объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-778

Н.А.Черников

НЕОБХОДИМЫЙ ОБЪЕКТ В ОТО — ФОНОВАЯ СВЯЗНОСТЬ

Направлено в Оргкомитет
VII Советской гравитационной конференции
"Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации", Ереван, октябрь, 1988 г.

1988

В геометрических теориях явлений природы все физические объекты представляются геометрическими объектами. Вследствие этого, что почти тривиально, в геометрической теории гравитации /а чтобы нам не отстать от моды, поскорее введем аббревиатуру ГТГ/ к числу таких объектов должна относиться плотность энергии гравитационного поля. В эйнштейновской теории гравитации /ЭТГ - еще одна наша аббревиатура!/ согласиться с этим утверждением мешало то немаловажное обстоятельство, что с самого начала в ней был потерян один из геометрических объектов - фоновая связность, которая вместе с метрическим тензорным полем как раз и определяет плотность энергии. Но потерянный объект, слава богу, нашелся, и мы получили возможность обсудить здесь на базе ЭТГ вполне геометризованную теорию гравитации.

Мы рассмотрим здесь три подхода к ГТГ в порядке очередности, диктуемом логическими, а не историческими мотивами. Все три подхода укладываются в рамкм ОТО - общей теории относительности. Для выяснения вопроса о необходимости введения фоновой связности в ЭТГ нет нужды в конкретных представлениях о строении вещества. Достаточно рассмотреть гравитационное поле в вакууме, что здесь и делается.

"Согласно теории относительности, законы природы необходимо формулировать независимо от какого-либо конкретного выбора координат, так как системе координат нично реально существующее не соответствует; о простоте закона можно судить только по его общевариантной формулировке" [1, с.113]. Этому общему принципу Эйнштейна в наше время можно придать вполне четкий смысл: все объекты в геометрических теориях явлений природы надо считать заданными на дифференцируемом многообразии.В геометрической теории гравитационного поля в вакууме размерность N многообразия равна четырем.

Геометрические объекты, с которыми здесь приходится иметь дело, это тензорные /в частности, скалярные, векторные и ковекторные/ поля и аффинные связности. Их теория изложена в книге [2]. Конспект необходимой здесь части этой книги опубликован [3,4].

В связи с теорией интегрирования на многообразиях особо выделяются тензорные поля без верхних индексов с антисимметричными по всем нижним индексам компонентами

$$\Omega_{a_1 \dots a_K} \, . \qquad /1/$$

Только от этих объектов и берутся интегралы.

Тензорное поле с антисимметричными компонентами /1/ называем тензорным полем типа $[0/K]$. При $K < 2$ условие антисимметричности теряет свой смысл, и оно снимается, а понятие типа $[0/K]$ распространяется на случай $K = 1$ и на случай $K = 0$. Тензорное поле типа $[0/1]$ является ковекторным полем Ω_a. Тензорное поле типа $[0/0]$ является скалярным полем Ω. Ввиду антисимметрии все тензорные поля типа $[0/K]$ при $K > N$ равняются нулю, так что имеет смысл рассматривать тип $[0/K]$ только при целых значениях K от 0 до N. Соответственно в этих пределах меняется и размерность области интегрирования. Нульмерная область - это некоторая точка P. Интеграл от скалярного поля Ω по этой области равен значению $\Omega(P)$ этого поля в точке P. Одномерная область - это некоторая кривая L. Если она задана в виде

$$x^a = x^a(u), \quad a \in \{1, \dots, N\}, \qquad /2/$$

то интеграл от ковекторного поля Ω_a равен

$$\Omega(L) = \int \Omega_a \frac{dx^a}{du} du. \qquad /3/$$

Интеграл по K-мерной области $\mathfrak{D}$ берется от тензорного поля типа $[0/K]$. Если эта область задается в виде

$$x^a = x^a(u^1, \dots, u^K), \; a \in \{1, \dots, N\}, \qquad /4/$$

то интеграл от тензорного поля /1/ типа $[0/K]$ по этой области равен K-кратному интегралу

$$\Omega(\mathfrak{D}) = \int \dots \int \Omega_{a_1 \dots a_K} \frac{\partial x^{a_1}}{\partial u^1} \dots \frac{\partial x^{a_K}}{\partial u^K} du^1 \dots du^K. \qquad /5/$$

Только при сформулированных выше условиях интегралы не зависят ни от выбора координат x, ни от выбора параметров u. А если некоторый интеграл зависит от какого-либо конкретного выбора координат, то ему нет места ни в теории многообразий, ни в общей теории относительности.

Важнейшую роль в теории интегрирования на многообразиях играет теорема Стокса. В этой теореме интеграл от тензорного поля типа $[0/K]$ по границе некоторой $(K+1)$-мерной области связывается с интегралом от внешней производной этого поля по самой области. Внешняя производная определяется следующим образом. Если компонента /1/ антисимметрична по всем K индексам, то комбинация

$$\Omega'_{a a_1 \dots a_K} = \partial_a \Omega_{a_1 \dots a_K} - \partial_{a_1} \Omega_{a a_2 \dots a_K} - \partial_{a_2} \Omega_{a_1 a a_3 \dots a_K} - \dots - \partial_{a_K} \Omega_{a_1 \dots a_{K-1} a} \qquad /6/$$

ее частных производных антисимметрична по всем своим $K+1$ индексам. А если к тому же /1/ является компонентой тензорного поля, то и комбинация /6/ является компонентой тензорного поля. Полученное таким образом тензорное поле типа $[0/(K+1)]$ называем внешней производной исходного тензорного поля типа $[0/K]$. При $K = 0$ формула /6/ теряет свой смысл, и ее нужно дополнить определением

$$\Omega'_a = \partial_a \Omega. \qquad /7/$$

Согласно теореме Стокса

$$\Omega(\mathfrak{D}') = \Omega'(\mathfrak{D}), \qquad /8/$$

где $\mathfrak{D}$ - вышеупомянутая $(K+1)$-мерная область, $\mathfrak{D}'$ - ее граница. В частном, нужном здесь нам случае $K + 1 = N$ эта теорема доказана в книге [5, §19].

Дальше будем рассматривать только ориентируемые многообразия. В таком случае существуют атласы, в каждом из которых переход от одной координатной карты к другой достигается путем преобразования с якобианом, не равным нулю. Выберем такой атлас и тем самым ориентируем многообразие. При этом найдется тензорное поле типа $[0/N]$ с компонентами $\epsilon_{a_1 \dots a_N}$, такими, что во всех картах в каждой точке многообразия

$$\epsilon = \epsilon_{1 \dots N} > 0. \qquad /9/$$

Найдя или выбрав такое поле, вышеопределенный интеграл $\epsilon(\mathfrak{D})$ от него по N-мерной области $\mathfrak{D}$ назовем объемом этой области. На многообразии с заданной мерой объема $\epsilon(\mathfrak{D})$ из теоремы Стокса следует теорема Гаусса.

Рассмотрим некоторое векторное поле F^b и составим тензорное поле типа $[0/(N-1)]$ в виде следующей свертки

$$\Omega_{a_1 \dots a_{N-1}} = F^b \epsilon_{b a_1 \dots a_{N-1}}. \qquad /10/$$

Внешняя производная /6/ этого поля является тензорным полем типа $[0/N]$. Поэтому она отличается от объемного тензорного поля лишь скалярным множителем:

$$\Omega'_{a a_1 \dots a_{N-1}} = F \epsilon_{a a_1 \dots a_{N-1}}. \qquad /11/$$

В случае /10/ скалярное поле F равняется

$$F = \epsilon^{-1} \partial_b (\epsilon F^b) \qquad /12/$$

и называется дивергенцией векторного поля F^b. В применении к тензорному полю /10/ теорема Стокса /8/ называется теоремой Гаусса.

Переходя к понятию аффинной связности, подчеркнем, что в теореме Стокса фигурировали только тензорные поля типа $[0/K]$, а в теореме Гаусса дополнительно привлекалось лишь понятие векторного поля. В отличие от внешней производной составляемая с помощью аффинной связности ковариантная производная берется от любого тензорного поля. Аффинная связность имеет N^3 компонент Γ^a_{mn}. От имеющего столько же компонент тензорного поля T^a_{mn} она отличается законом преобразования компонент при переходе от одной координатной карты к другой. Аффинная связность вводится с таким расчетом, чтобы составленная с ее помощью ковариантная производная тензорного поля T являлась тензорным полем ∇T с числом компонент на единицу большим, чем у T. Для скалярного поля

$$\nabla_m \Omega = \partial_m \Omega = \Omega'_m. \qquad /13/$$

Для векторного и ковекторного полей

$$\nabla_m F^a = \partial_m F^a + \Gamma^a_{mn} F^n, \quad \nabla_m \Omega_n = \partial_m \Omega_n - \Gamma^a_{mn} \Omega_a. \qquad /14/$$

Ковариантная производная любого тензорного поля получается отсюда по правилу дифференцирования произведения

$$\nabla (AB) = (\nabla A) B + A (\nabla B). \qquad /15/$$

Например, в случае тензорного поля g_{ab} получается

$$\nabla_m g_{ab} = \partial_m g_{ab} - \Gamma^s_{ma} g_{sb} - \Gamma^s_{mb} g_{as}. \qquad /16/$$

Разность

$$S^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} - \Gamma^a_{nm} \qquad /17/$$

является тензором. Его называют тензором кручения аффинной связности Γ^a_{mn}. Для скалярной функции

$$(\nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m + S^a_{mn} \nabla_a) \Omega = 0. \qquad /18/$$

В применение к векторному и ковекторному полям операция

$$\nabla_{mn} = \nabla_m \nabla_n - \nabla_n \nabla_m + S^a_{mn} \nabla_a \qquad /19/$$

дает алгебраический результат:

$$\nabla_{mn} F^a = R^a_{mnb} F^b, \quad \nabla_{mn} \Omega_b = - R^a_{mnb} \Omega_a, \qquad /20/$$

где комбинация

$$R^a_{mnb} = \partial_m \Gamma^a_{nb} - \partial_n \Gamma^a_{mb} + \Gamma^a_{ms} \Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns} \Gamma^s_{mb} \qquad /21/$$

является тензором. Его называют тензором кривизны аффинной связности Γ^a_{mn}. Операция /19/ действует по правилу дифференцирования /15/. Поэтому, например, аналогично /16/ имеем

$$\nabla_{mn} g_{ab} = - R^s_{mna} g_{sb} - R^s_{mnb} g_{as}. \qquad /22/$$

Важную роль играют два тождества

$$R^a_{[mnb]} = \nabla_{[m} S^a_{nb]} - S^p_{[mn} S^a_{b]p}, \qquad /23/$$

$$\nabla_{[k} R^a_{mn]b} = S^p_{[km} R^a_{n]pb}, \qquad /24/$$

где квадратные скобки означают альтернирование. Ввиду того, что тензоры /17/ и /21/ антисимметричны по индексам m, n, из пяти возможных сверток имеется только три независимых

$$S_m = S^a_{ma}, \quad R_{mn} = R^a_{amn}, \quad \Omega_{mn} = R^a_{mna}. \qquad /25/$$

Дальше нам придется иметь дело не с одной, а с двумя связностями Γ^a_{mn} и $\check{\Gamma}^a_{mn}$. Их разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \qquad /26/$$

является тензором. Его называют тензором аффинной деформации. Располагая двумя связностями, для любого тензорного поля T мы можем составить ковариантные производные ∇T и $\check{\nabla} T$. Если в выражении для $\nabla_m T$ заменить символ ∂_m на ∇_m, а связность Γ^a_{mn}

на тензор /26/, то получится выражение для $\check{\nabla}_m T$. Например, для скалярного поля $\check{\nabla}_m \Omega = \nabla_m \Omega$, а согласно формулам /14/ и /16/

$$\check{\nabla}_m F^a = \nabla_m F^a + P^a_{mn} F^n , \quad \check{\nabla}_m \Omega_n = \nabla_m \Omega_n - P^a_{mn} \Omega_a , \tag{27}$$

$$\check{\nabla}_m g_{ab} = \nabla_m g_{ab} - P^s_{ma} g_{sb} - P^s_{mb} g_{as} . \tag{28}$$

В этом нетрудно убедиться, рассмотрев разность $\check{\nabla} T - \nabla T$. Закон изменения тензора кривизны при переходе от одной связности к другой запишем в двух эквивалентных видах

$$\check{R}^a_{mnb} = R^a_{mnb} + S^k_{mn} P^a_{kb} + \nabla_m P^a_{nb} - \nabla_n P^a_{mb} - P^a_{mnb} , \tag{29}$$

$$R^a_{mnb} = \check{R}^a_{mnb} - \check{S}^k_{mn} P^a_{kb} - \check{\nabla}_m P^a_{nb} + \nabla_n P^a_{mb} - P^a_{mnb} , \tag{30}$$

где

$$P^a_{mnb} = P^a_{ns} P^s_{mb} - P^a_{ms} P^s_{nb} . \tag{31}$$

Из /29/ следует, что вариация тензора кривизны /21/ равна

$$\delta R^a_{mnb} = S^k_{mn} \delta \Gamma^a_{kb} + \nabla_m \delta \Gamma^a_{nb} - \nabla_n \delta \Gamma^a_{mb} . \tag{32}$$

Теперь перейдем к закону преобразования компонент Γ^a_{mn} аффинной связности при переходе от одной координатной карты к другой. Обозначим

$$S^a_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} , \quad S^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} . \tag{33}$$

Выше мы потребовали, чтобы например производная $\nabla_m \Omega_n$ ковекторного поля Ω_n была тензором, что означает

$$\partial_{m'} \Omega_{n'} - \Gamma^{a'}_{m'n'} \Omega_{a'} = S^m_{m'} S^n_{n'} (\partial_m \Omega_n - \Gamma^a_{mn} \Omega_a) , \tag{34}$$

$$\partial_{m'} = S^m_{m'} \partial_m , \quad \Omega_{n'} = S^n_{n'} \Omega_n . \tag{35}$$

Из /35/ следует, что

$$\partial_{m'} \Omega_{n'} = S^m_{m'} S^n_{n'} \partial_m \Omega_n + \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{m'} \partial x^{n'}} \Omega_n . \tag{36}$$

Вычитая из /36/ равенство /34/, находим

$$\Gamma^{a'}_{m'n'} S^a_{a'} = S^m_{m'} S^n_{n'} \Gamma^a_{mn} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{m'} \partial x^{n'}} , \tag{37}$$

то есть

$$\Gamma^{a'}_{m'n'} = S^{a'}_a S^m_{m'} S^n_{n'} \Gamma^a_{mn} + S^{a'}_a \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^{m'} \partial x^{n'}} . \tag{38}$$

Это и есть искомый закон преобразования компонент аффинной связности. Он отличается от тензорного закона наличием в правой части второго слагаемого.

Существенно, что второе слагаемое в правой части закона /38/ симметрично по нижним индексам m' и n'. Благодаря этому разность /17/ является тензором, а полусумма

$$\mathring{\Gamma}^a_{mn} = \frac{1}{2} (\Gamma^a_{mn} + \Gamma^a_{nm}) \tag{39}$$

сама по себе составляет аффинную связность. Дальше мы будем рассматривать только симметричные связности, то есть полагать

$$S^a_{mn} = 0, \quad \check{S}^a_{mn} = 0 . \tag{40}$$

К понятию симметричной аффинной связности с компонентами

$$\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{nm} \tag{41}$$

и к закону преобразования /38/ можно подойти, рассматривая уравнения геодезических в виде

$$\frac{dx^a}{d\tau} = p^a , \quad \frac{dp^a}{d\tau} = - \Gamma^a_{mn} p^m p^n . \tag{42}$$

Правые части этих уравнений естественно считать компонентами

$$F^a = p^a , \quad F^{N+a} = - \Gamma^a_{mn} p^m p^n \tag{43}$$

векторного поля на $2N$-мерном многообразии с координатами

$$x^1 , \dots , x^N , \quad x^{N+1} = p^1 , \dots , x^{2N} = p^N . \tag{44}$$

Действительно, переходя от координат /44/ к новым координатам

$$\tilde{x}^{\bar{k}} = \tilde{x}^{\bar{k}}(x,p), \quad \bar{k} \in \{1,\dots,2N\}, \qquad /45/$$

мы записываем уравнения /42/ в виде

$$\frac{d\tilde{x}^{\bar{k}}}{d\tau} = \tilde{F}^{\bar{k}}, \quad \bar{k} \in \{1,\dots,2N\}, \qquad /46/$$

где

$$\tilde{F}^{\bar{k}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{k}}}{\partial x^a} p^a - \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{k}}}{\partial p^a} \Gamma^a_{mn} p^m p^n, \qquad /47/$$

то есть преобразуем правые части уравнений геодезических по векторному закону в $2N$-мерном пространстве. В частности, полагая

$$\tilde{x}^a(x,p) = \tilde{x}^a(x), \quad \tilde{x}^{N+a}(x,p) = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^m} p^m = \tilde{p}^a, \qquad /48/$$

получаем

$$\tilde{F}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^m} p^m, \quad \tilde{F}^{N+a} = \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^s} \Gamma^s_{mn} \right\} p^m p^n, \qquad /49/$$

так что уравнения /46/ принимают такой же, как и /42/, вид

$$\frac{d\tilde{x}^a}{d\tau} = \tilde{p}^a, \quad \frac{d\tilde{p}^a}{d\tau} = -\tilde{\Gamma}^a_{mn} \tilde{p}^m \tilde{p}^n, \qquad /50/$$

где новые функции $\tilde{\Gamma}^a_{mn}$ связаны со старыми функциями по правилу

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^s} \Gamma^s_{mn} = -\frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^n} \tilde{\Gamma}^a_{rs}. \qquad /51/$$

Это правило эквивалентно правилу /37/.

Только что построенное $2N$-мерное многообразие называется касательным пучком $P(X)$ векторов исходного N-мерного многообразия X. Мы доказали теорему: если функции /43/ от x, p составляют векторное поле на $P(X)$, то функции /41/ от x составляют аффинную связность на X. Нетрудно видеть, что верна и обратная теорема. Замечательно, что многообразие $P(X)$ ориентируемо независимо от того, возможно или невозможно ориентировать многообразие X. Действительно, как бы ни были связаны карты x, покрывающие многообразие X, карты x, p, связанные по правилу /48/, ориентируют многообразие $P(X)$, так как якобиан преобразования /48/ положителен, поскольку он равен квадрату

$$\frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{p})}{\partial(x,p)} = \left| \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^m} \right|^2. \qquad /52/$$

Ввиду того, что этот якобиан не зависит от p, на многообразии $P(X)$ можно задать меру объема с помощью тензорного поля $E_{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_{2N}}$ типа $[0/2N]$, основная компонента которого в координатной карте x, p не зависит от p:

$$E_{1\dots 2N} = \epsilon^2(x) > 0. \qquad /53/$$

В силу /52/ поле ϵ^2 на многообразии X является скалярной плотностью веса -2. Дивергенция векторного поля /43/ относительно задаваемой формулой /53/ меры объема в пучке $P(X)$ равна скалярному полю

$$F(x,p) = p^a \epsilon^{-2}(\partial_a \epsilon^2 - 2\Gamma_a \epsilon^2) = \epsilon^{-2} p^a \nabla_a \epsilon^2 \qquad /54/$$

на этом пучке, где

$$\Gamma_a = \Gamma^m_{am}. \qquad /55/$$

Последняя из сверток /25/ выражается через свертку /55/ следующим образом:

$$\Omega_{mn} = \partial_m \Gamma_n - \partial_n \Gamma_m. \qquad /56/$$

Если дивергенция /54/ равна нулю, то связность /41/ называется эквиаффинной. В этом случае

$$\nabla_a \epsilon^2 = 0, \quad \Gamma_a = \partial_a \frac{1}{2} \ln \epsilon^2, \qquad /57/$$

и свертка /56/ равна нулю. В силу тождества /23/ вторая из сверток /25/ в этом случае симметрична. Если многообразие X ориентируемо, то из поля ϵ^2 можно извлечь положительный квадратный корень ϵ. В этом случае дивергенция векторного поля /43/ равна

$$F(x,p) = 2p^a\epsilon^{-1}(\partial_a\epsilon - \Gamma_a\epsilon) = 2\epsilon^{-1}p^a\nabla_a\epsilon\ , \qquad /58/$$

а если связность эквиаффинна, то

$$\nabla_a\epsilon = 0,\ \ \Gamma_a = \partial_a \ln\epsilon. \qquad /59/$$

Такой подход к понятию аффинной связности по существу был рассмотрен в работе[6] по кинетической теории газов в ОТО. В статистической теории газа равенство нулю дивергенции /54/ аналогично классической теореме Лиувилля.

Перейдем теперь к геометрической теории гравитации. В геометрической теории гравитационное поле описывается тензорным полем g_{ab}, симметричным и невырожденным:

$$g_{ab} = g_{ba}\ , \qquad g = \det(g_{ab}) \neq 0. \qquad /60/$$

Этот главный геометрический объект окружает целая свита производных объектов:

1. Обратное тензорное поле g^{ab}, так что

$$g_{as}g^{sb} = \delta^b_a, \qquad /61/$$

где δ^b_a - единичный аффинор.

2. Антисимметричное по всем индексам тензорное поле $\epsilon_{a_1\dots a_N}$, определяющее меру объема многообразия, причем

$$\epsilon_{1\dots N} = \epsilon = \sqrt{|g|}. \qquad /62/$$

Вариация элемента объема dV равна

$$\delta dV = -\frac{1}{2}(g_{mn}\ \delta g^{mn})\,dV. \qquad /63/$$

3. Связность Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}g^{as}\,(\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}). \qquad /64/$$

Эта связность эквиаффинна. Для этой связности тензоры /16/ и /17/ равны нулю. Вариация связности /64/ равна

$$\delta\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}g^{as}\,(\nabla_m\delta g_{sn} + \nabla_n\delta g_{sm} - \nabla_s\delta g_{mn}). \qquad /65/$$

4. Тензор Римана - Кристоффеля, равный тензору кривизны /21/ для аффинной связности /64/.

5. Тензор Риччи, равный второй из сверток /25/ в случае, когда тензор кривизны равен тензору Римана - Кристоффеля.

6. Скаляр Гильберта

$$R = g^{ab}R_{ab}\ , \qquad /66/$$

где R_{ab} - тензор Риччи.

7. Тензор Эйнштейна

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2}R\,g_{mn}. \qquad /67/$$

В первом подходе к ГТГ действие гравитационного поля задается интегралом

$$H = \int R\,dV \qquad /68/$$

по области рассматриваемого многообразия. Согласно /63/ его вариация равна

$$\delta H = \int(G_{mn}\delta g^{mn} + g^{mn}\,\delta R_{mn})\,dV. \qquad /69/$$

По формуле /32/ для тензора Риччи получаем

$$g^{mn}\delta R_{mn} = \nabla_a F^a = \epsilon^{-1}\,\partial_a(\epsilon F^a)\ , \qquad /70/$$

где

$$F^a = g^{mn}\ \delta\Gamma^a_{mn} - g^{an}\,\delta\Gamma^m_{mn}\ . \qquad /71/$$

По теореме Гаусса интеграл от ковариантной дивергенции векторного поля преобразуется к интегралу по границе области. Поэтому из выражений /69/ в силу принципа минимальности действия следует, что гравитационное поле в вакууме подчиняется уравнению

$$G_{mn} = 0. \qquad /72/$$

В двух других подходах кроме главного объекта /60/ с его производными выступает независимый геометрический объект — симметричная аффинная связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ со своими производными объектами $\check{R}^a_{mnb}$, $\check{R}_{mn} = \check{R}^a_{amn}$ и $\check{\Omega}_{mn} = \check{R}^a_{mna}$.

Во втором подходе к ГТГ действие задается интегралом

$$P = \int\bar{R}\,dV, \qquad /73/$$

где

$$\bar{R} = g^{ab}\check{R}_{ab}. \qquad /74/$$

Вариация этого интеграла равна

$$\delta P = \int(\bar{G}_{mn}\delta g^{mn} + g^{mn}\,\delta\check{R}_{mn})\,dV, \qquad /75/$$

где

$$\bar{G}_{mn} = \frac{1}{2}(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} - \bar{R}g_{mn}). \qquad /76/$$

Согласно /32/

$$g^{mn}\,\delta\check{R}_{mn} = g^{mn}\,(\check{\nabla}_a\,\delta\check{\Gamma}^a_{mn} - \check{\nabla}_m\delta\check{\Gamma}_n). \qquad /77/$$

Это выражение нетрудно привести к виду

$$g^{mn}\,\delta\check{R}_{mn} = (\check{\varrho}_a - P_a)\,\bar{F}^a - \Psi^{mn}_a\delta\check{\Gamma}^a_{mn}, \qquad /78/$$

где $\bar{F}^a$ - аналогичное /71/ векторное поле

$$\bar{F}^a = g^{mn}\,\delta\check{\Gamma}^a_{mn} - g^{an}\,\delta\check{\Gamma}_n, \qquad /79/$$

а Ψ^{mn}_a - тензорное поле, равное

$$\Psi^{mn}_a = \Phi^{mn}_a - \delta^m_a\Phi^n. \qquad /80/$$

В свою очередь, тензорное поле Φ^{mn}_a равно

$$\Phi^{mn}_a = (\check{\nabla}_a - P_a)\,g^{mn} = g^{ms}P^n_{as} + g^{ns}P^m_{as} - P_a\,g^{mn}, \qquad /81/$$

а векторное поле Φ^n равно

$$\Phi^n = \Phi^{na}_a = g^{ab}P^n_{ab}. \qquad /82/$$

Наконец, ковекторное поле P_a равно

$$P_a = P^n_{an}. \qquad /83/$$

Далее, так как

$$(\check{\nabla}_a - P_a)\,\bar{F}^a = \nabla_a\bar{F}^a = \epsilon^{-1}\partial_a(\epsilon\,\bar{F}^a), \qquad /84/$$

то по теореме Гаусса это слагаемое в /75/ отбрасываем. Учитывая еще, что мы положили

$$\check{S}^a_{mn} = 0, \qquad /85/$$

записываем вариацию интеграла /73/ в виде

$$\delta P = \int(\bar{G}_{mn}\,\delta g^{mn} - \theta^{mn}_a\delta\check{\Gamma}^a_{mn})\,dV, \qquad /86/$$

где

$$\theta^{mn}_a = \frac{1}{2}(\Psi^{mn}_a + \Psi^{nm}_a) = \Phi^{mn}_a - \frac{1}{2}(\delta^m_a\,\Phi^n + \delta^n_a\,\Phi^m). \qquad /87/$$

Из вариационного принципа получаем уравнения

$$\bar{G}_{mn} = 0, \qquad \theta^{mn}_a = 0. \qquad /88/$$

Но из того, что тензор /87/ равен нулю, следует, что и свертка /82/ равна нулю, а значит, и тензор /81/ равен нулю. Далее, так как

$$g_{mn}\Phi^{mn}_a = (2-N)\,P_a, \qquad /89/$$

то из равенства нулю тензора /82/ следует, что при $N>2$ ковектор /83/ равен нулю, а значит, и тензор

$$\check{\nabla}_a g^{mn} = g^{ms}P^n_{as} + g^{ns}P^m_{as} \qquad /90/$$

равен нулю. Но в силу /60/ и /61/

$$\check{\nabla}_a g_{mn} = -g_{mr}g_{ns}\check{\nabla}_a g^{rs} = -P^s_{am}\,g_{sn} - P^s_{an}\,g_{ms}, \qquad /91/$$

так что вместе с тензором /90/ равен нулю и тензор /91/. Наконец, в рассматриваемом случае тензор аффинной деформации /26/ симметричен, а потому из /91/ следует, что он равен

$$P^a_{mn} = -\frac{1}{2}g^{ak}\,(\check{\nabla}_m g_{kn} + \check{\nabla}_n g_{km} - \check{\nabla}_k g_{mn}). \qquad /92/$$

Следовательно, если тензор /91/ равен нулю, то и тензор /92/ равен нулю, то есть

$$\check{\Gamma}^a_{mn} = \Gamma^a_{mn}. \qquad /93/$$

Таким образом, из уравнений /88/ следуют уравнения /72/, а это значит, что второй подход к ГТГ эквивалентен первому.

В третьем подходе к ГТГ действие задается интегралом

$$E = \int g^{mn}(P^a_{mb}P^b_{an} - P^a_{sa}P^s_{mn})\,dV, \qquad /94/$$

вариация которого равна

$$\delta E = \int[\theta_a^{mn}\,\delta\breve{\Gamma}^a_{mn} + (G_{mn} - \bar{G}_{mn})\,\delta g^{mn}]dV. \qquad /95/$$

Однако уравнения

$$\theta_a^{mn} = 0, \quad G_{mn} = \bar{G}_{mn}, \qquad /96/$$

неприемлемы, так как они дают лишь /93/. Поэтому выбираем только второе из уравнений /96/, а тензор /87/ называем тензором праэнергии гравитационного поля g_{ab} на фоне связности $\breve{\Gamma}^a_{mn}$.

Третий подход к ГТГ подробно рассмотрен в работах [7,8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Собр. науч. трудов, т.2. М.: Наука, 1966.
2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
3. Черников Н.А. Сообщение ОИЯИ Р2-86-207, Дубна, 1986.
4. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000.
5. Рашевская П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
6. Черников Н.А. - ДАН СССР, 1962, т.144, №1, с.89.
7. Черников Н.А. Сообщение ОИЯИ Р2-87-683, Дубна, 1987.
8. Черников Н.А. Препринт ОИЯИ Р2-88-27, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1988 года.

Черников Н.А.

Р2-88-778

Необходимый объект в ОТО - фоновая связность

Показано, что в эйнштейновой теории гравитации при введении понятия "псевдотензора энергии" гравитационного поля был потерян важный геометрический объект. Потерянный, а ныне найденный объект является аффинной связностью, на фоне которой должно рассматриваться гравитационное поле. Эта потеря привела ЭТГ к формальному противоречию с общим принципом относительности Эйнштейна. Чтобы снять противоречие, достаточно восстановить потерю в виде примитивной аффинной связности. Однако ничто не мешает нам считать, что фоновый объект является не примитивной, а произвольной аффинной связностью без кручения. При этом условии мы достаточно свободно можем варьировать как гравитационное поле g_{ab}, так и независимую от g_{ab} фоновую связность $\breve{\Gamma}^a_{mn}$. Благодаря восстановлению потерянного объекта ЭТГ становится вполне геометрической теорией, в которой все физические объекты выступают в качестве геометрических.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Chernikov N.A.

P2-88-778

Background Connection, a Necessary Object in General Relativity

It is shown that in Einstein's theory of gravity (ETG), an important geometrical object has been lost while introducing the concept of the energy pseudotensor of the gravitational field. This object found at present is the affine connection, on whose background the gravitational field should be considered. That loss made the ETG contradictory to Einstein's general principle of relativity. To remove the contradiction, it suffices to introduce a primitive affine connection. However, nothing prevents us from considering the background object being not primitive but an arbitrary affine connection without torsion. Under this condition we may rather easily vary both the gravitational field g_{ab} and the affine connection $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ independent of g_{ab}. Owing to restoration of the lost object, the ETG becomes a perfectly geometrical theory in which all physical objects are geometrical ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988