объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-728

В.К.Мельников

НОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Направлено в "Journal of Mathematical Physics"

1988

В настоящей работе излагается новый подход к проблеме нахождения нелинейных интегрируемых систем. Суть его состоит в следующем. Возьмем нелинейную интегрируемую систему, обладающую представлением Лакса [1] вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 0,$$

где L и A - линейные дифференциальные операторы. Для широкого класса операторов L и A мы покажем, что существует линейный дифференциальный оператор

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n ,$$

такой, что коэффициенты оператора Γ_n зависят от решения ϕ_n уравнения

$$(L - \lambda_n)\phi_n = 0,$$

а зацепленная система уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = \Gamma, \quad (L - \lambda_n)\phi_n = 0, \ n = 1, \ldots, N,$$

интегрируется с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L.

При этом оказалось, что таким образом могут быть получены как некоторые уже известные интегрируемые системы, так и ряд новых интегрируемых систем. Существенно, что для всех известных ранее интегрируемых систем излагаемый здесь подход является более простым и более естественным.

1. СКАЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА

Начнем с простейшего случая скалярного оператора второго порядка, то есть пусть

$$L = \partial^2 + u, \qquad /1/$$

где ∂ - оператор дифференцирования по пространственной переменной x, а u - скалярная функция x. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L-\lambda)f_0 = 0, \quad f_n' = \psi_n f_0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

относительно функций $f_0, f_1, \ldots, f_N$. Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x, а функции $\psi_1, \ldots, \psi_N$ считаются пока неопределенными. Возьмем, далее, оператор A вида

$$A = \partial^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0} a_k \partial^k, \quad k_0 \geq 0, \tag{3}$$

такой, что оператор $\Delta = [A, L]$ имеет нулевой порядок, то есть является оператором умножения на функцию, и положим

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + cAf_0 + \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n,$$

$$g_n = \psi_n f_0' - \psi_n' f_0 - (\lambda - \lambda_n) f_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

где c и κ - константы, а $\phi_1, \ldots, \phi_N$ - некоторые /пока неизвестные/ функции.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять функции u, $\phi_1, \ldots, \phi_N$, $\psi_1, \ldots, \psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /1/-/4/ величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$(L-\lambda) g_0 = \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

С помощью простых вычислений находим, что для справедливости условий /5/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = 2\kappa \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n \psi_n),$$

$$(L-\lambda_n)\phi_n = (L-\lambda_n)\psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

В том случае, когда c и κ - вещественные константы, а величины λ_n удовлетворяют условию $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, система /6/ имеет инвариантное многообразие $u = \bar{u}$, $\psi_n = \epsilon_n \bar{\phi}_n$, где $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1, \ldots, N$, а черта означает комплексное сопряжение. Движение на этом многообразии описывается системой уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = 2\kappa \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x} |\phi_n|^2,$$

$$(L-\lambda_n)\phi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

При $k_0 = 1$, $c = 4$, $\kappa = 1$ первое уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2 \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x} |\phi_n|^2,$$

то есть отличается от уравнения Кортевега - де Вриса [2] выражением, стоящим в правой части этого равенства.

В работе [3] приведена схема интегрирования системы /7/ в классе быстро убывающих по x функций с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида /1/.

2. СКАЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь случай, когда оператор L имеет вид

$$L = \partial^3 + u_1 \partial + u_0. \tag{8}$$

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_N$ - решение линейной системы уравнений

$$(L-\lambda) f_0 = 0, \quad f_n' = \psi_n f_0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{9}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_N$ - некоторые /пока неизвестные/ функции. Далее, возьмем оператор A вида /3/, такой, что оператор $\Delta = [A, L]$ имеет первый порядок, и положим

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + cAf_0 + \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n, \tag{10}$$

$$g_n = \psi_n f_0'' - \psi_n' f_0' + \psi_n'' f_0 + u_1 \psi_n f_0 - (\lambda - \lambda_n) f_n, \quad n = 1, \ldots, N,$$

где c и κ - константы, а $\phi_1, \ldots, \phi_N$ - некоторые функции. Потребуем, наконец, чтобы определенные посредством /3/ и /8/-/10/ величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$(L-\lambda)g_0 = \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n=1,\dots,N. \qquad /11/$$

С помощью несложных вычислений находим, что для справедливости условий /11/ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A,L] = 3\kappa \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\psi_n + \phi_n \psi_n \partial\right),$$
$$(L-\lambda_n)\phi_n = (\tilde{L}-\lambda_n)\psi_n = 0, \quad n=1,\dots,N, \qquad /12/$$

где

$$\tilde{L} = -\partial^3 - \partial\cdot u_1 + u_0. \qquad /13/$$

Положим теперь $u_1 = \frac{3}{2}u$, $u_0 = \frac{3}{4}u' + ip$, где функции u и p принимают только вещественные значения, то есть выберем оператор L вида /8/ так, чтобы выполнялось соотношение $L^* = -L$, где звездочкой обозначено эрмитово сопряжение. Пусть, далее, величины λ_n удовлетворяют условию $\lambda_n + \bar{\lambda}_n = 0$, то есть являются чисто мнимыми, $n = 1,\dots,N$. В этой ситуации функции ψ_n в силу /13/ могут быть выбраны так, чтобы выполнялось равенство $\psi_n = \epsilon_n \bar{\phi}_n$, где $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1,\dots,N$. Наконец, выберем оператор A так, чтобы выполнялось соотношение $A^* = (-1)^{k_0} A$, а величины c и κ выберем с соблюдением требований $\bar{c} = (-1)^{k_0+1}c$, $\bar{\kappa} = \kappa$. В этих условиях система /12/ принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A,L] = 3\kappa \sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\bar{\phi}_n + |\phi_n|^2 \partial\right),$$
$$(L-\lambda_n)\phi_n = 0, \quad n=1,\dots,N.$$

При $k_0 = 0$, $c = i$, $\kappa = 1$ первое соотношение этой системы эквивалентно уравнениям

$$3\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial p}{\partial x} = 6\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x}|\phi_n|^2,$$

$$4\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 6i\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_n \frac{\partial \bar{\phi}_n}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n}{\partial x}\bar{\phi}_n\right). \qquad /14/$$

Если в системе /14/ положить $\phi_n \equiv 0$, $n = 1,\dots,N$, то после исключения из нее функции p получаем хорошо известное уравнение Буссинеска /4/.

3. СКАЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Чтобы оттенить некоторые моменты в сказанном ранее, рассмотрим случай оператора L произвольного порядка, то есть положим

$$L = \partial^{m_0+2} + \sum_{m=0}^{m_0} u_m \partial^m, \quad m_0 > 0. \qquad /15/$$

Возьмем, далее, линейную систему уравнений

$$(L-\lambda)f_0 = 0, \quad f_n' = \psi_n f_0, \quad n = 1,\dots,N, \qquad /16/$$

и с помощью ее решения $f_0, f_1, \dots, f_N$ определим величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + cAf_0 + \kappa\sum_{n=1}^{N} \phi_n f_n,$$
$$g_n = \sum_{m=0}^{m_0+1} (-1)^m \frac{\partial^m \psi_n}{\partial x^m}\,\frac{\partial^{m_0-m+1} f_0}{\partial x^{m_0-m+1}} + \qquad /17/$$
$$+ \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \frac{\partial^r (u_m\psi_n)}{\partial x^r}\,\frac{\partial^{m-r-1} f_0}{\partial x^{m-r-1}} - (\lambda-\lambda_n)f_n,$$

$n = 1,\dots,N,$

где c и κ - константы, а A - оператор вида /3/, такой, что порядок оператора $\Delta = [A, L]$ равен m_0.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять функции $u_0,\dots,u_{m_0}$, $\phi_1,\dots,\phi_N$, $\psi_1,\dots,\psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /3/ и /15/-/17/ величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$(L-\lambda)g_0 = \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n, \qquad \frac{\partial g_n}{\partial x} \equiv 0, \quad n=1,\ldots,N. \qquad /18/$$

С помощью несложных вычислений находим, что

$$(L-\lambda)\, g_0 - \kappa \sum_{n=1}^{N} \phi_n g_n = \kappa \sum_{n=1}^{N} f_n (L-\lambda_n)\phi_n -$$

$$- \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] - \kappa \Gamma \right\} f_0, \qquad /19/$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = \psi_n (L-\lambda) f_0 - f_0 (\tilde{L} - \lambda_n)\psi_n, \quad n=1,\ldots,N,$$

где

$$\tilde{L} = (-1)^{m_0} \partial^{m_0+2} + \sum_{m=0}^{m_0} (-1)^m \partial^m \cdot u_m, \qquad /20/$$

а действие оператора Γ на функцию f_0 определяется равенством

$$\Gamma f_0 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{m_0+1} \frac{\partial^{m_0-m+1}}{\partial x^{m_0-m+1}} \left(\frac{\partial^m \phi_n}{\partial x^m} \psi_n f_0 \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=0}^{m_0+1} (-1)^m \phi_n \frac{\partial^m \psi_n}{\partial x^m} \frac{\partial^{m_0-m+1} f_0}{\partial x^{m_0-m+1}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{r=0}^{m-1} u_m \frac{\partial^{m-r-1}}{\partial x^{m-r-1}} \left(\frac{\partial^r \phi_n}{\partial x^r} \psi_n f_0 \right) - \qquad /21/$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \phi_n \frac{\partial^r (u_m \psi_n)}{\partial x^r} \frac{\partial^{m-r-1} f_0}{\partial x^{m-r-1}}.$$

Нетрудно видеть, что правая часть равенства /21/ в действительности не содержит производных от функции f_0 выше m_0-го порядка, поскольку содержащиеся в первом и втором слагаемых выражения с производной (m_0+1)-го порядка взаимно сокращаются. Таким образом, определенный посредством /21/ оператор Γ имеет порядок не выше m_0. В силу /16/ из равенств /19/ вытекает, что для справедливости условий /18/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = \kappa \Gamma, \qquad /22/$$

$$(L-\lambda_n)\phi_n = (\tilde{L} - \lambda_n)\psi_n = 0, \quad n=1,\ldots,N.$$

Если входящие в эту систему параметры c, κ и λ_n взяты с соблюдением условий $\bar{c} = (-1)^{k_0+1} c$, $\bar{\kappa} = \kappa$, $\bar{\lambda}_n = (-1)^{m_0} \lambda_n$, $n = 1, \ldots, N$, то согласно /20/ в этом случае система /22/ имеет инвариантное многообразие $L^* = (-1)^{m_0} L$, $\psi_n = \epsilon_n \bar{\phi}_n$, где $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1, \ldots, N$. При этом операторы A и Γ должны удовлетворять требованиям $A^* = (-1)^{k_0} A$, $\Gamma^* = (-1)^{m_0}\Gamma$.

4. МАТРИЧНЫЙ ОПЕРАТОР ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Описанная выше процедура нахождения нелинейных интегрируемых систем с некоторыми изменениями переносится на случай, когда коэффициентами оператора L являются квадратные матрицы произвольного порядка $r_0 > 1$. Начнем рассмотрение этого варианта с простейшего случая оператора первого порядка, то есть положим

$$L = \Lambda\partial + U, \qquad /23/$$

где Λ - диагональная матрица с постоянными элементами на главной диагонали, а U - квадратная матрица с нулевыми элементами на главной диагонали. Пусть, далее, A - дифференциальный оператор вида

$$A = \sum_{k=0}^{k_0+1} A_k \partial^k, \quad k_0 \geq 0, \qquad /24/$$

такой, что коэффициенты $A_0, \ldots, A_{k_0+1}$ являются квадратными матрицами того же порядка r_0, а оператор $\Delta = [A, L]$ имеет нулевой порядок, то есть является оператором умножения на матрицу.

Хорошо известно, что на главной диагонали матрицы Λ в этом случае стоят нули.

Рассмотрим теперь линейную систему уравнений

$$(L-\eta)F_0=0, \quad F_n' = \Psi_n F_0, \quad n=1,\dots,N, \qquad /25/$$

относительно неизвестных матриц F_0, $F_1,\dots,F_N$. При этом будем предполагать, что F_0 является квадратной матрицей порядка r_0, а $F_1,\dots,F_N$ и $\Psi_1,\dots,\Psi_N$ являются прямоугольными матрицами с r_1 строками и r_0 столбцами. С помощью решений F_0, $F_1,\dots$ $\dots, F_N$ системы /25/ определим величины G_0, $G_1,\dots,G_N$ посредством равенств

$$G_0 = \frac{\partial F_0}{\partial t} + cAF_0 + \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n F_n,$$

$$/26/$$

$$G_n = \Psi_n \Lambda F_0 - (\eta-\eta_n)F_n, \quad n=1,\dots,N,$$

где c и κ - константы, а $\Phi_1,\dots,\Phi_N$ - прямоугольные матрицы с r_0 строками и r_1 столбцами, и, следовательно, G_0 является квадратной матрицей порядка r_0, а $G_1, \dots, G_N$ - прямоугольными матрицами с r_1 строками и r_0 столбцами. Далее выясним, каким требованиям должны удовлетворять матрицы $U, \Phi_1,\dots,\Phi_N, \Psi_1,\dots$ $\dots,\Psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /23/-/26/ матрицы G_0, $G_1,\dots,G_N$ удовлетворяли условиям

$$(L-\eta)G_0 = \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n G_n, \quad \frac{\partial G_n}{\partial x} \equiv 0, \quad n=1,\dots,N. \qquad /27/$$

С помощью простых вычислений находим, что для справедливости условий /27/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = \kappa \sum_{n=1}^{N} [\Lambda, \Phi_n\Psi_n],$$

$$/28/$$

$$\Lambda\Phi_n' + U\Phi_n - \eta_n\Phi_n = \Psi_n'\Lambda - \Psi_n U + \eta_n\Psi_n = 0, \quad n=1,\dots,N.$$

Система /28/ содержит несколько интересных частных случаев, некоторые из которых детально рассмотрены ниже.

5. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Пусть $r_0 = 2$. Возьмем оператор L вида /23/ с матрицами Λ и U, определенными посредством равенств

$$\Lambda = \mathrm{diag}(1, -1), \quad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ \bar{u} & 0 \end{vmatrix}. \qquad /29/$$

Как известно [5], в этом случае при любом $k_0 > 0$ существует оператор A вида

$$A = \Lambda\partial^{2k_0} + \sum_{k=0}^{2k_0-1} A_k \partial^k, \qquad /30/$$

такой, что оператор $\Delta = [A, L]$ является косоэрмитовой матрицей с нулевыми элементами на главной диагонале, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{vmatrix}. \qquad /31/$$

При этом величина q является полиномом от функций u, $\bar{u}$ и их производных по x до порядка $2k_0$, а матрицы $A_0,\dots,A_{2k_0-1}$ удовлетворяют условию

$$A_0 = \dots = A_{2k_0-1} \equiv 0 \quad \text{при} \quad u \equiv 0. \qquad /32/$$

Нетрудно убедиться, что если вектор-столбец $\Phi = \Phi_n$ с компонентами $\phi = \phi_n$ и $\psi = \psi_n$ удовлетворяет уравнению

$$\Lambda\Phi' + U\Phi - \eta\Phi = 0 \qquad /33/$$

при $\eta = \eta_n$, то вектор-строка $\Psi = \Psi_n$ с компонентами $\psi = \psi_n$ и $\phi = \phi_n$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi'\Lambda - \Psi U + \eta\Psi = 0 \qquad /34/$$

при том же самом значении параметра $\eta = \eta_n$, то есть решение Ψ_n уравнения /34/ связано с решением Φ_n уравнения /33/ при одинаковых значениях параметра $\eta = \eta_n$ с помощью соотношения

$$\Psi_n = \tilde{\Phi}_n\sigma, \quad \sigma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /35/$$

где знак тильда "~" означает транспортирование, то есть, в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Далее, легко проверить, что если вектор-столбец $\Phi=\Phi_n$ удовлетворяет уравнению /33/ при $\eta=\eta_n$, то вектор-столбец $\Phi=\sigma\Lambda\bar{\Phi}_n$ удовлетворяет этому же уравнению при $\eta=-\bar{\eta}$, а вектор-строка $\Psi=\Phi_n^*\Lambda$ в силу /35/ удовлетворяет уравнению /34/ при $\eta=-\bar{\eta}_n$. Предположим, наконец, что целое число N - четное, то есть $N=2N_0$, величины η_n удовлетворяют условиям $\eta_{N_0+n}=-\bar{\eta}_n$, $\eta_n+\bar{\eta}_n\neq 0$, $n=1,\ldots,N_0$, а константы c и κ - чисто мнимые. С учетом сказанного выше положим при $n=1,\ldots,N_0$

$$\Psi_n=\epsilon_n\Phi_n\sigma,\quad \Phi_{N_0+n}=\sigma\Lambda\bar{\Phi}_n,\quad \Psi_{N_0+n}=\epsilon_n\Phi_n^*\Lambda, \qquad /36/$$

где $\epsilon_n^2=1$. Тогда при $n=1,\ldots,N_0$ справедливы равенства

$$[\Lambda,\Phi_n\Psi_n]=2\epsilon_n\begin{vmatrix}0 & \phi_n^2\\ -\psi_n^2 & 0\end{vmatrix},\qquad [\Lambda,\Phi_{N_0+n}\Psi_{N_0+n}]=2\epsilon_n\begin{vmatrix}0 & \bar{\psi}_n^2\\ -\bar{\phi}_n^2 & 0\end{vmatrix},$$

где ϕ_n и ψ_n - компоненты вектора-столбца Φ_n. Отсюда на основании /29/ и /31/ следует, что в рассматриваемом здесь случае система /28/ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+cq=2\kappa\sum_{n=1}^{N_0}\epsilon_n(\phi_n^2+\bar{\psi}_n^2),$$
$$\phi_n'+u\psi_n-\eta_n\phi_n=\psi_n'-\bar{u}\phi_n+\eta_n\psi_n=0,\quad n=1,\ldots,N. \qquad /37/$$

При $k_0=1$, $c=-2i$, $\kappa=-i$ первое уравнение этой системы имеет вид

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+2|u|^2u+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\sum_{n=1}^{N_0}\epsilon_n(\phi_n^2+\bar{\psi}_n^2),$$

то есть отличается от нелинейного уравнения Шредингера [6] выражением, стоящим в правой части этого равенства.

В следующем разделе приведена схема интегрирования системы /37/ в классе быстро убывающих по x функций.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ /37/

В этом разделе будет показано, что в классе быстро убывающих по x функций система /37/ может быть проинтегрирована с помощью

метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида /23/ с определенными посредством /29/ матрицами Λ и U. Более точно, пусть $u_0=u_0(x)$ - произвольная комплекснозначная функция x, достаточно быстро убывающая вместе со своими производными по x /до некоторого конечного, но зависящего от k_0 порядка/ при $x\to\pm\infty$. Предположим, что система уравнений

$$\phi'+u\psi-\eta\phi=0,\quad \psi'-\bar{u}\phi+\eta\psi=0 \qquad /38/$$

при $u=u_0(x)$ имеет ровно $2N_0$ точек дискретного спектра $\eta_1,\ldots,\eta_{N_0},-\bar{\eta}_1,\ldots,-\bar{\eta}_{N_0}$. Пусть, далее, $A_n(t)$ - произвольные непрерывные функции t, $n=1,\ldots,N_0$. Ниже будут указаны условия, при выполнении которых система /37/ имеет решение $u=u(x,t)$, $\phi_n=\phi_n(x,t)$, $\psi_n=\psi_n(x,t)$, $n=1,\ldots,N_0$, такое, что

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad /39/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x,t)\psi_n(x,t)\,dx=A_n(t),\quad n=1,\ldots,N_0. \qquad /40/$$

Для решения этой проблемы нам, очевидно, нужно найти, как меняются со временем данные рассеяния системы /38/, если потенциал $u=u(x,t)$ удовлетворяет системе /37/ и условиям /39/, /40/. С этой целью положим $\eta=i\zeta$, где $\zeta\in(-\infty,\infty)$, и возьмем решения ϕ_-,ψ_- и ϕ_+,ψ_+ системы /38/, удовлетворяющие требованиям

$$\phi_-\simeq 0,\quad \psi_-\simeq\exp(-i\zeta x),\quad x\to-\infty,$$
$$\phi_+\simeq\exp(i\zeta x),\quad \psi_+\simeq 0,\quad x\to\infty. \qquad /41/$$

Вместе с решением ϕ,ψ системе /38/ удовлетворяет также пара функций $\bar{\psi},-\bar{\phi}$. Поэтому матрицы F_0^- и F_0^+ вида

$$F_0^-=\begin{vmatrix}\bar{\psi}_- & \phi_-\\ -\bar{\phi}_- & \psi_-\end{vmatrix},\qquad F_0^+=\begin{vmatrix}\phi_+ & -\bar{\psi}_+\\ \psi_+ & \bar{\phi}_+\end{vmatrix} \qquad /42/$$

являются фундаментальными матрицами решений системы /38/. Значит, справедливо равенство

$$F_0^+=F_0^-S,\quad S=\begin{vmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{vmatrix}, \qquad /43/$$

где элементы $S_{\alpha\beta}$ матрицы S не зависят от x, α, $\beta = 1,2$. В силу равенства $\det F_0^- = \det F_0^+ = 1$ отсюда следует, что

$$S_{11} = \phi_+\psi_- - \phi_-\psi_+, \quad S_{12} = -\phi_-\bar{\phi}_+ - \psi_-\bar{\psi}_+,$$
$$S_{21} = \phi_+\bar{\phi}_- + \psi_+\bar{\psi}_-, \quad S_{22} = \bar{\phi}_+\bar{\psi}_- - \bar{\phi}_-\bar{\psi}_+, \qquad /44/$$

то есть

$$S_{11} = \bar{S}_{22}, \quad \bar{S}_{12} = -S_{21}, \quad \det S = |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1.$$

В соответствии с /25/ положим при $n = 1,\dots,N$

$$F_n^- = \int_{-\infty}^{x} \Psi_n(z)\, F_0^-(z,\zeta)\, dz,$$
$$F_n^+ = -\int_{x}^{\infty} \Psi_n(z)\, F_0^+(z,\zeta)\, dz. \qquad /45/$$

Определим, далее, матрицы $G_0^-, G_0^+, G_1^-, G_1^+, \dots, G_N^-, G_N^+$ посредством подстановки в равенства /26/ матриц $F_0^-, F_0^+, F_1^-, F_1^+, \dots$ $\dots, F_N^-, F_N^+$ вида /42/ и /45/. С помощью /27/ нетрудно убедиться, что при $n = 1,\dots,N$ справедливы равенства $G_n^- = G_n^+ \equiv 0$. С учетом этого факта на основе /26/, /27/, /30/, /32/, /41/ и /42/ получаем равенства

$$G_0^- = c(i\zeta)^{2k_0} F_0^- \Lambda, \quad G_0^+ = c(i\zeta)^{2k_0} F_0^+ \Lambda. \qquad /46/$$

Возьмем теперь вытекающее из /26/ и /46/ равенство

$$\frac{\partial F_0^+}{\partial t} + cA F_0^+ + \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n F_n^+ = c(i\zeta)^{2k_0} F_0^+ \Lambda,$$

заменим в нем F_0^+ на $F_0^- S$ и перейдем к пределу при $x \to -\infty$. В результате несложных вычислений получаем равенство

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c(i\zeta)^{2k_0} [\Lambda, S] = 0, \qquad /47/$$

определяющее эволюцию во времени матрицы S вида /43/. Как показывает это равенство, на эволюцию S-матрицы никак не влияет выражение, стоящее в правой части первого уравнения системы /37/.

Как известно, определенные посредством /41/ решения ϕ_-, ψ_- и ϕ_+, ψ_+ системы /38/ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Отсюда согласно /44/ следует, что функция S_{11} также допускает аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Далее, нулям $\zeta = \zeta_n$, $n = 1,\dots,N_0$, функции S_{11} в верхней полуплоскости соответствуют точки дискретного спектра оператора L, так как в силу /44/ справедливы равенства

$$\phi_+(x,\zeta_n) = B_n \phi_-(x,\zeta_n), \quad \psi_+(x,\zeta_n) = B_n \psi_-(x,\zeta_n), \qquad /48/$$

где величины B_n не зависят от x, $n = 1,\dots,N_0$. С помощью /38/ легко убеждаемся, что при любых $m, n = 1,\dots,N_0$ справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_+(x,\zeta_m)\psi_+(x,\zeta_n) + \phi_+(x,\zeta_n)\psi_+(x,\zeta_m)\}dx = 0, \quad m \neq n,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_+(x,\zeta_m)\bar{\phi}_+(x,\zeta_n) - \psi_+(x,\zeta_m)\bar{\psi}_+(x,\zeta_n)\}dx = 0. \qquad /49/$$

Кроме того, в соответствии с /38/ и /44/ находим, что при любом $n = 1,\dots,N_0$ выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\phi_+(x,\zeta_n)\psi_-(x,\zeta_n) + \phi_-(x,\zeta_n)\psi_+(x,\zeta_n)\}dx = i\left.\frac{\partial S_{11}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta_n}. \qquad /50/$$

Пусть $I_- = \mathrm{diag}(0,1)$, $I_+ = \mathrm{diag}(1,0)$. Согласно сказанному выше из равенств /42/ следует, что матрицы $f_0^- = F_0^- I_-$ и $f^+ = F_0^+ I_+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. На основании /45/ это значит, что матрицы $f_n^- = F_n^- I_-$ и $f_n^+ = F_n^+ I_+$ при $n = 1,\dots,N$ также допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Наконец, в силу /26/ отсюда следует, что и матрицы $g_n^- = G_n^- I_-$ и $g_n^+ = G_n^+ I_+$ при $n = 0,1,\dots,N$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Более того, в силу второго из равенств /26/ находим, что при $\eta = \eta_n = i\zeta_n$ имеют место тождества

$$\Psi_n(x)\Lambda f_0^-(x,\zeta_n) = \Psi_n(x)\Lambda f_0^+(x,\zeta_n) \equiv 0, \quad n = 1,\dots,N_0,$$

с помощью которых согласно /36/ получаем, что компоненты ϕ_n и ψ_n вектора-столбца Φ_n обязаны иметь вид

$$\phi_n = C_n \phi_+(x,\zeta_n), \quad \psi_n = C_n \psi_+(x,\zeta_n), \qquad /51/$$

где величины C_n не зависят от x, $n = 1,\dots,N_0$.

Вытекающие из /26/ равенства

$$\frac{\partial f_0^-}{\partial t} + cAf_0^- + \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n f_n^- = g_0^-, \qquad /52/$$

$$\frac{\partial f_0^+}{\partial t} + cAf_0^+ + \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n f_n^+ = g_0^+ \qquad /53/$$

на основе сказанного выше допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость. Кроме того, в соответствии с /42/ и /46/ справедливы равенства

$$g_0^- = -c(i\zeta)^{2k_0} f_0^-, \quad g_0^+ = c(i\zeta)^{2k_0} f_0^+.$$

С учетом /48/ находим, что при $\zeta = \zeta_m$ выполняются соотношения

$$f_0^+(x,\zeta_m) = B_m f_0^-(x,\zeta_m)\sigma, \quad g_0^+(x,\zeta_m) = -B_m g_0^-(x,\zeta_m)\sigma, \quad m = 1,\dots, N_0.$$

Умножим теперь равенство /52/ справа на матрицу $B_m\sigma$ и полученный результат вычтем из равенства /53/. В итоге получаем, что при $\zeta = \zeta_m$ имеет место матричное равенство

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} f_0^-(x,\zeta_m)\sigma + \kappa \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x)\,[f_n^+(x,\zeta_m) - B_m f_n^-(x,\zeta_m)\sigma] =$$

$$= -2B_m g_0^-(x,\zeta_m)\sigma, \quad m = 1,\dots, N_0.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x \to -\infty$. На основании /45/ имеем при $m = 1,\dots,N_0$ и $n = 1,\dots,N$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n^-(x,\zeta_m) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f_n^+(x,\zeta_m) = -\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(z) f_0^+(z,\zeta_m)\,dz.$$

В силу /36/ и /48/-/51/ при $n \neq m$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(z) f_0^+(z,\zeta_m)\,dz = 0,$$

а при $n = m$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m(z) f_0^+(z,\zeta_m)\,dz = H_m,$$

где H_m - вектор-строка с компонентами $h_{m,1}$ и $h_{m,2}$ вида

$$h_{m,1} = i\epsilon_m B_m C_m \left.\frac{\partial S_{11}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta_m}, \quad h_{m,2} = 0, \quad m = 1,\dots, N_0.$$

С помощью этих равенств получаем соотношение

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} - [\kappa h_{m,1} C_m + 2c(i\zeta_m)^{2k_0}]\,B_m = 0, \quad m = 1,\dots,N_0. \qquad /54/$$

В том случае, когда все нули $\zeta = \zeta_m$ функции S_{11} в верхней полуплоскости простые, справедливо неравенство

$$\left.\frac{\partial S_{11}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta_m} \neq 0, \quad m = 1,\dots, N_0.$$

Следовательно, выбирая входящие в равенство /51/ величины C_m так, чтобы выполнялось соотношение

$$iB_m C_m^2 \left.\frac{\partial S_{11}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta_m} = 2A_m, \quad m = 1,\dots, N_0, \qquad /55/$$

мы в итоге сможем удовлетворить условие /40/, а уравнение /54/ можем записать в виде

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} - 2[c(i\zeta_m)^{2k_0} + \kappa\epsilon_m A_m(t)]\,B_m = 0, \quad m = 1,\dots, N_0. \qquad /56/$$

Таким образом, по заданным функциям $A_m(t)$ согласно этому уравнению определяем величины B_m, а затем на основе /55/ находим C_m, $m = 1,\dots, N_0$.

Уравнения /47/ и /56/ полностью определяют эволюцию данных рассеяния системы /38/. В том случае, если все нули функции S_{11} в верхней полуплоскости простые, а сама функция S_{11} не обращается в нуль при любом вещественном ζ, с помощью полученных данных известным образом определяется ядро интегрального уравнения Гельфанда - Левитана, и задача, таким образом, сводится к решению этого уравнения. Решение $u = u(x, t)$ системы /37/, удовлетворяющее условию /39/, получается из решения уравнения Гельфанда - Левитана известным образом. Далее, в соответствии с /47/ указанные здесь ограничения на функцию S_{11} будут выполняться при любом $t > 0$, если они выполняются при $t=0$. Это налагает некоторые дополнительные требования на функцию $u_0 = u_0(x)$, о которых мы уже упоминали в начале этого раздела.

7. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Приведем еще один интересный пример системы /28/. Пусть снова $r_0 = 2$, $\Lambda = \mathrm{diag}(1, -1)$, а матрица U имеет вид

$$U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{vmatrix}, \qquad /57/$$

где функция u удовлетворяет условию $u = \bar{u}$. Как известно [5], в этом случае при любом $k_0 > 0$ существует оператор A вида

$$A = \partial^{2k_0+1} + \sum_{k=0}^{2k_0-1} A_k \partial^k ,$$

такой, что оператор $\Delta = [A, L]$ является симметричной матрицей с нулевыми элементами на главной диагонали, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{vmatrix}. \qquad /58/$$

При этом величина q является полиномом от функции u и ее производных по x до $(2k+1)$-го порядка, а матрицы $A_0, \ldots, A_{2k_0-1}$ удовлетворяют условию /32/.

Рассмотрим теперь уравнения /33/ и /34/ с потенциалом U вида /57/. Нетрудно убедиться, что если вектор-столбец $\Phi = \Phi_n$ с компонентами ϕ_n и ψ_n удовлетворяет уравнению /33/ при $\eta = \eta_n$, то вектор-строка $\Psi = \tilde{\Phi}_n \sigma$ с компонентами ψ_n и ϕ_n удовлетворяет уравнению /34/ при $\eta = \eta_n$. Далее, легко проверить, что если вектор-столбец $\Phi = \Phi_n$ удовлетворяет уравнению /33/ при $\eta = \eta_n$, то вектор-столбец $\Phi = \Lambda\sigma\Phi_n$ удовлетворяет этому же уравнению при $\eta = -\eta_n$, а вектор-строка $\Psi = \tilde{\Phi}_n\Lambda$ удовлетворяет уравнению /34/ при $\eta = -\eta_n$. Наконец, заметим, что если вектор-столбец

$\Phi = \Phi_n$ удовлетворяет уравнению /33/ при $\eta = \eta_n$, то вектор-столбец $\Phi = \bar{\Phi}_n$ удовлетворяет этому же уравнению при $\eta = \bar{\eta}_n$, вектор-строка $\Psi = \Phi_n^* \sigma$ удовлетворяет уравнению /34/ при $\eta = \bar{\eta}_n$, вектор-столбец $\Phi = \Lambda\sigma\bar{\Phi}_n$ удовлетворяет уравнению /33/ при $\eta = -\bar{\eta}_n$, а вектор-строка $\Psi = \Phi_n^*\Lambda$ удовлетворяет уравнению /34/ при $\eta = -\bar{\eta}_n$. Предположим, что целое число N кратно четырем, то есть $N = 4N_0$, величины η_n удовлетворяют условиям $\eta_{N_0+n} = -\eta_n$, $\eta_{2N_0+n} = \bar{\eta}_n$, $\eta_{3N_0+n} = -\bar{\eta}$, $\eta_n + \bar{\eta}_n \neq 0$, $n = 1, \ldots, N_0$, а константы c и κ - действительные. С учетом сказанного выше положим при $n = 1, \ldots, N_0$

$$\Psi_n = \epsilon_n \tilde{\Phi}_n \sigma, \quad \Phi_{N_0+n} = \Lambda\sigma\Phi_n, \quad \Psi_{N_0+n} = \epsilon_n \tilde{\Phi}_n \Lambda,$$

$$\Phi_{2N_0+n} = \bar{\Phi}_n, \quad \Psi_{2N_0+n} = \epsilon_n \Phi_n^* \sigma, \quad \Phi_{3N_0+n} = \Lambda\sigma\bar{\Phi}_n, \quad \Psi_{3N_0+n} = \epsilon_n \Phi_n^* \Lambda,$$

где $\epsilon_n^2 = 1$. Тогда при $n = 1, \ldots, N_0$ справедливы равенства

$$[\Lambda, \Phi_n\Psi_n] = 2\epsilon_n \begin{vmatrix} 0 & \phi_n^2 \\ -\psi_n^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad [\Lambda, \Phi_{N_0+n}\Psi_{N_0+n}] = 2\epsilon_n \begin{vmatrix} 0 & -\psi_n^2 \\ \phi_n^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$[\Lambda, \Phi_{2N_0+n}\Psi_{2N_0+n}] = 2\epsilon_n \begin{vmatrix} 0 & \bar{\phi}_n^2 \\ -\bar{\psi}_n^2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$[\Lambda, \Phi_{3N_0+n}\Psi_{3N_0+n}] = 2\epsilon_n \begin{vmatrix} 0 & -\bar{\psi}_n^2 \\ \bar{\phi}_n^2 & 0 \end{vmatrix},$$

где ϕ_n и ψ_n - компоненты вектора-столбца Φ_n. Отсюда на основании /57/ и /58/ следует, что в рассматриваемом сейчас случае система /28/ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cq = 2\kappa \sum_{n=1}^{N_0} \epsilon_n (\phi_n^2 + \bar{\phi}_n^2 - \psi_n^2 - \bar{\psi}_n^2),$$

$$\phi_n' + u\psi_n - \eta_n\phi_n = \psi_n' - u\phi_n + \eta_n\psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N_0. \qquad /59/$$

Отметим, что при получении этой системы мы нигде не предполагали, что $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, $n = 1, \ldots, N_0$. В том случае, если равенство $\eta_n = \bar{\eta}_n$ действительно имеет место при некотором $n = m$, это приводит к тому, что компоненты ϕ_m и ψ_m вектора-столбца Φ_m могут быть взяты вещественными, и, следовательно, некоторые слагаемые в правой части первого уравнения системы /59/ встречаются дважды. При $k_0 = 1$, $c = 4$, $\kappa = 1$ первое уравнение системы /59/ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(2u^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 2\sum_{n=1}^{N_0} \epsilon_n(\phi_n^2 + \bar{\phi}_n^2 - \psi_n^2 - \bar{\psi}_n^2),$$

то есть отличается от модифицированного уравнения Кортевега - де Вриса [7] выражением, стоящим в правой части этого равенства.

Интегрирование системы /59/ очень похоже на интегрирование системы /37/ и поэтому опущено.

8. МАТРИЧНЫЙ ОПЕРАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА

Результаты, полученные в разделе 4, допускают обобщение на случай матричного оператора произвольного порядка. Однако, желая избежать громоздких формул, мы ограничимся рассмотрением случая матричного оператора второго порядка. Итак, пусть

$$L = \Lambda\partial^2 + U_1\partial + U_0 , \qquad /60/$$

где Λ, U_1 и U_0 - квадратные матрицы произвольного порядка $r_0 > 1$. При этом Λ - диагональная матрица с постоянными элементами на главной диагонали, а матрица U_1 имеет нули на главной диагонали. Пусть, далее, A - дифференциальный оператор вида /24/, такой, что оператор $\Delta = [A , L]$ имеет первый порядок, то есть $\Delta = \Delta_1\partial + \Delta_0$, где Δ_1 и Δ_0 - квадратные матрицы порядка r_0. Хорошо известно, что на главной диагонали у матрицы Δ_1 стоят нули.

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L - \eta) F_0 = 0, \quad F_n' = \Psi_n F_0 , \quad n = 1,\dots, N , \qquad /61/$$

относительно неизвестных матриц $F_0, F_1, \dots, F_N$. При этом предполагается, что F_0 - квадратная матрица порядка r_0, а матрицы $F_1, \dots, F_N$ и $\Psi_1, \dots, \Psi_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов. Положим

$$G_0 = \frac{\partial F_0}{\partial t} + cAF_0 + \kappa\sum_{n=1}^{N} \Phi_n F_n ,$$

$$G_n = \Psi_n \Lambda F_0' - \Psi_n' \Lambda F_0 + \Psi_n U_1 F_0 - (\eta - \eta_n) F_n , \quad n = 1,\dots, N , \qquad /62/$$

где матрицы $\Phi_1, \dots, \Phi_N$ имеют r_0 строк и r_1 столбцов и, следовательно, G_0 - квадратная матрица порядка r_0, а матрицы $G_1, \dots, G_N$ имеют r_1 строк и r_0 столбцов.

Потребуем теперь, чтобы определенные посредством /24/ и /60/-/62/ матрицы $G_0, G_1, \dots, G_N$ удовлетворяли условиям

$$(L - \eta) G_0 = \kappa\sum_{n=1}^{N} \Phi_n G_n , \quad \frac{\partial G_n}{\partial x} \equiv 0, \; n = 1,\dots, N . \qquad /63/$$

С помощью несложных вычислений находим, что для справедливости условий /63/ необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = \kappa\Gamma,$$

$$\Lambda\Phi_n'' + U_1\Phi_n' + U_0\Phi_n = \eta_n\Phi_n , \qquad /64/$$

$$\Psi_n''\Lambda - (\Psi_n U_1)' + \Psi_n U_0 = \eta_n \Psi_n , \quad n = 1,\dots, N ,$$

где оператор Γ имеет вид

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{N} \{[\Lambda, \Phi_n\Psi_n]\partial + 2\Lambda(\Phi_n\Psi_n)' + [U_1, \Phi_n\Psi_n] - [\Lambda, \Phi_n\Psi_n']\}. \qquad /65/$$

Пусть $r_0 = 2$, $k_0 = 0$. Положим

$$U_1 = \begin{vmatrix} 0 & p \\ -\bar{p} & 0 \end{vmatrix}, \quad U_0 = \begin{vmatrix} u & q + \frac{1}{2}p' \\ \bar{q} - \frac{1}{2}\bar{p}' & v \end{vmatrix}, \quad c_0 = \frac{a_1 - a_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad A_1 = \mathrm{diag}(a_1, a_2), \quad A_0 = c_0 U_1 ,$$

где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $a_1 \neq a_2$ - произвольные вещественные константы. В этом случае система /64/ в соответствии с /65/ принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c(aq + b\frac{\partial p}{\partial x}) = \kappa\lambda\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \phi_n \bar{\psi}_n ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 c\frac{\partial u}{\partial x} + cc_0\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|p|^2 + p\bar q + \bar p q\right) =$$

$$= \kappa\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n\left(2\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}|\phi_n|^2 + p\bar\phi_n\psi_n + \bar p\phi_n\bar\psi_n\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a_2 c\frac{\partial v}{\partial x} + cc_0\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|p|^2 - p\bar q - \bar p q\right) =$$

$$= \kappa\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n\left(2\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}|\psi_n|^2 - p\bar\phi_n\psi_n - \bar p\phi_n\bar\psi_n\right),$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + ca_0\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{4}ac\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - cc_0(u - v)p =$$

$$= \kappa\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n\left[2\lambda_0\frac{\partial}{\partial x}(\phi_n\bar\psi_n) + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\bar\psi_n - \phi_n\frac{\partial\bar\psi_n}{\partial x}\right) -\right.$$

$$\left.-(|\phi_n|^2 - |\psi_n|^2)p\right],$$

$$\lambda_1\phi_n'' + p\psi_n' + u\phi_n + \left(q + \frac{1}{2}p'\right)\psi_n = \eta_n\phi_n,$$

$$\lambda_2\psi_n'' - \bar p\phi_n' + \left(\bar q - \frac{1}{2}\bar p'\right)\phi_n + v\psi_n = \eta_n\psi_n, \quad n = 1,\dots,N,$$

где

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad a = a_1 - a_2, \; a_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

$$b = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) + a_1 - 2c_0\lambda_1 = -\frac{1}{2}(a_1 - a_2) + a_2 - 2c_0\lambda_2,$$

кроме того, u, v - вещественные функции, c, κ и $\eta_1, \dots, \eta_N$ - вещественные параметры, а $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1, \dots, N$.

9. УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА - ПЕТВИАШВИЛИ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Изложенная выше процедура нахождения нелинейных интегрируемых систем применима также в случае двух пространственных переменных. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример. Пусть L и A - линейные дифференциальные операторы вида

$$L = \partial_x^2 - i\partial_y + u, \quad A = 4\partial_x^3 + 3(u\partial_x + \partial_x \cdot u) + ip, \qquad /66/$$

где ∂_x и ∂_y - операторы дифференцирования по пространственным переменным x и y соответственно, а u и p - скалярные функции. Рассмотрим линейную систему уравнений вида

$$(L - \lambda)f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \psi_n f_0, \quad n = 1,\dots,N, \qquad /67/$$

относительно функций $f_0, f_1, \dots, f_N$. Функции $\psi_1, \dots, \psi_N$ будут определены ниже. Далее, с помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_N$ системы /67/ определим величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + Af_0 + 4\sum_{n=1}^{N}\phi_n f_n,$$

$$/68/$$

$$g_n = \psi_n\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial\psi_n}{\partial x}f_0 - i\frac{\partial f_n}{\partial y} - (\lambda - \lambda_n)f_n, \quad n = 1,\dots,N,$$

где $\phi_1, \dots, \phi_N$ - некоторые /пока неопределенные/ функции.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять функции u, p, $\phi_1, \dots, \phi_N$, $\psi_1, \dots, \psi_N$ для того, чтобы определенные посредством /66/-/68/ величины $g_0, g_1, \dots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$(L - \lambda)g_0 = 4\sum_{n=1}^{N}\phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} \equiv 0, \quad n = 1,\dots,N. \qquad /69/$$

С помощью несложных вычислений находим, что для справедливости условий /69/ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 8\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_n\psi_n),$$

$$/70/$$

$$(L - \lambda_n)\phi_n = (\tilde L - \lambda_n)\psi_n = 0, \quad n = 1,\dots,N,$$

где

$$\tilde{L} = \partial_x^2 + i\partial_y + u. \qquad /71/$$

С учетом /66/ первое из равенств /70/ эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 8\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}(\phi_n\psi_n) = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Исключив отсюда p, получаем уравнение

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\sum_{n=1}^{N}\phi_n\psi_n\right)\right] = 0.$$

В том случае, когда все λ_n - вещественные величины, мы можем в силу /71/ положить $u = \bar{u}$, $\psi_n = \epsilon_n\bar{\phi}_n$, где $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1, \ldots, N$. Таким образом, система /70/ принимает свой окончательный вид

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\sum_{n=1}^{N}\epsilon_n|\phi_n|^2\right)\right] = 0,$$

$$i\frac{\partial\phi_n}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2} + (u - \lambda_n)\phi_n, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad /72/$$

При $\phi_n \equiv 0$ первое уравнение этой системы обращается в хорошо известное уравнение Кадомцева - Петвиашвили [8]. Заметим, что в работе [9] для этой системы было найдено операторное представление, в работе [10] построено многосолитонное решение, а в работах [11,12] исследуется динамика многосолитонного решения. Однако изложенный в этом разделе подход позволяет по-иному взглянуть на проблему интегрирования системы /72/.

В заключение необходимо отметить, что все системы, получаемые с помощью изложенной в данной работе процедуры, обладают одним замечательным свойством: они могут описывать процессы захвата и удержания солитонов. Это значит, что все эти системы имеют решения, описывающие солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в различного рода колебательные режимы и пребывают в них во все последующие моменты времени. Впервые это явление было обнаружено в работе [13], а затем исследовалось более детально в работах [3,12,14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax P.D. - Commun. Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
2. Gardner C.S. et al. - Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, No.19, p.1095.
3. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
4. Захаров В.Е. - ЖЭТФ, 1973, т.65, вып.1, с.219.
5. Мельников В.К. - ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. - ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.1, с.118.
7. Ablowitz M.J. et al. - Phys.Rev.Lett., 1973, v.31, No.2, p.125.
8. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. - ДАН СССР, 1970, т.192, № 4, с.753.
9. Mel'nikov V.K. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, No.2, p.129.
10. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1987, v.112, No.4, p.639.
11. Mel'nikov V.K. - J.Math.Phys., 1987, v.28, No.11, p.2603.
12. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-232, Дубна, 1988.
13. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-55, Дубна, 1988.
14. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-114, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1988 года.