

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Д 20

P2-88-769

Я.З.Дарбаидзе*, З.В.Меребашвили*,
В.А.Ростовцев

НЕКОТОРЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТОВ
ЭКСКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ
С ПОМОЩЬЮ REDUCE-3

Направлено в журнал "Fortschritte der Physik"

* Институт физики высоких энергий ТГУ, Тбилиси

1988

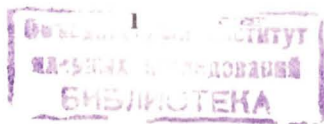
§ I. Введение

Изучение эксклюзивных процессов^{/1/} имеет важное значение для получения полной информации из процессов рассеяния высокоэнергетических частиц. В моделях квантовой теории поля для подобных расчётов в высших порядках теории возмущений (ТВ) необходимо привлечь методы компьютерной алгебры и основанные на них системы аналитических вычислений (САВ)^{/2/}.

За последние десять лет накопилось много ярких примеров удачного использования САВ SCHOONSCHIP^{/7/} и REDUCE-2^{/8/} в расчётах высших порядков ТВ^{/3-6/}. Эти системы хорошо приспособлены к вычислениям по физике высоких энергий, но особенного усовершенствования достигла система REDUCE-3^{/9/}. Своей универсальностью эта система обязана базовому языку программирования ЛИСП^{/10/}, хорошо известному в теории искусственного интеллекта ЭВМ^{/11/}, в последнее время она подвергается интенсивному развитию в исследованиях пользователей (см., например, ^{/12-14/}).

С целью иллюстрации некоторых возможностей системы REDUCE-3 мы хотели бы привести ниже пример расчета калибровочно-инвариантного набора диаграмм Фейнмана в эксклюзивных (2→3) процессах рассеяния партонов в моделях суперсимметричной квантовой хромодинамики (СКХД)^{/15/}. Некоторые полезные советы для расчёта древесных диаграмм в КХД имеются в ^{/16/}. Отметим, что уже в α^3 порядке ТВ суммирование квадратов амплитуд калибровочно-инвариантного набора (т.е. математически - рациональных полиномов от 5 независимых переменных) в КХД и СКХД сводится к огромному выражению, но благодаря физическим закономерностям изучаемых процессов происходит сокращение большого числа общих множителей и факторизация окончательного результата (см. работу Берендса и др.^{/6/}). Важно подчеркнуть, что при использовании машинной аналитики факторизация является строгим и основным критерием правильности получаемого ответа, и поскольку мелкие технические ошибки могут привести к катастрофически большим нефакторизуемым выражениям, весьма желательно исключить ручной труд. В связи с этим желательно, например, модифицировать и включить в блок физики высоких энергий программу генерации диаграмм^{/18/}, алгоритм расчёта групповых факторов^{/19/} и т.д. Такая автоматизация особенно необходима для получения разумных результатов с помощью САВ в α^4 и более высоких порядках ТВ.

С другой стороны, во многих работах ухитряются обойти эту проблему так, чтобы можно было выполнить расчёты вручную (см., например, ^{/20/}). Однако в таких случаях трудно избежать появления ошибок хотя бы



в коэффициентах, и, вообще говоря, соответствующие результаты всегда нуждаются в согласовании с точными выражениями некоторых базисных процессов, полученными с помощью САВ^{/17/}. Из-за отсутствия полной автоматизации могли быть неверными, например, результаты работы^{/22/}, которые вопреки обещаниям нигде не приводятся.

САВ REDUCE позволяет решать разнообразные задачи. Например, с её помощью легко проверить калибровочную инвариантность предлагаемого набора диаграмм^{/23/}, можно работать с некоммутирующими переменными, например, в суперсимметричных теориях^{/24/} и т.д. В этом направлении нам кажутся полезными примеры, приведённые в §§ 3 и 4.

В последних версиях REDUCE-3^{/9/} имеется возможность вычислять неопределённые^{/2, 12/} и определённые^{/25/} интегралы от широкого класса алгебраических функций. Однако до сих пор интегрирование квадрата матричного элемента удается проводить в виде табличных подстановок, возвращаясь тем самым к алгоритмам^{/26, 27/}, использованным в программе SCHOONSCHIP^{/11/}. Именно так в § 3 проводится интегрирование однопетлевых графов с реальным и виртуальным глюонами по алгоритму, впервые приведённому в^{/27/}.

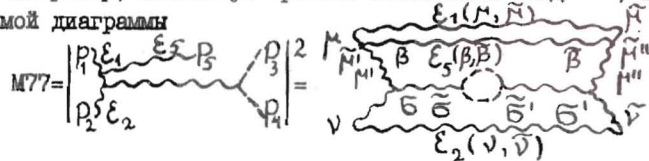
В обеих системах встроены алгоритмы^{/28/} алгебры γ -матриц Дирака (операции приведения и вычисления следа). Однако, чтобы показать, насколько естественно работать, например, с явным представлением γ -матриц или с антикоммутирующими майорановскими спинорами, в § 4 приводится доказательство хорошо известного суперсимметричного соотношения^{/29/}.

§ 2. Суммирование квадратов калибровочно-инвариантного набора диаграмм. Факторизация

С целью иллюстрации рассмотрим полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм в СКХД для процесса глюон(P1) + глюон(P2) → кварк(P3) + антикварк(P4) + глюон(P5=K) (рис. 1), где все партоны считаются безмассовыми. При квадрировании возникает 320 графов (плюс квадраты с лучами Фадеева-Попова), которые предстоит суммировать (а также усреднять по спиновым и цветовым состояниям):

$$|M|_{\alpha\beta}^2 = \sum_{i=1}^{25} M_i^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{25} M_i^* M_j^+ \quad (1)$$

Например, используя правила Фейнмана в СКХД^{/17/}, для квадрата седьмой диаграммы



получаем выражение

$$M77 = \langle \text{color} \rangle (P3-P4) g (P3-P4) g_i PR(M', \tilde{M}', P1-P5) PR(M'', \tilde{M}'', P1-P5) \times \\ PR(\beta, \tilde{\beta}, P3+P4) PR(\beta', \tilde{\beta}', P3+P4) \epsilon_1(M, \tilde{M}) \epsilon_2(\nu, \tilde{\nu}) \epsilon_5(\beta, \tilde{\beta}) \times \\ C3(M', \nu, \beta, P1-P5, P2, -P3-P4) C3(M'', \tilde{\nu}, \beta', P1-P5, P2, -P3-P4) \times \quad (2) \\ C3(M, \tilde{M}, \beta, P1, -P1+P5, -P5) C3(\tilde{M}, \tilde{M}', \tilde{\beta}, P1, -P1+P5, -P5),$$

где C3 - трёхглюонная вершина

$$C3(\alpha, \beta, \gamma, K1, K2, K3) = g^{\alpha\beta} (K1-K2)^\gamma + g^{\beta\gamma} (K2-K3)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (K3-K1)^\beta, \quad (3)$$

$\epsilon_i(\alpha, \tilde{\alpha}) = \sum_{\text{спин}} \epsilon_i^\alpha \epsilon_i^{*\tilde{\alpha}}$ - поляризационный оператор,

$$\epsilon_i(\alpha, \tilde{\alpha}) = -g^{\alpha\tilde{\alpha}} + (P_i^\alpha n^{\tilde{\alpha}} + P_i^{\tilde{\alpha}} n^\alpha) / (n \cdot P_i) \quad (4)$$

и PR - глюонный пропагатор

$$PR(\alpha, \tilde{\alpha}, K) = \frac{1}{K^2} \epsilon_K(\alpha, \tilde{\alpha}). \quad (5)$$

Заметим, что произвольной ($n^2 \neq 0$) аксиальной калибровкой пользоваться нежелательно из-за громоздких промежуточных выкладок. Не очень удобно также работать в ($n=0$) фейнмановской калибровке из-за возникающих в ней дивергенций. Поэтому, как видно из формул (4) и (5), мы предпочли^{/15a, 17/} светоподобную калибровку ($n^2=0$) с калибровочным вектором, направленным вдоль одного из 5 заданных импульсов (например, $n=P3$). Напомним также, что с помощью САВ в первоначальных работах О.В.Тарасова и др.^{/6/} была показана конечность $N=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и впоследствии она была получена во всех порядках ТВ благодаря светоподобной калибровке^{/30/}. В связи с этим интерес к ней в последние годы значительно усилился^{/31/}. Ясно, САВ позволяют, в принципе, прибегать к любой калибровке, если в формулах типа (2) и (3) заранее не сделаны частные упрощения, а величины (4) и (5) заданы в общем виде с помощью команды LET.

Переход от фейнмановской калибровки к светоподобной в квадратах диаграмм на рис.1 привёл к удивительному, на первый взгляд, результату: занулились 242 графа из-за того, что они содержали равные нулю в этой калибровке множители:

$$(2P3+P_i)^\mu \epsilon_i(M, \tilde{M}) = 0,$$

$$K(\alpha, \beta, \gamma, \delta) PR(\beta, P3-P4, P3+P4) \epsilon_1(\alpha, \tilde{\alpha}) \epsilon_2(\gamma, \tilde{\gamma}) \epsilon_5(\delta, \tilde{\delta}) = 0,$$

где $K(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}$, $(\alpha, \gamma, \delta) \leftrightarrow \beta$.

Нетрудно показать, что эти соотношения эквивалентны калибровочным условиям ($n \cdot \epsilon_i = 0$), $(P_i \cdot \epsilon_i) = 0$ и занулению 13 диаграмм на рис.1.

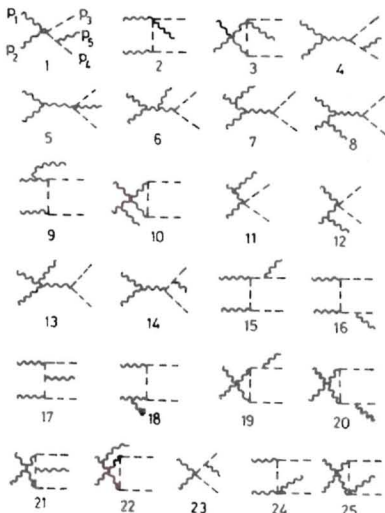


Рис. I

Что касается усреднённых групповых коэффициентов (обозначим в данном примере $C(7) = \langle \text{colour} \rangle$), их в α^3 порядке ТВ нетрудно посчитать. Однако в более высоких порядках с целью надёжности желательнее пользоваться программой COLOR /19/, представляющей собой реализацию алгоритма Квитановича для вычисления групповых факторов в неабелевых калибровочных теориях с группой $SU(N)$. Кроме того, вообще говоря, если коэффициент $C(7)$ равнялся бы нулю, то следовало бы пренебречь счёт других частей диаграмм командой

```
M77 := IF C(7)=0 THEN 0 ELSE ...
Иначе система на  $C(7)=0$  перемножает в последнюю очередь и при большом
```

числе квадратов такие случаи приведут к бессмысленной трате машинного времени. Например, в светоподобной калибровке у нас остались 78 графов и 21 из них занулятся из-за усреднения по групповым индексам.

Важно подчеркнуть также необходимость предварительной классификации всех возникающих групповых коэффициентов с целью определения их через независимые генераторы. Такой способ разбиения всего комплекта квадратов облегчает промежуточные вычисления, как и комбинированный метод спиральных амплитуд и суперсимметричных трюков Парке и Тейлора /20/. Например, в рассмотренном нами случае выделяются 3 независимых групповых фактора и существуют 3 варианта разбиения имеющихся 57 слагаемых. В самом простом варианте в комплекте остаётся лишь 6 квадратов, получаемых из первых трех амплитуд на рис. I. В результате после суммирования и факторизации полученные ответы для каждого независимого генератора группы будут содержать общим множителем "обобщённое" борновское сечение (см. ниже). Здесь уместно вспомнить, что в квадратах независимых спиральных амплитуд общим является инфракрасный (ИК) фактор, что особо подчёркивается, например, в упомянутой выше работе /20/. Замечательно, что ИК-фактор полностью воспроизводится при суммировании ответов с независимыми генераторами, аналогично тому, как при сложении квадратов спиральных амплитуд воспроизводится "обобщённое" борновское сечение. В этом отношении наш метод эквивалентен другим, хотя до сих пор мы не видим той физики, которая позволила бы

нам из простых промежуточных расчётов воспроизвести полный ответ. Другими словами, мы пока не видим какой-либо симметрии между наборами диаграмм при независимых цветовых факторах. При таком переборе диаграмм $C(7)=0$ в двух случаях аналогично тому, что говорилось выше, приходится употреблять IF...THEN..., поскольку подходящая для подобных манипуляций операция блока BEGIN не проходит. В ней невозможно определить немые индексы суммирования описателем INDEX.

Перейдём к разбору программы. Вначале мы определяем векторы и индексы, а также импульсы и их массы:

```
INDEX A1,A2,A3,A4;
VECTOR B1,B2,B3,B4,B5,B6;
MASS P1=0,P2=0,P3=0,P4=0,P5=0;
MSHELL P1,P2,P3,P4,P5;
```

Потом мы определяем функции (3), (4) и (5) от произвольных векторов:

```
FOR ALL B1,B2,B3 LET PR(B1,B2,B3)=1/B3.B3*(-B1.B2+
(B3.B1*P3,B2+B3.B2*P3.B1)/B3.P3);
FOR ALL B1,B2,B3,B4,B5,B6 LET C3(B1,B2,B3,B4,B5,B6)=
B1.B2*(B4.B3-B5.B3)+B2.B3*(B5.B1-B6.B1)+B3.B1*(B6.B2-B4.B2);
FOR ALL B1,B2 LET E1(B1,B2)=-B1.B2+
(P1.B1*P3.B2+P1.B2*P3.B1)/P1.P3, E2(B1,B2)=-B1.B2+(P2.B1*P3.B2+
P2.B2*P3.B1)/P2.P3, E5(B1,B2)=-B1.B2+(P5.B1*P3.B2+P5.B2*P3.B1)/P5.P3;
```

Вычисление формулы (2) выполняется в несколько шагов с использованием FOR ALL ... SAVEAS. Такое разбиение вызвано ограничением на число спариваемых индексов. Один из вариантов такой программы имеет вид

```
PR(A3,P3-P4,P3+P4)*PR(A4,P3-P4,P3+P4)*
E2(A1,A2)*C3(B1,A1,A3,P1-P5,P2,-P3-P4)*
C3(B2,A2,A4,P1-P5,P2,-P3-P4);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M71(B1,B2);
E1(A1,A3)*E5(A2,A4)*C3(A1,B1,A2,P1,-P1+P5,-P5)*
C3(A3,B2,A4,P1,-P1+P5,-P5);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M72(B1,B2);
M72(A1,A2)*PR(A1,B1,P1-P5)*PR(A2,B2,P1-P5);
FOR ALL B1,B2 SAVEAS M73(B1,B2);
FOR ALL B1,B2 CLEAR M72(B1,B2);
M77:=M71(A1,A2)*M73(A1,A2);
FOR ALL B1,B2 CLEAR M71(B1,B2), M73(B1,B2);
```


Аналогично можно посчитать и другие графы и одновременно суммировать, уничтожая при этом ненужные выражения командой CLEAR:

```
M(8):=M77+M88$ CLEAR M77,M88;...;M(9):=M(8)+M99;...
```

Чтобы иметь представление об используемых машинных ресурсах, скажем, что, например, M77, M88 в светоподобной калибровке на ЕС I06I ЛВТА ОИИИ считались при 5 Мбайт памяти и одновременный счёт всех 57 диаграмм со всеми нужными подстановками и факторизацией требовал около 1 часа. Требуемая память при отдельном счете каждой диаграммы зависит от её сложности и варьируется в пределах 1-5 Мбайт.

Следует помнить, что нецелесообразно записывать на внешние файлы длинные суммы (на несколько десятков страниц), поскольку при их повторном чтении с помощью команды IN тратится много времени. Сохранить небольшие (на несколько страниц) полиномы можно так:

```
//A DD DSN=SUM(A),DISP=SHR
.....
OFF NAT; LINELENGTH(70);...; OUT A; SUM:=SUM; SHUT A;
```

Кроме того, при манипуляциях с большими многочленами максимально надо использовать флаг OFF ECHO или знак \$, запрещающие их вывод. Например, у нас на внешних файлах были сохранены 57 посчитанных диаграмм и впоследствии их суммировали:

```
SM:=FOR I:=1:57 SUM M(I)$ CLEAR M; N:=NUM(SM)$ D:=DEN(SM);CLEAR SM;
```

Прежде чем факторизовать числитель N этой суммы, необходимо исключить все зависимые переменные (из 10 скалярных произведений оставлять 5 независимых), но какие именно из оставшихся переменных приведут к факторизации, заранее не определено. В частности, можно их задать в следующем порядке:

```
LET U=-(S+S1+T1+T2+U1), P4.P5=-(U+S1+T2)/2, P3.P5=-(T1+U1+S1)/2,
P2.P5=(S+U1+T2)/2, P1.P5=(S+T1+U)/2,
P1.P2=S/2, P3.P4=S1/2, P1.P3=-T1/2, P1.P4=-U/2,
P2.P3=-U1/2, P2.P4=-T2/2; N:=N$
```

Наконец, при отсутствии ошибок во время генерации полного калибровочно-инвариантного набора диаграмм, либо при счете групповых факторов, или при написании квадратов по правилам Фейнмана мы получим в "упакованном" виде ответ с помощью операторов:

```
ARRAY V(15); J:=FACTORIZE(N,V);
FOR I:=0:J DO WRITE V(I):=V(I);
ON FACTOR; D:=D; OFF FACTOR; OFF EXP;
ANS:=FOR I:=0:J PRODUCT V(I)/D;
```

Если еще слегка видоизменить его /156,17/, то получим формулу (I)

в виде инфракрасно-сингулярных "эйконольных" слагаемых $[ij] = \frac{(P_i \cdot P_j)}{(P_i \cdot K)(P_j \cdot K)}$:

$$|M|_{\alpha^2}^2 = (g^2/32) |M^0|_{\alpha^2}^2 \cdot I(S, S1, T1, T2, U, U1), \quad (6)$$

где I и $|M^0|_{\alpha^2}^2$ - инфракрасный и "обобщенный" борновский факторы соответственно:

$$|M^0|_{\alpha^2}^2 = (2g^4/9) [(S+T1+U1)^2(S1+T1+U1)^2 + U^2T1^2 + U1^2T2^2] / (U \cdot T1 \cdot U1 \cdot T2),$$

$$I(S, \dots) = \{ [34] + 9([34] - [13] - [14] - [23] - [24] - (T1 \cdot T2 + U \cdot U1) / (S \cdot S1) \{34\}) + 81(S \cdot S1) \{ ([12] + [14] + [23]) T1 \cdot T2 + ([12] + [13] + [24]) U \cdot U1 \} \}.$$

Прежде чем сделать выводы, нам хочется выразить надежду на возможность обобщения рассмотренной программы для расчётов (2 → 1), когда n=4. Ясно, что камнем преткновения на этом пути является ограниченность ресурсов ЭВМ. Например, при рассмотрении процесса $\Phi\Phi \rightarrow \Phi\Phi\Phi\Phi$ при 9 Мбайт вычисление прерывалось из-за нехватки памяти на последней подстановке P12=P15-P45+P14-P35-P34+P13+P25+P24+P23. Здесь Pij = (Pi · Pj).

На основе проделанных здесь и ранее /15,17/ вычислений можно сделать следующие выводы:

- аналитические расчёты эксклюзивных процессов на ЭВМ в высших порядках ТВ являются математически необходимым способом для получения имеющих физический смысл результатов,

- при этом требуются следующие символичные манипуляции: 1) генерация калибровочно-инвариантного набора диаграмм Фейнмана, 2) квадрирование этого набора ^{*}, 3) анализ и расчёт соответствующих групповых факторов, 4) суммирование квадрированных диаграмм, факторизация числителя полученного ответа с целью сокращения лишних степеней пропагаторов в знаменателе, а также нефизических пропагаторов с аксиальным вектором, 5) дальнейшее интегрирование для получения радиационных поправок и других физических характеристик,

- существующие пользовательские программы совместно с имеющимися САВ пока не позволяют полностью исключить ручной труд, что является основной помехой при вычислении физических характеристик для эксклюзивных процессов в высших порядках ТВ. Особенно необходимыми, по нашему мнению, являются расчёты /22/ для физически наблюдаемых процессов, подчиняющихся "правилам кваркового счёта" /21/.

§ 3. Интегрирование по мягким реальным и виртуальным глюонам

Ситуация с интегрированием квадратов матричных элементов с помощью САВ хорошо изложена в работе /26/, где говорится о сравнении возможностей систем SCHOONSCHIP и REDUCE-3 при решении этой задачи (см. и /33/).

* "Автоматизация" перечисленных этапов достигается, например, в программе ВИРТОН /32/, написанной на языке REDUCE LISP (RLISP).

Известно, что интеграция фейнмановских интегралов любого типа не встроена в систему REDUCE-3. Эта проблема интенсивно изучается /14,25,34/. Поэтому согласно /26/ легче всего "дублировать" SCHOONSCHIP - программы и реализовать интегрирование в виде табличных подстановок.

В первую очередь проинтегрируем формулу (6) по импульсу P5=K:

$$|M|_{\alpha^3}^2 \{dK\} = A \cdot |M^0|_{\alpha^2}^2 R(P_1, P_2), \quad (7)$$

где $|M^0|_{\alpha^2}^2$ - борновское сечение процесса $CC \rightarrow \Phi\bar{\Phi}$,

$$A = \frac{13}{36} g^2, \quad |M^0|_{\alpha^2}^2 = (g^4/3) \left(1 - \frac{g}{4} \frac{T_1 \cdot U}{S^2}\right), \quad \{dK\} = \int \frac{d^{n-1}k}{(2\pi)^{n-1} k_0}.$$

Интеграл $R(P_1, P_2)$ в $(n=4-2\epsilon)$ -размерном пространстве имеет вид

$$R(P_1, P_2) = \frac{1}{4} \int_{1/2}^1 \{d\kappa\} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{G(\epsilon)}{2\epsilon^2} \left(\frac{\kappa_{max}^2}{\pi \mu^2}\right)^{-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{32\pi^2 \epsilon^2}\right), \quad (8)$$

где $G(\epsilon) = \frac{\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)}$, $\kappa_{max}^2 = S/4$, $R(P_1, P_2) = R(P_1, P_3) = \dots$

Метод устранения возникающей здесь расходимости типа ϵ^{-2} сводится к хорошо известному механизму Блоха и Нордсика о сокращении ИК-расходимостей в КЭД и в нужной нам форме изложен, например, в /15a, 17, 35/. Суть метода состоит в том, что в фейнмановской калибровке всегда найдётся приводящая к сокращению ϵ^{-2} сингулярностей пара диаграмм, которые различаются лишь правилом разреза, т.е. условием нахождения глюона с импульсом K на массовой ($K^2=0$) или немассовой ($K^2=M^2 \neq 0$) поверхности. Другими словами, перенормировка происходит после перехода к пределу т.н. мягкого глюона $K \rightarrow 0$ и при сложении интегралов данной топологии.

Рассмотрим программную реализацию этого метода. Для простоты quadriруем калибровочно-инвариантный набор диаграмм кварк-антикварковой аннигиляции в пару скалярных кварков и тормозной глюон /15a/ $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}G$. Далее перейдём к пределу $K=0$ в числителях получаемых полиномов:

```
FOR I:=1:J DO N(I):=NUM(I(I)); D(I):=DEN(M(I));
LET U1=U, T2=T1, P1.P2=-((U+T1)/2), P1.P3=-T1/2, P1.P4=-U/2,
P2.P3=-U/2, P2.P4=-T1/2, P3.P4=-((U+T1)/2), S1=-T1-U;
LET K.P1=C, K.P2=0, K.P3=C, K.P4=0; FOR I:=1:J DO N(I):=N(I);
```

Для иллюстрации ограничимся только δ -канальными вкладами. Как видно на рис. 2, число соответствующих ненулевых вкладов есть =6 и их интегрировать с помощью (8) нетрудно. Однако мы будем следовать работе /27/, соблюдая специфику CAB REDUCE-3. Домножим подынтегральные выражения на функцию SN(0,0,0,C) и выполним ее "заселение" в следующем порядке:

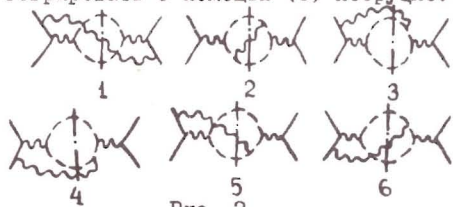


Рис. 2

```
CLEAR K.P1,K.P2,K.P3,K.P4; ON DIV;ORDER K.P1,K.P2,K.P3,K.P4,SN,U,T1;
FOR I:=1:6 DO WRITE R(I):=N(I)/D(I);
FOR I:=1:6 DO R(I):=R(I)*SN(0,0,0,0)*(K.P1*K.P2*K.P3*K.P4)**3;
FOR ALL N4 LET K.P4**N4*SN(0,0,0,0)=SN(0,0,0,N4);
FOR ALL N3,N4 LET K.P3**N3*SN(0,0,0,N4)=SN(0,0,N3,N4);
FOR ALL N2,N3,N4 LET K.P2**N2*SN(0,0,N3;N4)=SN(0,N2,N3,N4);
FOR ALL N1,N2,N3,N4 LET K.P1**N1*SN(0,N2,N3,N4)=SN(N1,N2,N3,N4);
FOR I:=1:6 DO R(I):=R(I);
```

Завышение степеней скалярных произведений мы произвели для упрощения работы LET подстановок. Определим процедуру для интеграла (8):

```
PROCEDURE R(B1,B2);I/(32*BI.B2*EP442); % (8) = R(B1,B2)*BI.B2
LET SN(2,2,3,3)=R(P1,P2),SN(2,3,2,3)=R(P1,P4),SN(2,3,3,2)=R(P1,P3),
SN(3,2,2,3)=R(P2,P4), SN(3,2,3,2)=R(P2,P3), SN(3,3,2,2)=R(P1,P2);
FOR I:=1:6 DO R(I):=R(I);
Ясно, что аналогично (7) мы получим  $\epsilon^{-2}$  сингулярный ответ:
ANS:=FOR I:=1:6 SUM R(I);
```

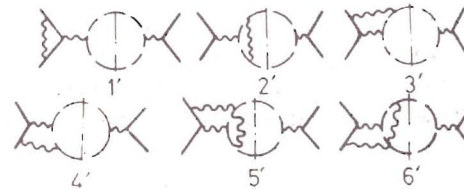


Рис. 3

На рис.3 приведены графы δ -канальные, топологически эквивалентные диаграммам с теми же номерами по рис. 2. Они дают большие π^2 вклады в ИК-радиационную поправку к борновскому сечению процесса $q\bar{q} \rightarrow \Phi\bar{\Phi}$ в α^3 порядке ТВ. Соответствующая программа отличается от предыдущей из-за виртуальности импульса K, приводящей к пропагаторам, составленным из импульсов $KM1=K-P1, KP1=K+P1, KM2=K-P2,$

$KP2=K+P2, KM3=K-P3, KP3=K+P3, KM4=K-P4, KP4=K+P4$. Функция SN теперь имеет 8 аргументов.

Приведём те части программы, где наблюдается различие:

```
MASS P1=0,P2=0,P3=0,P4=0,K=M;
.....
LET M**2=0,K.P1=0,K.P2=0,K.P3=C,K.P4=C;FOR I:=1:6 DO N(I):=NUM(M(I));
.....
ORDER M,KP1,KM1,KP2,KM2,KP3,KM3,KP4,KM4,SN,U,T1;
FOR I:=1:6 DO V(I):=N(I)*SN(C,C,0,C,0,C,0,0)*
(KM1*KP1*KM2*KP2*KM3*KP3*KM4*KP4)**6;
FOR ALL N8 LET KM4**N8*SN(C,0,0,C,0,C,0,0)=SN(0,0,0,0,0,0,N8/2);
FOR I:=1:6 DO V(I):=V(I);
.....
FOR ALL N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8 LET SN(0,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8)=
SN(N1/2,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8);
FOR J:=1:6 DO V(I):=V(I);
```


Заметим, что эти сложные функциональные подстановки требуют каждый раз переписывания. Иначе система может пропустить часть заданных правил.

Значения соответствующих интегралов табулируем согласно формулам /156/:

$$V(P_i, x P_j) = \int_{-\infty}^{\infty} (d^n k / (2\pi)^n) \frac{(P_i \cdot P_j)}{k^2 (k + P_i)^2 (k + x P_j)^2} = -\frac{i C(\epsilon) \Gamma(1+\epsilon) \Gamma(1-\epsilon)}{2x(4\pi)^2 \epsilon^2} \quad (9)$$

где $x = \pm 1$ и $Re[iV(P_i, x P_j)] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{32x\pi^2 \epsilon^2} (1 - \frac{\pi^2 \epsilon^2}{3})$.

Выражение (9) можно реализовать в виде процедур для $x = -1$ и $x = 1$:

```
PROCEDURE VM(B1, B2); 1/(32*B1.B2)*(1/EP**2-1/3);
```

```
PROCEDURE VP(B1, B2); 1/(32*B1.B2)*(1/3-1/EP**2);
```

Дальше уже нетрудно определить 24 интеграла для подстановок

```
LET SN(2,3,2,3,3,3,3,3)=VP(P2,P3), SN(2,3,3,2,3,3,3,3)=VM(P2,P4),...
```

и получить сокращение полюсов ϵ^{-2} для каждой пары согласно рис. 2 и 3:

```
FOR I:=1:6 DO WRITE CANS(I):=V(I)+R(I);
```

Отметим: $Re[iV(P1, -P2)] = (P1 \cdot P2) * VM(P1, P2) = -(P2 \cdot P3) * VP(P2, P3) \dots$

Численные результаты для рассмотренного, а также для других процессов при вычислении т.н. К - фактора в КХД и СКХД приводятся в /156, 177/. Заметим, что представление квадрата матричного элемента (I) в простой факторизованной форме типа формулы (6) весьма упрощает задачу. В частности, окончательный ответ из выражения (7) следует без привлечения громоздких расчётов виртуальных диаграмм, после простой подстановки:

$$R(P1, P2) \Rightarrow \{ R(P1, P2) + Re[iV(P1, -P2)] \} = \frac{1}{96}.$$

Полученные нами результаты вычислений ИК-радиационных поправок в α^3 порядке ТВ для партонных процессов КХД несущественно отличаются от значений, полученных вручную /35/. Это отличие, между прочим, вызвано в основном тем, что при ручном счёте с целью облегчения работы обычно пренебрегают несущественными слагаемыми (диаграммами).

§ 4. Суперсимметричное соотношение Грисару и пр. /29/ как пример использования программ матричной и некоммутативной алгебр

Кроме стандартных способов вычисления эксклюзивных процессов методами САВ в последнее время стали интенсивно применять трюки т.н. спиральных амплитуд и суперсимметричных соотношений Уорца (см. /17, 20/ и цитированную там литературу). Исходным пунктом этих работ является соотношение Грисару и пр. /29/:

$$[Q(\eta), a_j] = \Gamma(P, \eta) a_j - \frac{1}{2},$$

где $Q(\eta) = Q_\alpha \eta^\alpha$, Q_α - обычные генераторы суперсимметрии, η - майорановский спинор с антикоммутирующими комплексными компонентами, a_j - оператор рождения частиц с импульсом P и спином j, $\Gamma(P, \eta)$ - линейная функция относительно η и зависящая от импульса P через неизвестные коэф-

фициенты L_i

$$\Gamma(P, \eta) = L_1 \eta_1 + L_2 \eta_2 + L_3 \eta_1^* + L_4 \eta_2^*.$$

Согласно /29/ определение явного вида L_i сводится к решению уравнения

$$\Gamma(P, \xi) \Gamma^*(P, \eta) - \Gamma(P, \eta) \Gamma^*(P, \xi) = -2i \bar{\eta} \bar{P} \xi \quad (10)$$

в смысле равенства коэффициентов при независимых произведениях $\eta_i \xi_j$. Здесь метрика задана так, что $\hat{P} = \gamma_0 P_0 + \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 + \gamma_3 P_3$. Кроме того, мы будем точно следовать определениям

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \eta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2^* \\ -\eta_1^* + \eta_2 \\ -\eta_1 + \eta_2^* \\ -\eta_1^* - \eta_2 \end{pmatrix}$$

Сперва вычислим правую часть уравнения (10):

```
MATRIX GO(4,4), G1(4,4), G2(4,4), G3(4,4), G4(4,4), G(4,4), C(4,4), D(4,4);
G1:=MAT((0,0,0,-1),(0,0,-1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0))$
G2:=MAT((0,0,0,-1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(-1,0,0,0))$
G3:=MAT((0,0,-1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,-1,0,0))$
GO:=-I*MAT((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1))$
PG:=-PO*GO+P1*G1+P2*G2+P3*G3$
```

Воспользуемся приведенными выше определениями, вычислим $\bar{\eta}$ и объёмные компоненты η и ξ , а также L и L^C некоммутирующими:

```
ETA:=1/2*MAT((ET(1)+ETC(2)),(-ETC(1)+ET(2)),(-ET(1)+ETC(2)),(-ETC(1)-ET(2)))$
G4:=I*GO$
C:=MAT((0,0,0,1),(0,0,-1,0),(0,1,0,0),(-1,0,0,0))$
D:=C*G4$
ETAC:=1/D*ETA$
ETAER:=TR ETAC*G4$
ZET:=-1/2*MAT((ZT(1)+ZTC(2)),(-ZTC(1)+ZT(2)),(-ZT(1)+ZTC(2)),(-LTC(1)-ZT(2)))$
NONCOM ET,ZT,L,LC;
```

Таким образом, мы получим правую часть уравнения (10):

```
W:=-2*I*ETAER*PG*ZET$
```

Пусть L, LC, EEC, EE, ZZ, ZZC задают матрицы

```
MATRIX L(1,4), LC(1,4), EE(4,1), EEC(4,1), ZZ(4,1), ZZC(4,1);
L:=MAT((L(1),L(2),L(3),L(4)))$
LC:=MAT((LC(1),LC(2),LC(3),LC(4)))$
EE:=MAT((ET(1)),(ET(2)),(ETC(1)),(ETC(2)))$
EEC:=MAT((ETC(1)),(ETC(2)),(ET(1)),(ET(2)))$
ZZ:=MAT((ZT(1)),(ZT(2)),(ZTC(1)),(ZTC(2)))$
ZZC:=MAT((ZTC(1)),(ZTC(2)),(ZT(1)),(ZT(2)))$
```

Тогда согласно определениям

$$\Gamma(P, \eta) = L \cdot EE, \Gamma^*(P, \eta) = LC \cdot EEC, \Gamma(P, \xi) = L \cdot ZZ, \Gamma^*(P, \xi) = LC \cdot ZZC$$

имеем

```
GE:=L*EE$ GEC:=LC*EES$ GZ:=L*ZZ$ GZC:=LC*ZZC$
```

и левая часть уравнения (10) вычисляется так:

```
GEGZ:=GZ*GEC-GE*GZC$
```

Как было сказано, получаемое уравнение приводит к равенствам нулю 16 коэффициентов перед независимыми произведениями $\psi(i)\psi(j)$ в

```
EQ:=GEGZ-W$ EQS:=EQ(1,1)$
```

Их нетрудно определить, например, с помощью команды COEFF так:

```
FOR ALL I,J LET ET(I)*ZT(J)=C2(I,J), ZT(J)*ET(I)=-C2(I,J);
```

```
FOR I:=1:4 DO FOR J:=1:4 DO WRITE COEFF(EQS,CF(I,J),CC);
```

Заметим, что поскольку $L(I)$ не коммутируют с $ZT(I)$, то для выделения коэффициентов заранее требуются перестановки $L(I)$ с $ZT(I)$:

```
FOR ALL I,J LET ZT(I)*L(J)=L(J)*Z(I)+C1; EQS:=EQS$
```

```
FOR ALL I,J LET CLEAR ZT(I)*L(J);
```

```
FOR ALL I,J LET L(J)*ZT(I)=ZT(I)*L(J)+C2; EQS:=EQS;
```

без которых мы, наверное, могли обойтись, если бы воспользовались пакетом программ NONCOM^{24/}.

Наконец, с целью определения явного вида функции $\Gamma(P, \gamma)$ проанализируем получаемые значения коэффициентов:

```
CF(1,1):=2*(LC(3)*L(1)); CF(2,2):=2*(LC(4)*L(2));
```

```
CF(3,3):=2*(LC(1)*L(3)); CF(4,4):=2*(LC(2)*L(4));
```

```
CF(1,2):=LC(4)*L(1)+LC(3)*L(2);
```

```
CF(1,3):=LC(3)*L(3)+LC(1)*L(1)-P3-PO;
```

```
CF(1,4):=LC(3)*L(4)+LC(2)*L(1)-I*P2-P1;
```

```
CF(2,4):=LC(4)*L(4)+LC(2)*L(2)+P3-PO;
```

.....

Первые 4 уравнения указывают на то, что переменные $L(3), L(4)$ (или $L(1), L(2)$) равны нулю. Оставшуюся систему нетрудно решить при параметризации $P=E(I, \sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$ и получить ответ $L(1)=\sqrt{2E} \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\varphi_0)}$, $L(2)=\sqrt{2E} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\varphi_0)}$ (φ -свободный парам.).

Здесь мы могли бы использовать команду SOLVE относительно величин $R(I), F(I)$ ($L(I)=R(I)*E^{**}(I*F(I)), I=1,2$), линеаризуя заранее систему уравнений следующим образом:

```
FOR ALL X,Y SUCH THAT X>Y AND X<3 OR X<Y AND Y<3 LET
```

```
CL(X)*L(Y)=LOG R(X)+LOG R(Y) - I*F(X)+I*F(Y)
```

```
FOR ALL X,Y SUCH THAT X>2 OR Y>2 LET CL(X)*L(Y)=0;
```

```
LET PO=-P3+LOG (2*EE*(COS(OT/2))**2);
```

.....

```
SOLVE(LST(CF(1,3),CF(2,4),CF(1,4)),LOG R(0),LOG R(1),F(1));
```

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что рассмотренные в работе программы далеко не идеальны, и основное, что мы хотели показать, - спо-

собность компьютерной алгебры увеличить интерес и скорость работы при решении громоздких, скучных задач подобного рода.

Авторы выражают благодарность В.П.Гердту, В.Р.Гарсеванишвили, А.П.Кривоку, Н.В.Махалциани и Л.А.Слегченко за полезные обсуждения, а также сотрудникам ЛВТА ОИЯИ за помощь при работе на ЭВМ.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1984;
Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А. В сб.: Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. М., "Наука", 1977;
Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. ЭЧАЯ, 1971, 2, с. 5.
2. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложениях к физике и математике. УФН, 1980, 130, с. 113;
Gerdt V.P. Comp.Phys.Comm., 1980, 20, 85.
3. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике (АВПТФ), Дубна, сентябрь, 1979. ОИЯИ, ДП-80-13, Дубна, 1980.
4. АВПТФ, Дубна, сентябрь, 1982. ОИЯИ, ДП-83-511, Дубна, 1983.
5. АВПТФ, Дубна, сентябрь, 1985. ОИЯИ, ДП-85-791, Дубна, 1985.
6. Schiller A. J.Phys., 1979, G5, 1329;
Gottschalk T. and Sivers D. Phys.Rev., 1980, D21, 102;
Avdeev L.V., Vladimirov A.A., Tarasov O.V. Phys.Lett., 1980, 96B, 194;
Chetirkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Nucl.Phys., 1980, B174, 345;
Berends F.A.et al.Phys.Lett., 1981, 103B, 124;
Виницкий С.И., Ростовцев В.А. В сб.^{5/}, с. 366.
7. Strubbe H. Comp.Phys.Comm., 1974, 8, 1.
8. Hearn A.C. REDUCE-2: User's Manual, UCP-19, University of Utah, 1973;
Боголюбовская А.А., Жидкова И.Е., Ростовцев В.А. Система программирования REDUCE-2. ОИЯИ, Б1, И-83-512, Дубна, 1983;
Raya G.REDUCE. New York, Springer, 1987.
9. Hearn A.C. REDUCE User's Manual, Version 3.2, Rand Publication CP78 (7/85) 1985.
10. McCarthy J. Comm.ACM, 1960, 3, 184;
Маурер У. Введение в программирование на языке ЛИСП. М., "Мир", 1976;
Лавров С.С., Силагадзе Г.С. Автоматическая обработка данных: Язык ЛИСП и его реализация. М., "Наука", 1978.
11. Уинстон П. Искусственный интеллект. М., "Мир", 1980.

12. Девенпорт Дж. Интегрирование алгебраических функций. М., Мир, 1985; Компьютерная алгебра, сб. под ред. Б. Бухбергера, М., "Мир", 1985.
13. Schwarz F. Phys. Comm., 1982, 27, 179;
Gerdt V.P., Shvachka A.B., Zharkov A.Yu. CPC, 1984, 34, 303.
14. Боголюбовская А.А., Гердт В.П., Тарасов О.В. В сб. /5/, с. 82.
- 15a. Darbaidze Ya.Z., Matveev V.A., Merebashvili Z.V., Slepchenko L.A. Phys. Lett., 1986, 177B, 188; Phys. Lett., 1987, 191B, 179;
- 15b. Ibid., Phys. Lett., 1988, 206B, 127.
16. Möhring H.J. and Schiller A. In /3/, p. 127;
Darbaidze Ya.Z. et al. EUROCAL'87, Leipzig, June, 1987;
Грозин А.Г. В сб. /4/, с. 226.
17. Дарбайдзе Я.З., Матвеев В.А., Мерешашвили З.В., Слещенко Л.А. Препринт ОИЯИ Р2-88-129, Дубна, 1988.
18. Sasaki T. J. Comp. Phys., 1976, 22, 189.
19. Крижов А.П., Родионов А.Я. В сб. /5/, с. 388; CPC, 1988, 48, 327;
Cvitanovic P. Phys. Rev., 1976, D14, 1536.
20. Mangano M. and Parke S.J. FERMILAB PUBL 87/136 T, 1987;
Berends F.A. and Giele W.T. Recursive Calculations for processes with n gluons, 1987;
Parke S.J. and Taylor T.R. Phys. Lett., 1985, 157B, 81.
21. Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. Lett. N. Cim., 1973, 7, 719;
Brodsky S.J. and Farrar G.R. Phys. Rev. Lett., 1973, 31, 1153.
22. Farrar G.R. and Neri F. Phys. Lett., 1983, 130B, 109;
Errata, Phys. Lett., 1985, 152B, 443.
23. Крижов Л.Ф. В сб. /5/, с. 411.
24. Родионов А.Я. В сб. /4/, с. 187;
Lassner W. In /3/, p. 58;
Quasthoff U. In /4/, p. 253.
25. Fox J.A. and Hearn A.C. J. Comp. Phys., 1974, 14, 123;
Kölbig K.S. In /5/, p. 172.
26. Ахундов А.А., Баранов С.П., Бардин Д.Ю., Риманн Т. В сб. /5/, с. 382.
27. Тарасов О.В. В сб. /3/, с. 150; В сб. /4/, с. 214.
28. Chisholm J.S. Nuovo Cimento, 1963, 30, 426;
Kahane J. J. Math. Phys., 1968, 9, 1732.
29. Grisar M.T. and Pendleton H.N. Nucl. Phys., 1977, B124, 81;
Grisar M.T., Pendleton H.N., Van Nieuwenhuizen P. Phys. Rev., 1977, D13, 996.
30. Mandelstam S. Nucl. Phys., 1983, B213, 149;
Brink L., Lendgren O., Nilsson B.E.W. Phys. Lett., 1983, 123B, 323.
31. Leibbrandt G. Phys. Rev., 1984, D29, 1699;
Lee H.C. and Milgram M.S. Ann. Phys., 1984, 157, 408;
Pritchard D.J. and Stirling W.J. Nucl. Phys., 1980, B165, p. 237;

- Натрошвили К.Р., Хелашвили А.А., Хмаладзе В.Ю. Однопетлевые расчёты в светоподобной калибровке. В сб.: Инфракрасное поведение в квантовой хромодинамике, Тбилиси, ТТУ, 1985.
32. Рапортиренко А.М. В сб. /5/, с. 71.
33. Радюшкин А.В., Калмурацов Р.С. Препринт ОИЯИ Р2-84-767, Дубна, 1984.
34. Алексеев А.И., Еднерал В.Ф. Препринт ИФВЭ 87-118, Серпухов, 1987.
35. Contogouris A.P. et al. Phys. Rev., 1984, D29, 1354;
Mod. Phys. Lett., 1987, A2, 735.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 октября 1988 года.