объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

145

Р2-88-82

Н.С.Шавохина

УСЛОВИЯ ГАРМОНИЧНОСТИ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКИ

Направлено в журнал "Известия вузов. Математика"

1988

Несимметричная метрика на N-мерном многообразии задается тензорным полем $g_{ab}(x)d^a\otimes d^b$, где $d^a = dx^a$. Она играет важную роль в теориях Эйнштейна /1/ и Борна - Инфельда /2/.

Предположим, что определитель g матрицы (g_{ab}) не обращается в нуль, и зададим тензорное поле $\tilde g^{mn}(x)\partial_m\otimes\partial_n$, где $\partial_m = \partial/\partial x^m$, полагая, что произведение $g\tilde g^{mn}$ равно алгебраическому дополнению элемента g_{mn}, входящего в состав матрицы (g_{ab}). При этом определитель $\tilde g$ матрицы $(\tilde g^{mn})$ также не обращается в нуль и $g\tilde g = 1$.

Второе поле называется обратным к первому. В свою очередь, первое поле называется обратным ко второму. Для взаимно обратных полей

$$g_{sb}\tilde g^{sn} = \delta^n_b = g_{bs}\tilde g^{ns}, \qquad /1/$$

где δ^n_b - символ Кронекера.

Обозначим

$$h_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} + g_{ba});\ \phi_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} - g_{ba}),$$
$$\tilde h^{mn} = \frac{1}{2}(\tilde g^{mn} + \tilde g^{nm}),\ \tilde\phi^{mn} = \frac{1}{2}(\tilde g^{mn} - \tilde g^{nm}), \qquad /2/$$

так что

$$g_{ab} = h_{ab} + \phi_{ab};\ \tilde g^{mn} = \tilde h^{mn} + \tilde\phi^{mn}. \qquad /3/$$

Из /2/ и /3/ следуют равенства

$$\frac{1}{2}(g_{sb}\tilde g^{sn} + g_{bs}\tilde g^{ns}) = h_{sb}\tilde h^{sn} + \phi_{sb}\tilde\phi^{sn},$$

$$\frac{1}{2}(g_{sb}\tilde g^{sn} - g_{bs}\tilde g^{ns}) = h_{bs}\tilde\phi^{sn} - \phi_{bs}\tilde h^{sn},$$

Подставляя сюда /1/, находим

$$h_{sb}\tilde h^{sn} + \phi_{sb}\tilde\phi^{sn} = \delta^n_b, \qquad /4/$$

$$h_{bs}\tilde\phi^{sn} = \phi_{bs}\tilde h^{sn}. \qquad /5/$$

Если добавить $h_{bs}\tilde h^{sn}$ к обеим частям равенства /5/, то получится

$$h_{bs}\tilde g^{sn} = g_{bs}\tilde h^{sn}.$$

Следовательно, определители h и $\tilde h$ матриц (h_{ab}) и $(\tilde h^{ab})$ связаны равенством $h\tilde g = g\tilde h$. Поэтому они либо оба равны нулю, либо оба не равны нулю. Здесь рассматривается второй случай.

Введем тензорное поле $h^{mn}(x)\partial_m\otimes\partial_n$, обратное к тензорному полю $h_{ab}(x)\partial^a\otimes\partial^b$, и рассмотрим тензорное поле

$$f_{ab}(x)\partial^a\otimes\partial^b, \qquad /6/$$

где $f_{ab} = h_{ab} - \phi_{am}h^{mn}\phi_{nb}$. Применяя здесь /4/ и /5/, получаем $f_{as}\tilde h^{sp} = h_{as}\tilde h^{sp} - \phi_{as}\tilde\phi^{sp} = \delta^p_a$. Следовательно, поле /6/ обратно к полю $\tilde h^{mn}(x)\partial_m\otimes\partial_n$. Отметим, наконец, что $g_{am}h^{mn}g_{bn} = f_{ab} = g_{ma}h^{mn}g_{nb}$ и $\phi_{as}\tilde h^{sb} = f_{as}\tilde\phi^{sb}$.

От алгебраических свойств несимметричной метрики переходим к ее дифференциальным свойствам.

Умножим равенство /4/ на $\epsilon = \sqrt{|g|}$ и продифференцируем его затем по координате x^n. В результате получим

$$(\partial_n h_{sb})\epsilon\tilde h^{sn} + h_{sb}\partial_n(\epsilon\tilde h^{sn}) +$$
$$+ (\partial_n\phi_{sb})\epsilon\tilde\phi^{sn} + \phi_{sb}\partial_n(\epsilon\tilde\phi^{sn}) = \partial_b\epsilon. \qquad /7/$$

Так как по правилу дифференцирования определителей

$$dg = g\tilde g^{pq}dg_{pq} = g(\tilde h^{pq}dh_{pq} + \tilde\phi^{pq}d\phi_{pq}),$$

$$dg = \tilde g g_{pq}d\tilde g^{pq} = \tilde g(h_{pq}d\tilde h^{pq} + \phi_{pq}d\tilde\phi^{pq}),$$

то

$$\partial_b\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon(h^{sn}\partial_b\tilde h_{sn} + \tilde\phi^{sn}\partial_b\phi_{sn}).$$

Кроме того, очевидно,

$$\tilde h^{sn}\partial_n h_{sb} = \frac{1}{2}\tilde h^{sn}(\partial_n h_{sb} + \partial_s h_{nb}),$$

$$\tilde\phi^{sn}\partial_n\phi_{sb} = \frac{1}{2}\tilde\phi^{sn}(\partial_n\phi_{sb} - \partial_s\phi_{nb}).$$

Следовательно, формулу /7/ можно записать в виде

$$h_{bs}\partial_n(\epsilon \tilde{h}^{sn}) + \epsilon \tilde{h}^{sn}[snb] =$$
/8/
$$= \phi_{bs}\partial_n(\epsilon\tilde{\phi}^{sn}) + \frac{1}{2}\epsilon\tilde{\phi}^{sn}(\partial_s\phi_{nb} + \partial_n\phi_{bs} + \partial_b\phi_{sn}),$$

где $[snb]$ - скобки Кристоффеля:

$$[snb] = \frac{1}{2}(\partial_s h_{nb} + \partial_n h_{sb} - \partial_b h_{sn}).$$

Выражение /8/ подсказывает, что дальше надо рассматривать ковариантные производные со связностью Кристоффеля $\{{}_a{}^m{}_b\} = [abs]h^{sm}$. Будем обозначать их D_n. В этих обозначениях формула /8/ записывается в виде

$$h_{bs}H^s = \phi_{bs}\Phi^s + \Psi_b, \qquad /9/$$

где

$$H^s = \frac{1}{\sqrt{|J|}}D_n(\sqrt{|J|}\tilde{h}^{sn}), \qquad /10/$$

$$\Phi^s = \frac{1}{\sqrt{|J|}}D_n(\sqrt{|J|}\tilde{\phi}^{sn}), \qquad /11/$$

в свою очередь, J - скалярная функция, равная $J = gh^{-1}$, наконец,

$$\Psi_b = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{mn}(D_b\phi_{mn} + D_m\phi_{nb} + D_n\phi_{am}). \qquad /12/$$

Обратимся теперь к равенству /5/. Умножим его на $\sqrt{|J|}$ и возьмем затем ковариантную дивергенцию D_n. В результате получим

$$h_{bs}\Phi^s = \phi_{bs}H^s + G_b, \qquad /13/$$

где

$$G_b = \tilde{h}^{mn}D_n\phi_{bm}. \qquad /14/$$

Таким образом, найдены векторные /10/, /11/ и ковекторные /12/, /14/ характеристики исследуемой несимметричной метрики.

Из /9/ и /13/ находим

$$\Psi_a + G_a = g_{ba}(H^b + \phi^b),$$
/15/
$$\Psi_a - G_a = g_{ab}(H^b - \Phi^b).$$

Затем с помощью /1/ получаем

$$H^a + \Phi^a = \tilde{g}^{ab}(\Psi_b + G_b),$$
/16/
$$H^a - \Phi^a = \tilde{g}^{ba}(\Psi_b - G_b).$$

Из /9/ и /13/ находим также

$$H^a = h^{as}\phi_{sb}\Phi^b + h^{ab}\Psi_b,$$
/17/
$$\Phi^a = h^{as}\phi_{sb}H^b + h^{ab}G_b.$$

Подставляя второе из равенств /17/ в равенство /9/, получаем

$$\Psi_a = f_{ab}H^b - \phi_{as}h^{sb}G_b. \qquad /18/$$

Подставляя первое из равенств /17/ в равенство /13/, получаем

$$G_a = f_{ab}\Phi^b - \phi_{as}h^{sb}\Psi_b. \qquad /19/$$

Наконец, равенства /16/ запишем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{|J|}}D_n(\sqrt{|J|}\tilde{g}^{an}) = \tilde{g}^{ab}(\Psi_b + G_b),$$
/20/
$$\frac{1}{\sqrt{|J|}}D_n(\sqrt{|J|}\tilde{g}^{na}) = \tilde{g}^{ba}(\Psi_b - G_b).$$

Расположим найденные выше характеристики в виде квадрата

$$\begin{matrix} H & \Phi \\ G & \Psi. \end{matrix} \qquad /21/$$

Если две характеристики, лежащие на какой-либо одной из сторон этого квадрата, равны нулю, то равны и остальные две. Действительно, согласно /15/÷/16/

$$(H = 0,\ \Phi = 0) \rightleftarrows (G = 0,\ \Psi = 0),$$

а согласно /17/÷/19/

$(H = 0,\ G = 0) \rightleftarrows (\Phi = 0,\ \Psi = 0).$

Условиями гармоничности для несимметричной метрики называем равенства нулю всех ее характеристик /21/. Рассматриваемую метрику будем называть гармонической, если все ее характеристики равны нулю. Согласно /20/ и только что доказанному утверждению гармоническая метрика вполне характеризуется условиями

$$D_n(\sqrt{|J|}\,\tilde{g}^{an}) = 0,\quad D_n(\sqrt{|J|}\,\tilde{g}^{na}) = 0. \qquad /22/$$

Отсюда и название - гармоническая метрика, поскольку условия /22/ аналогичны тем, которым удовлетворяет симметричная метрика в гармонических координатах /условиям де Дондера[3]/.

Частным случаем гармонической метрики является метрика Борна - Инфельда. Последняя удовлетворяет уравнениям[4]

$$\Phi^a = 0,\ D_a\phi_{mn} + D_m\phi_{na} + D_n\phi_{am} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966, т.2.
2. Born M., Infeld L. - Proc.Roy.Soc.A, 1934, v.144, p.425.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Наука, 1955.
4. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - Изв.вузов. Матем., 1986, № 4, с.62.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1988 года.

Шавохина Н.С. Р2-88-82

Условия гармоничности для несимметричной метрики

Рассматриваются алгебраические и дифференциальные свойства несимметричной метрики. Устанавливается, что несимметричная метрика характеризуется парой векторных и парой ковекторных полей, связанных двумя тождествами. Если эти поля равны нулю /именно так формулируются условия гармоничности/, то несимметричная метрика называется гармонической. Примером гармонической метрики является метрика, удовлетворяющая уравнениям Борна - Инфельда. Случай симметричной метрики тривиален.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Shavokhina N.S. P2-88-82

Harmonicity Conditions for Nonsymmetric Mertic

Algebraic and differential properties of the nonsymmetric metric are considered. It is shown that the nonsymmetric metric is characterized by a pair of vector fields and a pair of covector fields connected by two identities. If these fields are zero (just in this way the harmonicity conditions are formulated), the nonsymmetric metric is called harmonic. An example of the harmonic metric is any metric obeying the Born-Infeld equations. The case of the symmetric metric is trivial.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988