сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-814

Н.С.Шавохина

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФЕДОРОВА И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

1988

Ф.И.Федоров [1,2] в 1968 году установил замечательный факт: уравнения Эйнштейна $R_{\alpha\beta} = 0$ для гравитационного поля можно привести к системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi = M\Psi + \frac{1}{2} \Lambda \Psi\Psi. \tag{1}$$

Здесь B^{α} и M — постоянные квадратные матрицы порядка $N \times N$; Λ — постоянная кубическая матрица порядка $N \times N \times N$; Ψ — N-компонентный столбец искомых функций от координат x^{α}; ∂_{α} — частная производная по x^{α}. В случае гравитации $N = 50$. Столбцы $B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi$, $M\Psi$ и $\Lambda\Psi\Psi$ состоят из компонент

$$\begin{gathered} (B^{\alpha} \partial_{\alpha} \Psi)_k = B^{\alpha}_{km} \partial_{\alpha} \Psi_m, \\ (M\Psi)_k = M_{km} \Psi_m, \quad (\Lambda\Psi\Psi)_k = \Lambda_{kmn} \Psi_m \Psi_n, \end{gathered} \tag{2}$$

где по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до N.

В работе [3] показано, что "эти уравнения замечательны своей универсальностью. Действительно, в такой форме могут быть представлены уравнения квантовой электродинамики, уравнения нелинейного поля Гейзенберга и множество других (см. [1,4])".

В работах [4,5] к виду (1) приведены нелинейные уравнения теории объединенного поля в скалярной электродинамике. В работе [6] этот подход был распространен на общие $SU(n)$ — инвариантные уравнения для неабелевых калибровочных векторных полей и скалярных полей Хиггса, в работах [7,8] — на уравнения в теории суперсимметрии Весса — Зумино и калибровочной суперсимметрии. Общий обзор универсальных нелинейных уравнений Федорова дан в книге [9]. В работе [10] развит способ решения уравнений (1) в случае, когда одна из матриц B^{α} единичная.

Цель данной работы — показать, что и уравнения минимальных гиперповерхностей в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах приводятся к виду (1).

Начнем с уравнения

$$(1 + z_y^2) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy} = 0 \tag{3}$$

минимальных поверхностей в трехмерном пространстве Евклида. Эта задача представляется тем более привлекательной, что уравнения Эйнштейна в известной мере аналогичны этому уравнению /11/.

Как известно /12/, уравнение (3) является условием экстремума интеграла

$$S = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy \tag{4}$$

площади поверхности $z = z(x, y)$. Приравнивая нулю функциональную производную δS по $\delta z(x, y)$, получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = 0, \tag{5}$$

эквивалентное уравнению (3).

Уравнение (5) можно записать в виде системы шести уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv \partial_1 z = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \partial_2 z = p_2, \\ \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 = 0, \\ p_1 = (1 + L)\, q_1, \quad p_2 = (1 + L)\, q_2 = 0, \\ 1 + L = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}, \end{gathered} \tag{6}$$

последнее из которых при $L > 0$ эквивалентно уравнению

$$2L = p_1^2 + p_2^2 - L^2. \tag{7}$$

Из шести компонент

$$\begin{gathered} \Psi_1 = q_1, \; \Psi_2 = q_2, \; \Psi_3 = q_3, \\ \Psi_4 = p_1, \; \Psi_5 = p_2, \; \Psi_6 = L \end{gathered} \tag{8}$$

составим столбец Ψ и введем квадратные матрицы порядка 3x3

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \beta^4 = \omega, \tag{9}$$

с помощью которых составим квадратные матрицы порядка 6x6 в виде следующих блоков:

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} \beta^\alpha & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \omega & \mu \\ \mu & -\epsilon \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нетрудно подсчитать, что столбец

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{4} B^\alpha \partial_\alpha \Psi - M\Psi \tag{11}$$

состоит из компонент

$$\begin{gathered} \Phi_1 = \partial_1 z - p_1, \quad \Phi_2 = \partial_2 z - p_2, \quad \Phi_3 = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2, \\ \Phi_4 = p_1 - q_1, \quad \Phi_5 = p_2 - q_2, \quad \Phi_6 = L. \end{gathered} \tag{12}$$

Следовательно, при условии $L > 0$ систему уравнений (6) можно записать в виде (1), полагая, что компоненты $(\Lambda\Psi\Psi)_k$ столбца $\Lambda\Psi\Psi$ равны следующим квадратичным формам:

$$\begin{gathered} (\Lambda\Psi\Psi)_1 = 0, \quad (\Lambda\Psi\Psi)_2 = 0, \quad (\Lambda\Psi\Psi)_3 = 0, \\ (\Lambda\Psi\Psi)_4 = 2Lq_1 = \Psi_1\Psi_6 + \Psi_6\Psi_1, \\ (\Lambda\Psi\Psi)_5 = 2Lq_2 = \Psi_2\Psi_6 + \Psi_6\Psi_2, \\ (\Lambda\Psi\Psi)_6 = 2L = \Psi_4^2 + \Psi_5^2 - \Psi_6^2. \end{gathered} \tag{13}$$

При условии

$$\Lambda_{kmn} = \Lambda_{knm} \tag{14}$$

коэффициенты этих форм — они же элементы кубической матрицы Λ — определяются однозначно. Отличны от нуля только следующие элементы этой матрицы:

$$\Lambda_{416} = \Lambda_{461} = 1, \qquad \Lambda_{526} = \Lambda_{562} = 1,$$
$$\Lambda_{644} = \Lambda_{655} = 1, \qquad \Lambda_{666} = -1. \tag{15}$$

Отметим, что как матрицы β, так и матрицы B удовлетворяют перестановочным соотношениям Дэффина — Кеммера

$$B^{\alpha} B^{\lambda} B^{\nu} + B^{\nu} B^{\lambda} B^{\alpha} = \delta^{\lambda\nu} B^{\alpha} + \delta^{\lambda\alpha} B^{\nu}. \tag{16}$$

Аналогично приводится к виду (1) уравнение минимальных гиперповерхностей в K-мерном евклидовом пространстве. Наряду с рассмотренным случаем $K = 3$ для физики большое значение имеют случаи $K = 4$ и $K = 5$.

В случае $K = 4$ вместо (5) выступает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{1+L} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{u_z}{1+L} = 0, \tag{17}$$

где

$$1 + L = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \tag{18}$$

При условии $L > 0$ оно эквивалентно системе восьми уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \partial_1 u = p_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_2 u = p_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv \partial_3 u = p_3,$$
$$\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 = 0, \tag{19}$$
$$p_1 = (1 + L) q_1, \quad p_2 = (1 + L) q_2, \quad p_3 = (1 + L) q_3,$$
$$L = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - L^2).$$

Из восьми компонент

$$\Psi_1 = q_1, \quad \Psi_2 = q_2, \quad \Psi_3 = q_3, \quad \Psi_4 = u,$$
$$\Psi_5 = p_1, \quad \Psi_6 = p_2, \quad \Psi_7 = p_3, \quad \Psi_8 = L \tag{20}$$

составим столбец Ψ и введем квадратные матрицы порядка 4x4

$$\omega = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},$$
$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \beta^4 = \omega, \tag{21}$$

с помощью которых составим квадратные матрицы порядка 8x8 в виде блоков (10). Нетрудно подсчитать, что в данном случае столбец (11) состоит из компонент

$$\Phi = \partial_1 u - p_1, \quad \Phi_2 = \partial_1 u - p_2, \quad \Phi_3 = \partial_1 u - p_3,$$
$$\Phi_4 = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3, \tag{22}$$
$$\Phi_5 = p_1 - q_1, \quad \Phi_6 = p_2 - q_2, \quad \Phi_7 = p_3 - q_3, \quad \Phi_8 = L.$$

Следовательно, уравнения (19) можно записать в матричном виде (1), полагая

$$(\Lambda\Psi\Psi)_k = 0, \quad k = 1,2,3,4,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_5 = 2Lq_1 = \Psi_1\Psi_8 + \Psi_8\Psi_1,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_6 = 2Lq_2 = \Psi_2\Psi_8 + \Psi_8\Psi_1, \tag{23}$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_7 = 2Lq_3 = \Psi_3\Psi_8 + \Psi_8\Psi_1,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_8 = 2L = \Psi_5^2 + \Psi_6^2 + \Psi_7^2 - \Psi_8^2.$$

При условии (14) отличны от нуля только следующие элементы матрицы Λ:

$$\Lambda_{518} = \Lambda_{581} = 1, \quad \Lambda_{628} = \Lambda_{682} = 1,$$
$$\Lambda_{738} = \Lambda_{783} = 1,$$

$$\Lambda_{855} = \Lambda_{866} = \Lambda_{877} = 1, \qquad \Lambda_{888} = -1. \tag{24}$$

Отметим, что и в случае $K = 4$ как матрицы β, так и матрицы B удовлетворяют перестановочным соотношениям (16).

В случае $K = 5$ вместо (5) выступает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{v_x}{1+L} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{v_y}{1+L} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{v_z}{1+L} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{v_u}{1+L} = 0, \tag{25}$$

где

$$1 + L = \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + v_u^2}\,. \tag{26}$$

При условии $L > 0$ оно эквивалентно системе десяти уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \partial_1 v = p_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \partial_2 v = p_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \equiv \partial_3 v = p_3, \quad \frac{\partial v}{\partial u} \equiv \partial_4 v = p_4,$$

$$\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 + \partial_4 q_4 = 0,$$

$$p_1 = (1+L)q_1, \quad p_2 = (1+L)q_2, \tag{27}$$

$$p_3 = (1+L)q_3, \quad p_4 = (1+L)q_4,$$

$$L = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - L^2).$$

Из десяти компонент

$$\Psi_1 = q_1, \ \Psi_2 = q_2, \ \Psi_3 = q_3, \ \Psi_4 = q_4, \ \Psi_5 = v,$$
$$\Psi_6 = p_1, \ \Psi_7 = p_2, \ \Psi_8 = p_3, \ \Psi_9 = p_4, \ \Psi_{10} = L \tag{28}$$

составим столбец Ψ и введем квадратные матрицы порядка 5x5:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\beta^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц составим матрицы порядка 10x10 в виде блоков (10). В данном случае столбец (11) состоит из компонент

$$\Phi_1 = \partial_1 v - p_1, \quad \Phi_2 = \partial_2 v - p_2, \quad \Phi_3 = \partial_3 v - p_3, \ \Phi_4 = \partial_4 v - p_4,$$

$$\Phi_5 = \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 + \partial_4 q_4, \tag{30}$$

$$\Phi_6 = p_1 - q_1, \ \Phi_7 = p_2 - q_2, \ \Phi_8 = p_3 - q_3, \ \Phi_9 = p_4 - q_4, \ \Phi_{10} = L.$$

Следовательно, уравнения (25) можно записать в матричном виде (1), полагая

$$(\Lambda\Psi\Psi)_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_6 = 2Lq_1 = \Psi_1\Psi_{10} + \Psi_{10}\Psi_1,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_7 = 2Lq_2 = \Psi_2\Psi_{10} + \Psi_{10}\Psi_2, \tag{31}$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_8 = 2Lq_3 = \Psi_3\Psi_{10} + \Psi_{10}\Psi_3,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_9 = 2Lq_4 = \Psi_4\Psi_{10} + \Psi_{10}\Psi_4,$$
$$(\Lambda\Psi\Psi)_{10} = 2L = \Psi_6^2 + \Psi_7^2 + \Psi_8^2 + \Psi_9^2 - \Psi_{10}^2.$$

При условии (14) отличны от нуля только следующие элементы матрицы Λ:

$$\Lambda_{61a} = \Lambda_{6a1} = 1, \qquad \Lambda_{72a} = \Lambda_{7a2} = 1,$$
$$\Lambda_{83a} = \Lambda_{8a3} = 1, \qquad \Lambda_{94a} = \Lambda_{9a4} = 1, \tag{32}$$
$$\Lambda_{a66} = \Lambda_{a77} = \Lambda_{a88} = \Lambda_{a99} = 1, \qquad \Lambda_{aaa} = -1,$$

где $a = 10$. В данном случае мы располагаем полным набором пятирядных матриц Дэффина — Кеммера.

Теперь уже нетрудно видеть, как в матричном виде Федорова (1) записывается уравнение минимальных гиперповерхностей в евклидовом пространстве любой размерности. Переход же к псевдоевклидовым пространствам получается в результате умножения некоторых из координат на мнимую единицу.

Заметим, что в мире Минковского времениподобная гиперповерхность описывает движение релятивистской мембраны, а пространственно-подобная гиперповерхность служит или может служить образом "настоящего". Условие пространственной подобности гиперповерхности

$$t = t(x, y, z) \tag{33}$$

означает

$$c^2(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) < 1, \tag{34}$$

где c — скорость света. Условие же времениподобности гиперповерхности означает, что ее вектор нормали лежит вне светового конуса.

Минимальная времениподобная гиперповерхность описывает свободное движение релятивистской мембраны.

В теории Борна — Инфельда [14, 15] потенциал электрона

$$\phi = \phi(x, y, z) = \phi(r), \tag{35}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{36}$$

равен

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} \int_{r/r_0}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^4}} = \frac{e}{r_0} \int_{0}^{r_0/r} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^4}}, \tag{37}$$

где e — заряд электрона, $r_0 = \sqrt{ae}$, a — константа нелинейности электродинамики. В работе [16] рассмотрена гиперповерхность

$$t = t_0 + \frac{a}{c}\phi(x, y, z) \tag{38}$$

вида (33), где t_0 — константа, отмечающая положение электрона на оси времени, и замечено, что она всюду, кроме одной точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, пространственно-подобна и минимальна.

Последнее означает, что функция (33) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{t_x}{1 - L} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{t_y}{1 - L} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{t_z}{1 - L} = 0, \tag{39}$$

где

$$1 - L = \sqrt{1 - c^2(t_x^2 + t_y^2 + t_z^2)}. \tag{40}$$

При условии $L > 0$ уравнение (39) эквивалентно системе восьми уравнений

$$\begin{aligned}
&\partial_1 t = p_1, \quad \partial_2 t = p_2, \quad \partial_3 t = p_3,\\
&\partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 + \partial_3 q_3 = 0,\\
&p_1 = (1 - L) q_1, \quad p_2 = (1 - L) q_2, \quad p_3 = (1 - L) q_3,\\
&2L = L^2 + c^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),
\end{aligned} \tag{41}$$

записать которую в матричном виде (1) теперь уже не составляет большого труда. Из восьми компонент (20) (при $u = t$) составим столбец Ψ и введем матрицы (21), с помощью которых составим блочные матрицы (10). В таком случае столбец (11) состоит из компонент (22) (при $u = t$). Следовательно, уравнения (41) можно записать в матричном виде (1), полагая

$$\begin{aligned}
&(\Lambda\Psi\Psi)_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4\\
&(\Lambda\Psi\Psi)_5 = 2Lq_1 = -\Psi_1\Psi_8 - \Psi_8\Psi_1,\\
&(\Lambda\Psi\Psi)_6 = -2Lq_2 = -\Psi_2\Psi_8 - \Psi_8\Psi_2,\\
&(\Lambda\Psi\Psi)_7 = -2Lq_3 = -\Psi_3\Psi_8 - \Psi_8\Psi_3,\\
&(\Lambda\Psi\Psi)_8 = 2L = c^2(\Psi_5^2 + \Psi_6^2 + \Psi_7^2) + \Psi_8^2.
\end{aligned} \tag{42}$$

При условии (14) отличны от нуля только следующие элементы матрицы Λ:

$$\Lambda_{518} = \Lambda_{581} = -1, \quad \Lambda_{628} = \Lambda_{682} = -1, \quad \Lambda_{783} = \Lambda_{738} = -1,$$
$$\Lambda_{855} = \Lambda_{866} = \Lambda_{877} = c^2, \quad \Lambda_{888} = 1. \tag{43}$$

Таким образом, одним из решений уравнения Федорова (1) является восьмикомпонентный столбец

$$\Psi_1 = \frac{a}{c}\,\frac{x}{r}\,\frac{\phi'}{\sqrt{1-a^2\phi'^2}}, \qquad \Psi_5 = \frac{a}{c}\,\frac{x}{r}\,\phi',$$
$$\Psi_2 = \frac{a}{c}\,\frac{y}{r}\,\frac{\phi'}{\sqrt{1-a^2\phi'^2}}, \qquad \Psi_6 = \frac{a}{c}\,\frac{y}{r}\,\phi', \tag{44}$$
$$\Psi_3 = \frac{a}{c}\,\frac{z}{r}\,\frac{\phi'}{\sqrt{1-a^2\phi'^2}}, \qquad \Psi_7 = \frac{a}{c}\,\frac{z}{r}\,\phi',$$
$$\Psi_4 = t_0 + \frac{a}{c}\,\phi. \qquad \Psi_8 = 1 - \sqrt{1-a^2\phi'^2},$$

где $\phi = \phi(r)$ — функция (37), ϕ' — ее производная по r, равная

$$\phi' = -\frac{e}{r_0^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+(r/r_0)^4}}. \tag{45}$$

В столбце (44) собрана следующая информация об электроне Борна: компонента Ψ_4 представляет электростатический потенциал, Ψ_8 — функцию Лагранжа, компоненты Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 представляют электрическую индукцию, а компоненты Ψ_5, Ψ_6, Ψ_7 — электрическую напряженность /17/.

В заключение автор приносит глубокую благодарность академику Ф.И.Федорову за интерес к работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф.И. ДАН СССР, 1968, т.179, № 4, с.802.*
2. *Федоров Ф.И. В сб.: Труды 9-й Международной конференции по общей теории относительности и гравитации. Изд.-Международный союз чистой и прикладной математики, Йена, 1980, т.3, с.549.*
3. *Федоров Ф.И., Кириллов А.А. – Acta Physica Polonica,1976, Vol. B7, No. 3, p.161.*
4. *Федоров Ф.И., Кувшинов В.И. Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, № 5, 1970, с.69.*
5. *Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Препринт Ин-та физики АН БССР, Минск, 1974.*
6. *Богуш А.А., Жирков Л.Ф. Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, 1977, № 5, с.51.*
7. *Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Изв. АН БССР, серия физ.-мат.наук, 1979, № 5, с.63.*
8. *Бабичев Л.Ф., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. Изв. АН БССР, серия физ.-мат.наук, 1980, № 6, с.52.*
9. *Богуш А.А. Введение в полевую теорию элементарных частиц. "Наука и техника", Минск, 1981.*
10. *Скоробогатько В.Я. ДАН УССР, 1988, А № 3, с.28.*
11. *Уилер Дж. Гравитация, нейтрино, Вселенная. М.: ИЛ, 1962, с.100.*
12. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и задача Плато. М.: Наука, 1987.*
13. *Kemmer N. – Proc. Roy. Soc., 1939, A173, p.91.*
14. *Born M. – Proc. Roy. Soc., 1934, A114, p.140.*
15. *Born M., Infeld L. – Proc. Roy. Soc., 1934, A144, p.425.*
16. *Шавохина Н.С. Препринт ОИЯИ, Р2-88-515, Дубна, 1988.*
17. *Таннела М.А. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: ИЛ, 1962.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября 1988 года.