объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-773

А.Г.Бонч-Осмоловский

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС, МОДЕЛИ ФРИДМАНА И КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ. ВСЕЛЕННАЯ ОСЦИЛЛИРУЕТ?

Направлено в журнал
"Classical and Quantum Gravity"

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на призыв Эйнштейна исключить из уравнений тяготения введенную им же космологическую постоянную Λ (см., напр. [1]), в последнее время наблюдается все возрастающий интерес к проблеме Λ; по остроумному замечанию Я.Б.Зельдовича, джинна, выпущенного из бутылки, обратно загнать бывает трудно.

Этот интерес связан как с попытками соединить Λ с фундаментальными свойствами вакуума, так и привлекательностью ряда черт космологических моделей, учитывающих отличие Λ от нуля [2,3].

В настоящей работе дан анализ методов получения точных решений уравнений Эйнштейна при $\Lambda \neq 0$, описывающих однородную и изотропную космологическую модель, лежащую в основе современных представлений о структуре и развитии Вселенной; обсуждается также ряд следствий из предположения $\Lambda \neq 0$.

2. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ТОЛМЕНА-ОППЕНГЕЙМЕРА

В известной работе [4] Оппенгеймер и Снайдер нашли частный случай общего математического решения ОТО для пылевидной материи Толмена [1], причем в дальнейшем оказалось, что это решение правильно описывает все основные черты гравитационного коллапса массивного тела. Мы дадим обобщение методики работы [4] на случай $\Lambda \neq 0$ и покажем, к каким космологическим следствиям приводит полученное решение.

Записывая метрику в сопутствующей материи системе координат τ, R, θ, ϕ в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\mu} dR^2 - e^{\omega} d\Omega^2 , \qquad (1)$$

выпишем необходимые для дальнейшего уравнения тяготения в этой системе отсчета ($T_{00} = c^2 \rho$, остальные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю), штрихом обозначена производная по R, точкой – производная по $c\tau$:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{4} e^{-\mu} \omega'^2 - e^{-\omega} + \ddot{\omega} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 - \Lambda = 0 , \\
&-e^{-\mu} \left(\omega'' + \frac{3}{4} \omega'^2 - \frac{\mu' \omega'}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{\mu} \dot{\omega} + \frac{\dot{\omega}^2}{2}\right) + e^{-\omega} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho , \\
&2\dot{\omega}' + \dot{\omega} \omega' - \dot{\mu} \omega' = 0 .
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Используя интеграл Толмена третьего уравнения (2) $e^{\mu} = e^{\omega} \cdot \omega'^{2}/4f^{2}(R)$, где $f^{2}(R) > 0$ — произвольная функция R, из (2) получаем уравнение для $\omega(\tau, R)$:

$$\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^{2} - \Lambda - e^{-\omega}[f^{2}(R) - 1] = 0. \qquad (3)$$

Следуя Оппенгеймеру и Снайдеру, далее исследуем частный класс решений (2) при условии

$$f^{2}(R) = 1. \qquad (4)$$

Получающееся при этом однопараметрическое решение, зависящее в общем виде от одной произвольной функции, достаточно для анализа задачи об эволюции сферически-симметричного шара материи с заданной начальной плотностью и малыми начальными радиальными скоростями. Смысл условия (4) выяснится несколько позже.

Теперь уравнение (3) существенно упрощается:

$$\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^{2} - \Lambda = 0. \qquad (5)$$

Это уравнение решается (например, подстановкой $\omega = \frac{4}{3}\ln u$):

$$\Lambda > 0, \quad e^{\omega} = \left[A(R)\exp\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}\Lambda}\right) + B(R)\exp\left(-c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}\Lambda}\right)\right]^{4/3}. \qquad (6')$$

$$\Lambda < 0, \quad e^{\omega} = \left[\bar{A}(R)\sin\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}|\Lambda|}\right) + \bar{B}(R)\cos\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}|\Lambda|}\right)\right]^{4/3}. \qquad (6'')$$

При $c\tau\sqrt{|\Lambda|} \ll 1$ решения переходят в результат работы /4/:

$$r^{2} = e^{\omega} = (\bar{G} + Fc\tau)^{4/3}, \qquad (7)$$

$\bar{G}$, F — произвольные функции R. Поставив начальное условие: при $\tau = 0$ имеем однородный ($\rho = \text{const}$) шар радиуса R_0, можно определить функции $\bar{G}$, F и далее A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$.

Окончательный результат таков:

$$\Lambda > 0, \quad R \le R_0, \quad r^{2} = e^{\omega} = R^{2}\cdot a_{+}^{2}(\tau). \qquad (8)$$

$$\Lambda < 0, \quad R \le R_0, \quad r^{2} = e^{\omega} = R^{2} a_{-}^{2}(\tau). \qquad (9)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} a_{+}(\tau) &= \left[\mathrm{ch}\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}\Lambda}\right) \pm q^{1/2}\,\mathrm{sh}\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}\Lambda}\right)\right]^{2/3}, \quad \Lambda > 0, \\ a_{-}(\tau) &= \left[\cos\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}|\Lambda|}\right) \pm q^{1/2}\sin\left(c\tau\sqrt{\tfrac{3}{4}|\Lambda|}\right)\right]^{2/3}, \quad \Lambda < 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$q = \frac{3r_g}{|\Lambda|R_0^{2}}, \quad r_g = \frac{2MG}{c^{2}}, \qquad (11)$$

r — шварцшильдова радиальная координата. Для плотности материи из второго уравнения тяготения (2) получаем

$$\rho = \frac{c^{2}|\Lambda|(q-1)}{8\pi G a_{\pm}^{3}(\tau)}. \qquad (12)$$

Как уже отмечалось, соотношения (8), (9), (12) при $\tau \sim 0$ (точнее, $c\tau\sqrt{|\Lambda|} \ll 1$) переходят в решение Оппенгеймера-Снайдера, описывающее гравитационный коллапс (при выборе в (10) знака (—)):

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(\tau_0 - \tau)^{2}}, \quad r = R\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2/3}, \qquad (13)$$

$\tau_0 = \frac{2}{3c}\cdot\frac{R_0^{3/2}}{r_g^{1/2}}$ — время падения от $r = R_0$ до $r = 0$.

При $c\tau\sqrt{|\Lambda|} \gtrsim 1$ поведение решений (8) и (9) существенно различается.

<u>$\Lambda > 0$</u>:

Претерпев неограниченное сжатие в точку $r = 0$ согласно (13), достаточно массивное тело ($M > 2 \div 3M_{\odot}$) начинает <u>неограниченно</u> расширяться по закону (8), при $c\tau\sqrt{\Lambda} \gg 1$ экспоненциально быстро с постоянной Хаббла $H_{\infty} = c\sqrt{\Lambda/3}$. Это дает, например, при $H_{\infty} \sim 50$ км/сМпс $\Lambda \sim 10^{-56}$ см$^{-2}$.

<u>$\Lambda < 0$</u>:

Закон (9) формально-математически (т.к. нет теории сингулярного состояния) описывает после коллапса в точку $\tau = \tau_0$ ($r = 0$) периодическое сжатие и расширение материи, т.е. пульсирующую (осциллирующую) Вселенную, поскольку сингулярности решения возникают не только при $\tau = \tau_o$, но и в моменты собственного времени

$$\tau_m = \frac{\pi m}{c\sqrt{\frac{3}{4}|\Lambda|}} \pm \tau_o\ , \quad m = 1, 2, \dots \ . \tag{14}$$

В этих точках структура сингулярностей имеет универсальный характер ньютонова вида (13):

$$\rho(\tau)\big|_{\tau \simeq \tau_m} \simeq \frac{1}{6\pi G(\tau - \tau_m)^2}\ . \tag{15}$$

Теперь можно получить оценку $|\Lambda|$: поскольку в моменты максимального расширения в лабораторной системе — системе отсчета Шварцшильда — радиус шара

$$r_{\text{макс}} = R_o q^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{3r_g}{|\Lambda|}}\ , \tag{16}$$

то, приняв $M = 10^{56}$ г, $r_{\text{макс}} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{28}$ см, получаем

$$|\Lambda| \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-56}\ \text{см}^{-2} \tag{17}$$

и период осцилляции Вселенной

$$T = \frac{\pi}{c\sqrt{\frac{3}{4}|\Lambda|}} \simeq 3{,}3 \cdot 10^{10}\ \text{лет}\ . \tag{18}$$

Метрика внутри материи ($R \le R_0$) имеет вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a_\pm^2(\tau)\,[dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)]\ . \tag{19}$$

Метрика (19) описывает плоское пространство, т.е. любое сечение $\tau = \text{const}$ 4-пространства-времени обладает евклидовой геометрией.

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕТОДА ТОЛМЕНА-ОППЕНГЕЙМЕРА И МЕТОДА ФРИДМАНА

Теперь покажем, что приведенные выше результаты, полученные по методике Толмена-Оппенгеймера, содержатся в пространственно-плоской модели Фридмана.

Уравнение Фридмана для масштабного фактора ("радиуса Мира") $a(\tau)$ имеет вид (например, /5/):

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \left(\rho + \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}\right) - kc^2\ , \tag{20}$$

k — параметр кривизны пространства.

Положим $k = 0$ — плоское (евклидово) пространство, тогда интегрирование (20)* дает (пусть $\Lambda < 0$):

$$c\tau\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} = \int_{a_o}^{a} \frac{\sqrt{a}\, da}{\sqrt{3r_g/|\Lambda| - a^3}}\ . \tag{21}$$

Считая, что $a^3 < \frac{3r_g}{|\Lambda|}$, сделаем подстановку $x^2 = \frac{3r_g}{|\Lambda|} - a^3$, тогда оказывается, что интеграл в (21) выражается в элементарных функциях:

$$c\tau\sqrt{\frac{3|\Lambda|}{4}} = \arcsin\frac{\sqrt{3r_g/|\Lambda| - a^3}}{\sqrt{3r_g/|\Lambda|}} - \arcsin\frac{\sqrt{3r_g/|\Lambda| - a_o^3}}{\sqrt{3r_g/|\Lambda|}}\ . \tag{22}$$

Теперь, если считать, что $a_o^3 \ll \frac{3r_g}{|\Lambda|}$, то (22) дает результат

$$a = \left(\frac{3r_g}{|\Lambda|}\right)^{1/3} \cdot \sin^{2/3}\left(c\tau\sqrt{\frac{3|\Lambda|}{4}}\right)\ . \tag{23}$$

Предположение о том, что и $a^3 \ll \frac{3r_g}{|\Lambda|}$, ведет к другой зависимости $a(\tau)$:

$$a = a_o\left(1 - \frac{\tau}{\tau_o}\right)^{2/3}, \quad \tau_o = \frac{2}{3c}\,\frac{a_o^{3/2}}{r_g^{1/2}}\ . \tag{24}$$

Если в (9) положить $R = R_o$ и считать, что $q \gg 1$, то (9) и (23) совпадут.

Можно показать, что при $k = 0$ уравнение (20) следует из формул (8), (9).

Формула (24)* совпадает с результатом Оппенгеймера-Снайдера для гравитационного коллапса (7), но теперь видно, что она справедлива при $a \ll \sqrt[3]{\frac{3r_g}{|\Lambda|}}$.

Таким образом, метод Оппенгеймера-Снайдера аналитически эквивалентен методу Фридмана, условие Оппенгеймера-Снайдера $f^2 = 1$ (4) и начальное условие $\rho = \mathrm{const}$, $R \leq R_0$ означают, что внутри вещества выбирается случай плоского пространства ($k = 0$ в общем метрическом элементе Робертсона-Уокера). Формула (24) показывает, что при условии ограниченного изменения a в методе Фридмана содержится и математическое описание гравитационного коллапса в сопутствующей системе отсчета. Аналогично можно показать, что при $\Lambda > 0$, $k = 0$ уравнение (20) имеет решением формулу (8).

Отметим, что Фридман первый использовал для решения уравнений Эйнштейна сопутствующие материи координаты (иногда называемые координатами Толмена); не удивительно, что одни и те же уравнения в одной системе координат дают математически эквивалентные результаты при использовании различных методов их решения.

Фридман не знал, что в его результатах фактически содержится решение задачи о гравитационном коллапсе массивного тела; в равной мере Оппенгеймер и Снайдер не увидели космологических следствий своего решения.

Итак, оба метода точного решения уравнений Эйнштейна для изотропной и однородной пылевидной материи приводят к начальной сингулярности ($r = 0$, $\tau = \tau_0$, $\rho = \infty$), а при $\Lambda < 0$ – к неограниченной последовательности сингулярностей при $\tau = \tau_m = \frac{\pi m}{c\sqrt{3/4|\Lambda|}} \pm \epsilon_0$, $m = 1, 2, \ldots$ Структура этих сингулярностей имеет один и тот же универсальный характер $\rho \sim 1/(\tau - \tau_m)^2$, описывающий как коллапс материи в точку $r = 0$ (при $\tau \leq \tau_m$), так и последующее ее расширение из сингулярности (при $\tau > \tau_m$)**. Иными словами, за коллапсом, по-видимому, всегда следует расширение из сингулярности и, наоборот, расширению, например, Вселенной предшествует коллапс. Этот пункт подробнее обсудим позже, сейчас подчеркнем, что теория горячего рождения Вселенной и объяснение экспериментального факта существования реликтового космического микроволнового излучения невозможны без признания неограниченного коллапса, в конце которого достигаются экстремально высокие значения плотности и температуры материи, т.е. образование "горнила", через которое обязательно проходит материя в процессе своего развития прежде, чем начать расширяться. Теории, отрицающие неограниченный коллапс (см. обсуждение

**Результат (24) следует и при $k = \pm 1$, но с другим τ_0: $\tau_0 = \frac{2}{3c}\frac{a_0^{3/2}}{\bar r_g^{1/2}}$, $\bar r_g = \frac{2}{3\pi} r_g$.*

***Естественно, непрерывный переход через $r = 0$ классическая ОТО описать не может, это дело будущей квантовой теории гравитации.*

и ссылки в /6/), противоречат экспериментальным фактам, в частности, существованию реликтового излучения.

4. НЕКОТОРЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ $\Lambda \neq 0$

Введение Λ не изменяет факта существования сингулярностей и характера поведения материи в их окрестности, в том числе неограниченного коллапса. Тем не менее, $\Lambda \neq 0$ может заметно изменить картину развития Мира в долговременных, космологических масштабах. Для плоского Мира ($k = 0$) эти изменения легко просматриваются на основе формул, приведенных выше. Что касается искривленного Мира ($k = \pm 1$) в моделях Фридмана, то соответствующий анализ влияния Λ весьма громоздок вследствие того, что интегралы уравнения (20) выражаются лишь в эллиптических функциях. Качественный анализ можно найти в книгах /5,7/.

Ниже будет проведен анализ влияния $\Lambda \neq 0$ в несколько другой форме с тем, чтобы получить конкретные параметры, интересующие нас. В основу этого анализа положим уравнение (20) при $k = \pm 1$, которое запишем в иной форме:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{\bar r_g}{a} \mp 1 + \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad \bar r_g = \frac{4MG}{3\pi c^2} \tag{25}$$

или в эквивалентном виде, вводя постоянную Хаббла $H \equiv \frac{da}{a\,d\tau}$:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{c^2\Lambda}{3} \mp \frac{c^2}{a^2}. \tag{26}$$

Далее, принимаем следующие значения основных, опорных параметров /2,3,5/:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Масса вещества во Вселенной } M = 10^{56}\ \text{г.}\\
\text{Постоянная Хаббла в настоящий момент}\\
H_\tau = 75\ \text{км/сМпс} = 2{,}43\cdot 10^{-18}\ \text{с}^{-1}.\\
\text{Иногда будем задавать плотность вещества во Вселенной в данный}\\
\text{момент } \rho_\tau = 2\cdot 10^{-30}\ \text{г/см}^3 \text{ и}\\
|\Lambda| = 1{,}5\cdot 10^{-56}\ \text{см}^{-2}.
\end{array}\right\} \tag{27}$$

В качестве результата анализа будем интересоваться значениями следующих величин:

$$\Omega = \frac{\rho_\tau}{\rho_{\text{кр}}} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2},$$

$\tau_в$ – время, протекшее с момента $\tau = \tau_0$ (начальная сингулярность, "Большой Взрыв") или возраст Вселенной, $\bar a = \frac{a_\tau}{r_g}$ – отношение "радиуса Мира", в данный момент к величине r_g –" гравитационному радиусу Вселенной", $r_g = 2MG/c^2 = 1{,}48 \cdot 10^{28}$ см. В качестве примера рассмотрим анализ случая открытого (гиперболического) Мира $k = -1$, $\Lambda > 0$.

Уравнение (25) приводит к ограничению $\frac{\Lambda a^2}{3} + \frac{\bar{r}_g}{a} + 1 \geq 0$. Ясно, что это условие всегда выполняется, т.е. и при $\Lambda > 0$ Мир неограниченно расширяется, при больших временах – по экспоненте $a \sim \exp(c\tau\sqrt{\Lambda/3})$. Соотношение (26) (знак +) при заданных параметрах (27) дает ограничение на Λ:

$$\Lambda < 2 \cdot 10^{-56}\ \text{см}^{-2}. \tag{28}$$

При значениях Λ, удовлетворяющих (28), происходит увеличение $\tau_в$ и a_τ и, соответственно, уменьшение ρ_τ по сравнению с исходной моделью $k = -1$, $\Lambda = 0$.

Аналогично можно проанализировать все 9 случаев, результаты для удобства сведем в таблицу.

Таблица

Геометрия пространства	$\Lambda = 0$	$\Lambda > 0$	$\Lambda < 0$
плоский Мир $k = 0$	F_1 неогранич. расширение $a_\tau \sim \tau^{2/3}$ $\bar{a} \simeq 0{,}9$ $\tau_в \simeq 9 \cdot 10^9$ лет $\rho = \rho_{кр} = 10^{-29}$ г/см^3 $(\Omega = 1)$	F_2 неогранич. расширение $a_\tau \sim \mathrm{sh}^{2/3}(c\tau\sqrt{\Lambda/3})$ $\tau_в \simeq 14 \cdot 10^9$ лет $\Omega \simeq 0{,}2$, $\bar{a} \simeq 1{,}54$	F_3 осцилляции $\rho > \rho_{кр}$ $(\Omega > 1)$
замкнутый Мир $k = +1$	C_1 осцилляции $\Omega > 1$ $\tau_в < \frac{T}{2} = 5 \cdot 10^9$ лет	C_2 осцилляции $\Omega > 1$ $\tau_в < 5 \cdot 10^9$ лет	C_3 осцилляции $\Omega \gg 1$
открытый Мир $k = -1$	O_1 неогранич. расширение $a_\tau \sim \tau\ (a > \bar{r}_g)$ $\bar{a} = 0{,}92$ $\tau_в \simeq 11 \cdot 10^9$ лет $\Omega = 0{,}2$	O_2 неогранич. расширение $c\tau\sqrt{\Lambda} \gg 1$, $a_\tau \sim \exp(c\tau\sqrt{\Lambda})$ $\bar{a} = 1{,}8$ $\Omega = 0{,}03$, $\tau_в = 17 \cdot 10^9$ лет	O_3 осцилляции $a_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{28}$ см $(\bar{a} < 1{,}1)$ $\Omega_{min} = 0{,}13$ $\tau_в < T/2 \simeq$ $\simeq (1{,}5 \div 2) \cdot 10^{10}$ лет

Прежде всего обратим внимание на несоответствие современным наблюдаемым данным всех трех вариантов замкнутого Мира не только с точки зрения очень большой плотности материи, но и малых значений $T/2$, a_τ. То же относится и к случаю F_3 плоского Мира.

Введение $\Lambda > 0$ заметно улучшает параметры плоского Мира, вариант F_2 близок к оптимальному описанию расширяющейся Вселенной (с евклидовой пространственной геометрией).

Отрицательная $\Lambda \sim 10^{-56}$ см$^{-2}$ превращает неограниченно расширяющийся Мир в осциллирующий с периодом в десятки миллиардов лет и малой плотностью ($\Omega \simeq 0{,}1$).

Внимательное изучение получающихся параметров приводит к заключению, что размер расширяющегося шара материи во всех случаях F и O по порядку величины равен r_g. Это обстоятельство, а также отмеченная выше связь коллапса с фазой расширения приводит к гипотезе о том, что на самом деле Вселенная является осциллирующей (пульсирующей) и в моделях F_1, F_2, O_1 и O_2 плоского и открытого Мира, т.е. это качество присуще Вселенной вообще.

Представим себе шар холодной пылевидной материи, размер которой по ряду причин превысил его гравитационный радиус r_g. Тогда может включиться процесс коллапса по Оппенгеймеру-Снайдеру ($M \gg M_\odot$), который за время порядка $\tau_k \sim r_g/c \sim 15 \cdot 10^9$ лет сожмет шар в точку с достижением плотности и температуры порядка планковских ("Большой Взрыв"). Далее заново рожденная (обновленная) материя начнет расширяться с постепенным охлаждением, образованием галактик, звезд, планет, жизни и т.д. По истечении времени того же порядка $15 \cdot 10^9$ лет снова охлажденная материя достигнет размера порядка; $\gtrsim r_g$, и цикл повторится.

В некотором смысле можно сказать, что сингулярность и связанный с ней неограниченный коллапс – эта величайшая загадка Природы – есть движитель Вселенной, без нее нет развития и глобального движения материи. Неизменность циклов обеспечивается, если в сингулярности энтропия обращается в нуль: $S|_{\tau = \tau_m} = 0$.

При такой гипотезе, обоснование которой, с точки зрения перехода от расширения к сжатию на стадии $a > r_g$, требует отдельного исследования, нет необходимости во введении так называемого антигравитирующего вакуума $\Lambda < 0$ для описания естественной с общефизической точки зрения и эстетически красивой картины вечно обновляющейся Вселенной.

Автор благодарит Р.А.Асанова за обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.*
2. *Peebles P.Y.E. – Astrophys. Jour., 1984, v.284, p.439.*
3. *Weiss N., Vancouver, B.S., Canada, May 1987.*

4. *Oppenheimer R., Snyder H. — Phys. Rev., 1939, v.56, p.455.*
5. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.*
6. *Зельдович Я.Б., Грищук Л.П. — УФН, 1988, т.155, вып. 3, с.517.*
7. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, т.2. М.: Мир, 1977.*

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1988 года.