в чем можно убедиться, если воспользоваться теоремой Стокса. Для коэффициентов $\bar\alpha^\mu_n$ мы используем отличное от данного в работе /11/ определение, т.к. разлагаем $\bar\pi(Q)$ по полной системе 1-форм $\{\omega^n\}$, а не $\{\bar\omega^n\}$, как это делалось там. Поэтому в нашем случае коэффициенты $\bar\alpha^\mu_n$ зависят от "времени" τ. Скобки Пуассона между этими величинами имеют вид

$$\{\alpha^\mu_n, \alpha^\nu_m\} = i\eta^{\mu\nu}\gamma_{nm},$$
$$\{\alpha^\mu_n, \bar\alpha^\nu_m\} = 0, \tag{3.10}$$
$$\{\bar\alpha^\mu_n, \bar\alpha^\nu_m\} = -i\eta^{\mu\nu}\gamma_{nm}.$$

Реализацией алгебры (1.18) в терминах скобок Пуассона на фазовом пространстве замкнутой бозонной струны должна быть следующая бесконечномерная алгебра

$$\tfrac{1}{i}\{L_n, L_m\} = U^k_{nm} L_k,$$
$$\tfrac{1}{i}\{L_n, \Psi^k\} = B^k_n - T^k_{nm}\Psi^m, \tag{3.11}$$
$$\{\Psi^n, \Psi^m\} = 0.$$

Функции динамических переменных L_n образуют представление алгебры КН и, как это было показано в работе /11/, являются коэффициентами в разложении T_{zz} компоненты тензора "энергии-импульса" на C_τ по полной системе базисных форм $\{\Omega^n(Q)\}$

$$T(Q) = L_k\, \Omega^k(Q), \tag{3.12}$$

где $L_k = 1/2\, \ell_{k\,.}^{mn}\, \alpha_m^{\mu}\, \alpha_n^{\mu}$, а $\ell_k^{mn} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\tau} \omega^m\, \omega^n\, e_k$.

Структурные константы алгебры (3.11) приведены в (1.11), (1.12) и (1.17). Заметим, что у нас в формулах (3.11) присутствует множитель i, который исчезнет, если перейти от классических скобок Пуассона к квантовым коммутаторам.

Чтобы решить систему уравнений (3.11) относительно функций Ψ^n. удобно представить второе уравнение в виде

$$\frac{1}{i}\, \{\Psi(Q), T(Q')\} = 2\pi i[\tilde{d}\Psi(Q)-\sigma(Q)]\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q'). \tag{3.13}$$

Здесь $\Psi(Q)=\Psi^n A_n(Q)$, $Q,Q'\in C_\tau$, а $\sigma(Q)$ определено в (1.17). В процессе преобразований мы также воспользовались следующими выражениями для "дельта-функций"

$$\begin{aligned} \Delta_\tau^{(0)}(Q,Q') &= \frac{1}{2\pi i}\, \Sigma\, A_n(Q)\, \omega^n(Q'), \\ \Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q') &= \frac{1}{2\pi i}\, \Sigma\, e_n(Q)\, \Omega^n(Q'), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $Q,\ Q' \in C_\tau$. Внешним дифференцированием в точке Q (3.13) сводится к уравнению

$$\frac{1}{i}\, \{[\tilde{d}\Psi(Q)-\sigma(Q)], T(Q')\} = 2\pi i\, \tilde{d}\{[\tilde{d}\Psi(Q)-\sigma(Q)]\, \Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')\},$$

решением которого будет форма $\pi(Q) \equiv k_\mu \pi_\mu(Q)$, где k_μ-постоянный лоренцевский вектор

$$\pi(Q) = \tilde{d}\Psi(Q)-\sigma(Q). \tag{3.15}$$

При этом должны выполняться условия совместности

$$\oint\limits_{C_\tau^i} [\pi(Q)+\sigma(Q)] = 0, \tag{3.16}$$

где C_τ^i - связные компоненты контура C_τ. Светоподобный вектор k_μ ($k^2=0$ гарантирует выполнение последнего уравнения в (3.11)) нарушает явную лоренц-инвариантность теории. Поэтому он является чисто вспомогательной величиной. Процедура его исключения подробно обсуждалась в литературе [12,13].

Проинтегрируем (3.15) на контуре C_τ,

$$\Psi(Q) = \Psi(Q_0) + \int\limits_{Q_0}^{Q} (\pi + \sigma), \quad Q,\ Q_0 \in C_\tau . \tag{3.17}$$

Константа интегрирования $\Psi(Q_0)$, как это можно видеть из (3.13), должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{i}\, \{\Psi(Q_0), T(Q')\} = 2\pi i\, \pi(Q_0)\, \Delta_\tau^{(-1)}(Q_0,Q'), \tag{3.18}$$

которому можно удовлетворить, положив

$$\Psi(Q_0) = i\, X_\mu(Q_0)\, k^\mu \equiv i\, X(Q_0). \tag{3.19}$$

Общее решение уравнения (3.13) представляет собой сумму его частного решения и решения однородного уравнения. Константа $\Psi(Q_0)$ в (3.19), очевидно, зависит от $\bar{\alpha}_n^\mu$. Чтобы исключить эту зависимость, необходимо разбить решение уравнений (3.7) и (3.8) для X_μ^n на сумму $X_\mu^n = x_\mu^n(\alpha)+\bar{x}_\mu^n(\bar{\alpha})$ и отбросить второе слагаемое. В общем виде это сделать невозможно, поскольку мы не знаем матрицы, обратной к γ_{nm}. Однако в каждом конкретном случае, т.е когда фиксирован род поверхности Σ и явно известны матричные элементы γ_{nm}, данная процедура осуществима. С учетом этого замечания окончательно получаем

$$\Psi(Q) = iX(Q_0) + \int\limits_{Q_0}^{Q} (\pi + \sigma). \tag{3.20}$$

В качестве иллюстрации данного результата рассмотрим простейший случай поверхности Σ с $g=0$. Будем использовать комплексные координаты (z) в окрестности точки P_+. Тогда $A_n=z^n$, $\omega^n=dz/z^{n+1}$, $\sigma=\omega^0\eta$. Из формул (3.7), (3.8) и (3.9) легко установить, что

$$X^{-n}\Big|_{n\neq 0} = \frac{i}{n\sqrt{2}}\,(\alpha_n-\bar{\alpha}_n), \text{ т.е.} \qquad x^{-n} = \frac{i}{n\sqrt{2}}\,\alpha_n.$$

где $\alpha_n \equiv \alpha_n^\mu k_\mu$. Условие совместности (3.16) фиксирует параметр π, сокращая слагаемое при $n=0$ в сумме

$$\pi = \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \omega^n$$

с полным вкладом σ. В итоге получаем

$$\Psi(z) = ix^0 - \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n}{n\sqrt{2}} z_0^{-n} + \sum_{n\neq 0} \int_{z_0}^{z} \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \frac{dz}{z^{n+1}} = ix^0 - \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n}{n\sqrt{2}} z^{-n}.$$

Отсюда легко выделить коэффициенты разложения по базису $\{A_n\}$

$$\Psi^n = \frac{\alpha_{-n}}{n\sqrt{2}} \quad (n\neq 0), \qquad \Psi^0 = ix^0,$$

что с точностью до множителя π совпадает с соответствующими выражениями работы [6].

В заключение отметим, что все результаты этого раздела аналогичным образом распространяются на сопряжённый сектор замкнутой струны.

Заключение

Риманову поверхность рода g с двумя отмеченными точками можно рассматривать как диаграмму, отвечающую g-петлевому вкладу в пропагатор взаимодействующих замкнутых струн. Чтобы оценить вклад такой диаграммы, в работе [14] предлагалось использовать технику [15], основанную на знании оператора BRST-заряда. Естественно, что при этом необходимо фиксировать произвол, связанный с группой локальной симметрии. Существование расширенной алгебры связей на Σ служит указанием на то, что симметрия изучаемой квантовой системы с фиксированной калибровкой шире, чем обычная BRST-инвариантность. Это группа глобальной симметрии OSP(1,1|2). Поэтому в таких расчетах будет эффективным способ, предложенный в работах [6,7,13]. Используя результаты настоящей работы, можно построить четыре фермионных оператора BRST-типа и, опираясь на любой из них, вычислить рассматриваемую диаграмму, исключая нефизические степени свободы с помощью механизма Паризи-Соурласа.

Второй момент, на котором мы хотели бы здесь остановиться, связан с изучением возможных локальных центральных расширений следующей алгебры Ли на контуре C_τ:

$$\frac{1}{i}\{T(Q),T(Q')\}=2\pi i\,[\nabla T(Q)\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')+2T(Q)\nabla\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')], \tag{4.1а}$$

$$\frac{1}{i}\{N(Q),T(Q')\}=2\pi i\,[\nabla N(Q)\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')+\lambda N(Q)\nabla\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')], \tag{4.1б}$$

$$\{N(Q),N(Q')\}=0, \tag{4.1в}$$

где $N(Q)$ — тензорное поле на Σ с конформным весом λ. Поиск центральных расширений соотношения (4.1б) в виде с-функции

$$\xi^{(\lambda)}(Q,Q') = \sum_{n\geq 0} \xi_n^{(\lambda)}(Q)\nabla^n\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')$$

позволяет сделать вывод о том, что только при $\lambda=0,1,2$, существуют нетривиальные центральные элементы:

а. $\xi^{(0)}(Q,Q') = \alpha(Q)\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q') + C_1\nabla\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')$,

б. $\xi^{(1)}(Q,Q') = C_2\nabla^2\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')$,

в. $\xi^{(2)}(Q,Q') = C_3\nabla^3\Delta_\tau^{(-1)}(Q,Q')$,

где C_1, C_2, C_3=const., а $\alpha(Q)$-неточная на C_τ форма. В этом смысле полученное в работе расширение алгебры связей единственно.

Все наши расчеты проведены для замкнутой бозонной струны. В работе [16] на римановой поверхности рода g были построены обобщенно-градуированные супералгебры типа Неве-Шварца и типа Рамона. Можно показать, что для этих супералгебр также существуют соответствующие расширения.

Авторы признательны А.Т.Филиппову за интерес к работе и обсуждение.

Литература.

1. Dirac P.A.M. // Can.J.Math. 1950. V.2. P.129; Proc.Roy.Soc. 1958. V.A246. P.326.
2. Фаддеев Л.Д. // ТМФ. 1969. Т.1. С.3.
3. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. // Phys.Lett. 1975.V.B55.P.224; Batalin I.A., Vilkovisky G.A. // Phys.Lett. 1977.V.69.P.309; Fradkin E.S., Fradkina T.E. // Phys.Lett. 1978.V.B79.P.343.
4. Henneaux M. // Phys.Rep. 1985.V.126.P.1.
5. Govaerts J. // Preprint CERN-TH. 5010/88; CERN-TH.4950/88.
6. Aratyn H., Ingermanson R., Niemi A.J. // Preprint DOE/ER/01545-391.1987; Phys.Lett. 1987.V.B194. P.506.
7. Aratyn H., Ingermanson R., Niemi A.J. // Nucl.Phys. 1988. V.B299.P.507.
8. Parisi G., Sourlas N. // Phys.Rev.Lett. 1979.V.43.P.744.
9. McClain B., Niemi A.J., Taylor C., Wijewardhana L.C.R. // Phys.Rev.Lett. 1982. V.49.P.252; Nucl.Phys. 1983.V.B217.P.430.
10. Кричевер И.М., Новиков С.П. // Функцион.анализ и его прил. 1987.Т.21.В.2.С.46.
11. Кричевер И.М., Новиков С.П. // Функцион.анализ и его прил. 1987.Т.21.В.4.С.47.
12. Brink L., Henneaux M., Teitelboim C. // Nucl.Phys. 1987. V.B293.P.505.
13. Aratyn H., Ingermanson R. // Preprint DOE/ER/01545-399.1987.
14. Bonora L., Cotta-Ramusino P., Martellini M. // Phys.Lett. 1988.V.B205.P.53.
15. Marcus N., Sagnotti A. // Phys.Lett. 1986.V.B178.P.343.
16. Bonora L., Martellini M., Rinaldi M., Russo J. // Phys.Lett. 1988. V. B206. P.444.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1988 года.