сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-725

И.Д.Манджавидзе*

НЕСТАНДАРТНЫЙ ПОДХОД К СТАРОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

* Тбилисский государственный университет

1988

I. Введение

В работе /I/ на простейших примерах показано, что квантовая теория неявно содержит определение, фиксирующее меру интегралов по путям. В данной работе это утверждение будет распространено на калибровочные теории поля.

Особенность обсуждаемого подхода заключается в предложении вычислять непосредственно вероятности процессов, минуя промежуточный этап вычисления амплитуд. Это тривиальное, на первый взгляд, предложение позволяет увидеть определенную интерференционную картину между сходящимися и расходящимися волнами, которая возникает при вычислении свертки $\langle in|out\rangle\langle in|out\rangle^* = \langle in|out\rangle\langle out|in\rangle$. Оказывается, что интерференция приводит к полному взаимному сокращению всех вкладов, нефизических с классической точки зрения, что устанавливает тесную связь между классическими и квантовым описанием и, таким образом, определяет меру функциональных интегралов.

Мы найдем (см. II главу), что вклады в функциональные интегралы определяются всеми точными решениями неоднородных полевых уравнений, где неоднородность является адиабатическим источником квантовых возмущений (связь с методом стационарной фазы устанавливается в У главе). Качественно это сходно с описанием классической системы, помещенной в случайно флуктуирующую среду /2/.

Цель работы - показать (см. IУ и У главы) на примерах из калибровочных теорий (электродинамики и хромодинамики), что в таком подходе восстанавливается каноническая теория возмущений. Результат работы во многом имеет лишь методическую ценность, ее следует понимать как введение в более богатые по содержанию неабелевы калибровочные теории (подробнее об этом см. в УI главе).

2. Квантовый аналог принципа Даламбера для калибровочных теорий

Рассмотрим абелеву калибровочную теорию. Нам достаточно будет вычислить амплитуду перехода вакуума в вакуум

$$Z_a = \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS_a(A)} \Delta_e(A), \tag{2.1}$$

поскольку все результаты просто обобщаются на произвольные многочастичные амплитуды. В (2.I) действие

$$S_a(A) = -\frac{1}{4}\int dx \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.2}$$

и фермионный детерминант

$$\Delta_e(A) = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \, e^{i\int dx \, \bar{\Psi}(\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - m)\Psi}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{D}_\mu$ - ковариантная производная.

Подразумевается, что в интеграле (2.1) имеется сомножитель (явно не выписанный), гарантирующий сходимость, который после всех вычислений следует положить равным единице. Соответственно будем полагать пока, что функциональный интеграл (2.I) неопределенный, не содержит каких-либо граничных условий.

Следуя рецепту работы /I/, найдем, используя (2.I),

$$|Z_a|^2 = \int \mathcal{D}A_\mu^+ \mathcal{D}A_\mu^- \, e^{iS_a(A^+) - iS_a(A^-)} \Delta_e(A^+)\Delta_e^*(A^-). \tag{2.4}$$

Отметим, что в (2.I) интегрирование включает также конфигурации полей, которые могут быть получены друг из друга как калибровочными:

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \omega, \tag{2.5}$$

так и конформными:

$$A_\mu \to A_\mu + k^\nu \partial_\nu A_\mu + (\partial_\mu k^\nu) A_\nu, \tag{2.6}$$

преобразованиями ($k_\mu(x)$ - конформный вектор Киллинга). Однако, вычисляя $|Z|^2$, мы должны полагать, что поля A_μ^+ и A_μ^- выбраны в одинаковых калибровочных и конформных представлениях. Это отвечает требованию, которое следует из определения вероятности $\sim |Z|^2$, что состояния, построенные из полей A_μ^+ и полей A_μ^-, принадлежат одному гильбертовскому пространству. Чтобы быть последовательными, мы должны ввести в $S(A)$ связь, нарушающую симметрии,и после всех вычислений соответствующий лагранжев множитель обратить в нуль. В данной работе мы полагаем, что этот предельный переход для рассматриваемых теорий существует. Предполагая неявно такую возможность, мы можем не интересоваться симметрией подынтегрального выражения в (2.4).

Разложим теперь $A_\mu^\pm$ на "истинную" траекторию A_μ и виртуальное отклонение a_μ от A_μ :

$$A_\mu^\pm(x) = A_\mu(x) \pm a_\mu(x). \tag{2.7}$$

Произведя в (2.4) замену переменных (2.7), находим

$$\mathcal{D}A_\mu^+ \mathcal{D}A_\mu^- = \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}a_\mu \tag{2.8}$$

и

$$S_a(A+a) - S_a(A-a) = \int dx \, a^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

если пренебречь поверхностным членом:

$$\int dx \, \partial^\nu (a^\mu F_{\mu\nu}) = 0. \tag{2.10}$$

Поскольку $\mathcal{A}^{+}_{\mu}$ и $\mathcal{A}^{-}_{\mu}$ принадлежат одному гильбертовскому пространству, естественно, что правая часть в (2.9) вследствие условия (2.10), которое играет роль граничных условий к интегралам в (2.4), неинвариантна относительно калибровочных преобразований поля $a_\mu(x)$. Отказ от условия (2.10), которое восстанавливает калибровочную симметрию, ведет, однако, к нежелательным следствиям.

Воспользуемся теперь следующей очевидной формулой:

$$\Phi(\mathcal{A}, a) = \hat{e}(a', j)\, \Phi(\mathcal{A}, a')\, e^{-i\int dx\, a_\mu j^\mu}, \tag{2.11}$$

где Φ – произвольный несингулярный при $a_\mu = 0$ функционал и введен оператор

$$\hat{e}(a,j) = \lim_{a_\mu, j_\mu = 0} \exp\left\{ i\int dx\, \frac{\delta}{\delta a_\mu(x)}\, \frac{\delta}{\delta j^\mu(x)} \right\}, \tag{2.12}$$

разложение которого генерирует теорию возмущений. Тогда, после замены (2.7), мы получим, что

$$|Z_a|^2 = \hat{e}(a', j)\int D\mathcal{A}_\mu\, \Delta_e(\mathcal{A}+a')\, \Delta_e^{*}(\mathcal{A}-a') \times \int D a_\mu \exp\left\{ i\int dx\, a^\mu(\partial^\nu F_{\mu\nu} - j_\mu)\right\} = \tag{2.13}$$

$$= N'\hat{e}(a,j)\int D\mathcal{A}_\mu\, \Delta_e(\mathcal{A}+a)\, \Delta_e^{*}(\mathcal{A}-a) \prod_{x,\mu}\delta(\partial^\nu F_{\mu\nu} - j_\mu),$$

где N' – несущественная константа, которая сократится при нормировке.

Функциональная δ-функция под интегралом в (2.13) определяет связь между классическим и квантовым описанием системы с бесконечным числом степеней свободы. Нетрудно проверить, что подобное определение меры обобщает на квантовую теорию классический принцип Даламбера. В такую схему без каких-либо затруднений могут

быть включены произвольные внешние источники, что позволяет вычислять вероятности любых процессов в любой лагранжевой теории поля.

Поступая точно так же, как при выводе (2.13), в неабелевой калибровочной теории мы получим, используя более компактные матричные обозначения, следующее выражение:

$$|Z_{na}|^2 = N'\hat{e}(b,j)\int DB_\mu\, e^{i\bar{S}_{na}(B,b)} \times \tag{2.14}$$

$$\times\, \Delta_q(B+b)\, \Delta_q^{*}(B-b) \prod_{x,\mu}\delta(\partial^\nu G_{\mu\nu} - j_\mu),$$

где $G_{\mu\nu}$ – тензор напряженности поля B_μ, Δ_q – фермионный (кварковый) детерминант и

$$\bar{S}_{na}(B,b) = S_{na}(B+b) - S_{na}(B-b) - \int dx\, \mathrm{Sp}\, b_\mu(x)\, j^\mu(x) \tag{2.15}$$

– остаток разложения действия ($S_{na}(B+b) - S_{na}(B-b)$) по степеням $b_\mu(x)$, $\bar{S}_{na} = O(b^3)$.

Итак, мы видим, чтобы вычислить $|Z|$, нам надо знать точные решения соответствующих полевых уравнений и затем вычислить сумму ряда теории возмущений, который получается из разложения по степеням дифференциального оператора $\hat{e}$.

3. Классические решения полевых уравнений

Чтобы вычислить оставшийся интеграл в (2.13), нам надо знать все точные решения уравнения

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = j_\mu \tag{3.1}$$

в виде ряда по степеням $j_\mu(x)$, что предполагает адиабатическое включение квантовых возмущений.

Граничным условием к уравнению (3.I) (т.е. к интегралам по A_μ и a_μ в (2.I3)) должно служить условие (2.I0), которое запишем в виде

$$\int_{S_\infty} ds^\mu \, a^\nu F_{\mu\nu} = 0, \tag{3.2}$$

если поля $A^\pm_\mu$ несунгулярны. Здесь S_∞ – бесконечно удаленная гиперповерхность. Среди всех возможных решений (3.2) мы выберем следующее:

$$A_\mu(x) = 0 \quad , \quad x_\mu \in S_\infty , \tag{3.3}$$

или, что то же самое, $A^\pm_\mu(x) = \pm a_\mu(x)$, $x_\mu \in S_\infty$. Т.е. на бесконечности поля $A^\pm_\mu$ могут возникать лишь флуктуативно, что согласуется с определением Z как амплитуды перехода вакуума в вакуум. Итак, в дальнейшем нас будут интересовать только точные (в силу определения δ -функции), несингулярные (т.к. условия (2.I0) и (3.2) эквивалентны), достаточно быстро убывающие на бесконечности решения (3.I).

Уравнение (3.I) линейно, и решением его, удовлетворяющим перечисленным выше условиям, будет

$$\bar{A}_\mu(x) = \int dy\, \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y)\, j^\nu(y), \tag{3.4}$$

где $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ – функция Грина в заданной калибровке. Надо отметить, чтобы сохранить лоренц-инвариантный смысл причинности, $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ должно совпадать с фейнмановским пропагатором, что ведет к необходимости рассматривать комплексные решения (3.I). Однако (2.I3) было выведено в предположении, что действие S_a эрмитово, и, таким образом, если сохранить это условие, возникнет противоречие с условием аналитичности Z .

Чтобы вычислить оставшийся интеграл в (2.I4), нам надо найти все решения уравнения

$$\mathcal{D}^\mu G_{\mu\nu} = j_\nu \tag{3.5}$$

в виде ряда по степеням $j_\mu(x)$ при тех же условиях, что и в электродинамике. Поскольку уравнение (3.5) нелинейно, его решения следует искать в виде

$$\bar{B}^i_\mu(x) = B^i_\mu(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int \prod_1^k (dy_\ell \, j_{\mu_\ell}(y_\ell))\, \gamma^i_k(x, y_1 \dots y_\ell)^{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv \tag{3.6}$$

$$\equiv B^i_\mu(x) + \Gamma^i_\mu(x|j),$$

где B^i_μ – одно из решений однородного уравнения:

$$\mathcal{D}^\mu G_{\mu\nu} = 0. \tag{3.7}$$

Как известно, это уравнение имеет точные регулярные решения /3/ (напомним здесь, что все вычисления проводятся в метрике Минковского). Отметим также, что в отличие от электродинамики нетривиальные решения (3.6) нарушают и калибровочную, и конформную симметрии действия.

В (3.6) γ^i_k отвечает вкладу $(k+1)$ -точечной древесной диаграммы, описывающей распад глюонов в классическом поле B^i_μ . Так же, как в электродинамике, в (3.6) надо определить правила обхода сингулярности на световом конусе. Решение этого вопроса мы отложим до У главы.

4. Структура рядов теории возмущений

Итак, пусть в (2.I) интегрирование ведется по действительным полям. Тогда в (3.4) $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ – четная функция Грина, определенная в смысле главного значения.

Следующий вопрос, который нам надо обсудить, связан с тем, что в силу определения δ -функции при вычислении интеграла (2.I3) надо просуммировать по всем решениям уравнения (3.I). Для рассматриваемой абелевой теории (с учетом условий, накладываемых на решения полевых уравнений) это означает необходимость суммировать по всем калибровочно-эквивалентным решениям (3.I), так как каждое из решений нарушает только калибровочную симметрию действия. Чтобы определить меру интеграла по всем калибровкам, можно воспользоваться подстановкой Фаддеева-Попова. Пусть

$$1 = \det\left(\frac{\delta f}{\delta \omega}\right)_0 \int \mathcal{D}\omega \prod_x \delta(f(A^\omega)), \tag{4.I}$$

где A^ω_μ – потенциал в заданной калибровке, и уравнение

$$f(A^\omega) = 0 \tag{4.2}$$

однозначно фиксирует калибровку ω . Подставив (4.I) в (2.I3), получим

$$|Z_a|^2 = N' \det\left(\frac{\delta f}{\delta \omega}\right)_0 \hat{e} \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}A^\omega_\mu \prod_x \delta(f(A^\omega)) \times \prod_{x,\mu} \delta(\partial^\nu F^\omega_{\mu\nu} - j_\mu) \Delta_e(A^\omega + a) \Delta^*_e(A^\omega - a), \tag{4.3}$$

поскольку $\delta(f(A^\omega))$ действует под интегралом как проекционный оператор – выделяет поля в данной калибровке.

В результате, используя решение (3.4), находим

$$|Z_a|^2 = N \hat{e}(a,j) \Delta_e(\bar{A} + a) \Delta^*_e(\bar{A} - a), \tag{4.4}$$

где несущественная константа

$$N = N' \det\left(\frac{\delta f}{\delta \omega}\right)_0 \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}A_\mu \prod_x \delta(f(A)) \times \prod_{x,\mu} \delta(\partial^\nu F_{\mu\nu}) \tag{4.5}$$

сократится при нормировке. Надо заметить, что в данном подходе необходимость суммировать по всем калибровкам – следствие определения δ -функции, т.е. необходимости учитывать все решения классических полевых уравнений. Иными словами, решения уравнений как бы проявляют симметрию классического (неперенормированного) действия, что и позволяет проводить все вычисления, оставаясь последовательно в рамках ковариантной лагранжевой схемы.

Рассмотрим теперь подробнее результат действия оператора

$$\hat{e}(a,j) = \lim_{a_\mu, j_\mu = 0} \exp\left\{ i \int dx\, \hat{a}_\mu(x) \hat{j}^\mu(x) \right\}. \tag{4.6}$$

Здесь введены обозначения: $\hat{a}_\mu \equiv \delta / \delta a^\mu$, $\hat{j}_\mu \equiv \delta / \delta j^\mu$.

В дальнейшем знак " $\wedge$ " будет означать вариацию по соответствующей величине. Поскольку

$$\prod_{k=1}^{n} \hat{a}^{\mu_k} \Delta_e(\bar{A} + a) \Delta^*_e(\bar{A} - a) \Big|_0 = \sum_{k_1, k_2} (-1)^{k_2} \frac{n!}{k_1!\, k_2!} \delta_{k_1 + k_2, n} \times \Delta_e^{\mu_1 \dots \mu_{k_1}}(\bar{A}) \left(\Delta_e^{\mu_1 \dots \mu_{k_2}}(\bar{A})\right)^*, \quad \prod_1^k \hat{\bar{A}}^{\mu_i} \Delta_e(\bar{A}) \equiv \Delta_e^{\mu_1 \dots \mu_k}(\bar{A}), \tag{4.7}$$

(4.I) можно записать в эквивалентной форме:

$$|Z_a|^2 = N \lim_{\bar{A}_\mu = 0} \lim_{A^\pm_\mu = \bar{A}} \exp\left\{ i \int dx\, \hat{j}_\mu (\hat{A}^+ - \hat{A}^-)^\mu \right\} \times \Delta_e(A^+) \Delta^*_e(A^-). \tag{4.8}$$

Здесь вычисление пределов следует проводить в указанном порядке.

Формулу (4.7) удобнее переписать в более симметричном виде, если учесть, используя (3.4), что

$$\hat{j}_\mu(x) = \int dy\, \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \hat{\bar{A}}^\nu(y). \tag{4.9}$$

Тогда, подставив (4.9) в (4.8), получим

$$|Z_a|^2 = N \lim_{A_\mu = 0} \lim_{A^\pm_\mu = A_\mu} \exp\left\{ i \int dx\,dy\, \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y)\, \hat{A}^\mu(x) (\hat{A}^+ - \hat{A}^-)^\nu \right\} \times \Delta_e(A^+)\, \Delta_e^*(A^-). \tag{4.10}$$

Отсюда уже нетрудно найти, что

$$|Z_a|^2 = N \left| e^{\frac{i}{2}\int dx\,dy\, \hat{A}^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \hat{A}^\nu(y)} \Delta_e(A) \right|^2. \tag{4.11}$$

Эту формулу можно получить методом стационарной фазы, если грин-новские функции определять в смысле главного значения и если вклады в Z и Z^* выбирать в одной и той же калибровке (чтобы $|Z|^2$ было пропорционально объему калибровочной группы в первой степени, см. (4.5)).

Справедливость (4.11) проще показать непосредственными вычислениями, рассмотрев каждый член разложения в (4.11) по отдельности. Так, первый нетривиальный член

$$\sim i \hat{A}^\nu \left\{ \Delta_e (\Delta_e^\mu)^* - \Delta_e^\mu \Delta_e^* \right\} \mathcal{D}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.12}$$

что естественно, поскольку $|Z|^2$ должно быть действительно. Соответственно, можно показать, что все нечетные степени $(\hat{A}^+ - \hat{A}^-)_\mu$ приводят к равным нулю вкладам.

Во втором порядке по $(\hat{A}^+ - \hat{A}^-)_\mu$ мы получим

$$\int \prod_i^2 dx_i\, dy_i\, G_{\mu_i \nu_i}(x_i - y_i) \Big\{ \Delta_e^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}(x_1,x_2,y_1,y_2)\Delta_e^* + 2\Delta_e^{\nu_1\nu_2\mu_1}(x_1,x_2,y_1)(\Delta_e^{\mu_2}(y_2))^* + 2\Delta_e^{\mu_1\mu_2}(x_1,x_2)(\Delta_e^{\nu_1\nu_2}(y_1,y_2))^* - 2\Delta_e^{\nu_1\nu_2\mu_2}(x_1,x_2,y_2)(\Delta_e^{\mu_1}(y_1))^* - 2\Delta_e^{\nu_1\mu_2}(y_1,x_2)(\Delta_e^{\mu_1\nu_2}(x_1,y_2))^* - \Delta_e^{\mu_1\nu_1}(x_1,y_1)(\Delta_e^{\mu_2\nu_2}(x_2,y_2))^* \Big\}. \tag{4.13}$$

Здесь важно отметить сокращение перекрестных вкладов, в которых имеется связь за счет обмена пропагатором $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ между Z и Z^*: $\Delta_e^{\nu_1\nu_2\mu_1}(\Delta_e^{\mu_2})^*$ сокращается с $\Delta_e^{\nu_1\nu_2\mu_2}(\Delta_e^{\mu_1})$ и $\Delta_e^{\mu_1\mu_2}(\Delta_e^{\nu_1\nu_2})^*$ сокращается с $\Delta_e^{\nu_1\mu_2}(\Delta_e^{\mu_1\nu_2})^*$. Подобное сокращение имеется во всех порядках по $(\hat{A}^+ - \hat{A}^-)_\mu$. В результате суммирования оставшихся вкладов, добавив сюда также и сокращающиеся вклады типа (4.12) (но не содержащие перекрестных членов), мы получим выражение (4.11), в котором вклады в Z и Z^* расцепляются.

Исследуем теперь структуру ряда теории возмущений в неабелевых калибровочных теориях, использовав несколько иной подход. Подставив (3.6) в (2.14), мы найдем

$$|Z_{na}|^2 = N' \hat{e} \sum_i \int_{B^i} e^{i \bar{S}_{na}(B^i + \Gamma^i, b)} \times \Delta_g^{-1}(B^i + \Gamma^i)\, \Delta_g(B^i + \Gamma^i + b)\, \Delta_g^*(B^i + \Gamma^i - b), \tag{4.14}$$

здесь i нумерует все (включая тривиальное) решения уравнения (3.7) и $\int_{B^i}$ означает интегрирование по всем конфигурациям классического поля B^i_μ, которые могут быть получены друг из друга как калибровочными, так и конформными преобразованиями, нарушенными данным решением B^i_μ. Так же, как для электродинамики, чтобы определить меру $\int_{B^i}$, надо воспользоваться подстановкой Фаддеева-Попова.

Поскольку Γ^i_μ нелинейно зависит от $j_\mu(x)$, вычислять, используя (4.14), не совсем удобно (это разложение эквивалентно разложению по степеням $\hbar$). Учитывая определение глюонного детерминанта Δ_g, поступим следующим образом. Очевидно, что (4.14) эквивалентно следующему выражению:

$$|Z_{na}|^2 = N' \hat{e}(b, j) \sum_i \int_{B^i} \int \mathcal{D}B_\mu\, e^{i \bar{S}_{na}(B^i + B, b)} \Delta_g(B^i + B + b)\, \Delta_g^*(B^i + B - b) \prod_{x,\mu} \delta(\mathcal{D}^\nu G_{\mu\nu}(B^i + B) - j_\mu), \tag{4.15}$$

так как решение уравнения

$$\mathcal{D}^2 G_{\mu\nu}(B^i+B) = j_\mu \qquad (4.16)$$

в виде ряда по степеням $j_\mu(x)$ совпадает с $\Gamma^i_\mu(x|j)$. Если предположить, что квантовые возмущения включаются адиабатически, в (4.15) мы можем перейти к разложению по константе взаимодействия. В результате, воспользовавшись фурье-образом для функциональной δ-функции, получим

$$|Z_{na}|^2 = \sum_i \int_{B_i} \left| \int \mathcal{D}B_\mu \, e^{iS_{na}(B^i+B)} \Delta_q(B^i+B) \right|^2, \qquad (4.17)$$

где функциональный интеграл вычисляется, разлагая по степеням константы взаимодействия.

Формулы (4.11), (4.17) показывают, что в данном подходе восстанавливается та же структура, что при каноническом квантовании. Отличие пока заключается лишь в том, что, предполагая эрмитовость действия, мы работаем с четными функциями Грина.

5. Комплексный поворот в функциональном пространстве

Формулу (4.11) удобно переписать в виде (4.17). Очевидно, что (4.11) эквивалентно следующему выражению:

$$|Z_a|^2 = \Omega \int \mathcal{D}A^+_\mu \mathcal{D}A^-_\mu \, e^{iS_a(A^+) - iS_a(A^-)} \times \qquad (5.1)$$
$$\times \Delta_e(A^+) \Delta_e(A^-) \prod_x \delta(f(A^+ + A^-)),$$

если континуальный интеграл вычисляют, разлагая по степеням константы взаимодействия. В этом выражении

$$\Omega = \det\left(\frac{\delta f}{\delta \omega}\right)_0 \int \mathcal{D}\omega \qquad (5.2)$$

пропорционально объему калибровочной группы. Полагая, что уравнение (4.2) линейно по полям, $f(A^+ + A^-) = f(A^+) + f(A^-)$ с точностью до нормировки получим

$$|Z_a|^2 = \Omega' \left| \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS_a(A)} \Delta_e(A) F(A) \right|^2, \qquad (5.3)$$

где $F(A)$ – калибровочно-неинвариантный функционал. Например, для лоренцевской калибровки его обычно выбирают в виде

$$F(A) = \exp\left\{ -\frac{i}{2\alpha} \int dx \, (\partial^\mu A_\mu)^2 \right\}. \qquad (5.4)$$

Из (5.3) следует, что с точностью до несущественного фазового множителя

$$Z_a = (\Omega')^{1/2} \int \mathcal{D}A_\mu \, e^{iS'^{\alpha}_a(A)} \Delta_e(A), \qquad (5.5)$$

где

$$S'^{\alpha}_a(A) = S'_a(A) - \frac{1}{2\alpha} \int dx \, (\partial^\mu A_\mu)^2. \qquad (5.6)$$

Интеграл в (5.5) определен на гауссовой мере, и его комплексный поворот в функциональном пространстве прост. Поскольку задача вычисления гауссова интеграла сводится к решению линейного уравнения (3.1):

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - (1-\alpha)\partial_\mu\partial_\nu) A^\nu = j_\mu, \qquad (5.7)$$

к решению (3.4) всегда можно добавить с произвольной константой решение однородного уравнения. Выбрав эту константу равной $+i$, мы получим, что

$$\bar{A}_\mu(x) = \int dy \, \mathcal{D}^F_{\mu\nu}(x-y) j^\nu(y), \qquad (5.8)$$

где $\mathcal{D}^F_{\mu\nu}$ – фейнмановский пропагатор фотона (в лоренцевской калибровке). В результате

$$|Z_a|^2 = N \left| e^{i\int dx\, \hat{A}^\mu(x) \mathcal{D}^F_{\mu\nu}(x-y) \hat{A}^\nu(y)\, dy} \Delta_e(A) \right|_0^2, \tag{5.9}$$

что по структуре совпадает с (4.II).

При выводе (5.9) нам было важно, что функциональный интеграл был определен на гауссовой мере. Тогда, помня определение функционального интеграла в (4.7), его комплексный поворот очевиден и в результате

$$|Z_{na}|^2 = N' {\sum_i}' \int_{B^i} \left| e^{i\int dx\, \hat{B}^\mu P^F_{\mu\nu}(B^i) \hat{B}^\nu dy} \times \right. \tag{5.IO}$$

$$\left. \times e^{i S^{int}_{na}(B^i+B)} \Delta_q(B^i+B) \Delta_g^{-1/2}(B^i) \right|_0^2$$

где $P^F_{\mu\nu}$ – фейнмановский пропагатор глюона в поле $B^i_\mu(x)$, S^{int}_{na} – часть действия, отвечающая взаимодействию.

6. Заключение

На основе определения вероятности в работе было показано, что вклады в функциональные интегралы определяются экстремумами действия. Если этот результат для электродинамики тривиален и может быть получен методом стационарной фазы (МСФ), в теории типа Янга-Миллса мы получили (см. (5.IO)), что вклады в $|Z_{na}|^2$ определяются суммой вкладов от всех экстремумов действия S_{na} – результат, который невозможно получить МСФ. Действительно, если даже

$$Z_{na} = {\sum_i}' Z_{na}(B^i), \tag{6.I}$$

где $Z_{na}(B^i)$ определяется разложением в окрестности i-го

экстремума $S'_{na}(B)$, то тогда $|Z_{na}|^2$ будет содержать интерференционные члены $\sim \mathrm{Re}\, Z_{na}(B_i) Z^*_{na}(B^j)$, которые отсутствуют в (5.IO).

Это отличие от наивного МСФ – следствие интерференционной картины, которая возникает при вычислении величин $\sim |\langle in|out\rangle|^2$, с учетом граничного условия (2.IO). Или, что то же самое, было использовано, что состояния, построенные на различных траекториях $B^i_\mu(x)$ (включая калибровочно- и конформно-эквивалентные), принадлежат ортогональным гильбертовским пространствам. Очевидно, что такое определение функциональной меры универсально.

Если постулировать, что наблюдаемые состояния принадлежат единственному гильбертовскому пространству, в (5.IO) в сумме по i следует оставить один член (если, конечно, нет вырождения и вклады от различных членов в сумме не приводят к тождественным вкладам в вероятность, как калибровочно-эквивалентные в электродинамике). Надо также принять во внимание следующее. В сумме по i учитываются все несингулярные точные решения (3.7), включая тривиальное $B^0_\mu(x) = 0$ (с точностью до калибровки). Но, как известно, вакуум теории возмущений неустойчив относительно инстантонных возмущений /4/, что приводит к расходимости соответствующего ряда теории возмущений. Если в сумме по i в (5.IO) оставить один член, т.е. разлагать в окрестности одного из нетривиальных решений (3.7), то вышеуказанной проблемы с неустойчивостью не возникнет.

Поэтому встает вопрос о правиле отбора "физического" решения (3.7) (надо подчеркнуть, что такая же проблема стоит и в МСФ). Если отказаться от попытки постулировать дополнительные условия к (3.7), наиболее привлекательной кажется идея отбора по величине вклада, которая была проверена на примерах из квантовой механики в /I/. Если постулировать единственность гильбертовского пространства физических состояний, оставляемый вклад должен быть бесконечно велик по сравнению со всеми остальными. Если в квантовой механике это условие возникло автоматически /I/, в теории поля продемонстрировать предлагаемое правило отбора представляет довольно сложную динамическую проблему, которую надо решать для каждой конкретной модели теории поля отдельно.

В заключение я хочу поблагодарить В.Г.Кадышевского, Е.М.Левина, Л.Н.Липатова, С.Г.Матиняна, И.В.Пазиашвили, И.Г.Свимонишвили, А.Н.Сисакяна, Л.А.Слепченко, Я.А.Смородинского за полезные советы и обсуждения.

Литература

1. Манджавидзе И.Д. ЯФ ,1987, 45, 707.
2. Мигдал А.А., Кожамкулов Т.А. ЯФ, 1984, 39, 1596.
3. Actor A. Rev.Mod.Phys., 1979, 51, 461.
4. 'tHooft G. Int.School of Subn.Phys., Erice, Italy, 1977, 943.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 октября 1988 года.

Манджавидзе И.Д. P2-88-725
Нестандартный подход к старой теории возмущений

Для определения функциональной меры используется тот факт, что состояния, построенные на различных траекториях в функциональном пространстве, принадлежат ортогональным гильбертовским пространствам. Показано, что подобное определение меры функциональных интегралов в калибровочных теориях приводит к стандартной теории возмущений. Показана также необходимость в дополнительных правилах отбора в случае неабелевых калибровочных теорий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Mandzhavidze I.D. P2-88-725
Nonstandard Approach to the Previous Perturbation Theory

For definition of functional measure it is proposed that the states built on different trajectories in a functional space belong to the orthogonal Gilbert speces. It is shown that this definition of functional integral measure for the gauge theories gives the standard perturbation theory. Necessity of extra selection rules in case of nonabelian gauge theories is also demonstrated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988