объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-668

В.К.Мельников

ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в Оргкомитет Международной конференции "Нелинейные эволюционные уравнения: интегрируемость и спектральные методы", июль 1988 г., Италия

1988

В настоящем сообщении речь пойдет о нелинейных интегрируемых системах, обладающих довольно необычной динамикой. В частности, решения этих систем могут описывать захват и удержание солитонов. Это значит, что рассматриваемые здесь системы обладают решениями, описывающими солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в различного рода колебательные режимы /периодические, условно-периодические, почти периодические и т.д./ и остаются в них во все последующие промежутки времени. Это явление оказалось довольно распространенным среди нелинейных интегрируемых систем. Однако в данном сообщении мы продемонстрируем это явление на примере одного весьма интересного семейства нелинейных интегрируемых систем.

Итак, возьмем операторы L и A вида

$$L = \partial^2 + u, \quad A = \partial^{k_0+2} + \sum_{k=0}^{k_0} a_k \partial^k, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad k_0 \geq 0, \qquad /1/$$

такие, что оператор

$$\Lambda = [A, L] = A \cdot L - L \cdot A \qquad /2/$$

имеет нулевой порядок, т.е. является оператором умножения на функцию. Как известно, этим требованием коэффициенты $a_0, \dots, a_{k_0}$ определяются с точностью до констант. Мы выберем эти константы, исходя из требования

$$a_0 = \dots = a_{k_0} = 0 \text{ при } u = 0. \qquad /3/$$

Далее, известно, что коэффициенты $a_0, \dots, a_{k_0}$ зависят полиномиально от u и ее производных по пространственной переменной x соответствующего порядка. Следовательно, определенная посредством /2/ величина Λ является полиномом от u и ее производных по x до $(k_0 + 2)$-го порядка.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$f_0'' + (u - \lambda) f_0 = 0, \quad f_m' = \psi_m f_0, \qquad m = 1, \dots, N, \qquad /4/$$

где ψ_m - некоторые /пока неизвестные/ функции, $m = 1, \dots, N$. С помощью решений $f_0, f_1, \dots, f_N$ системы /4/ определим величины

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + cAf_0 + \kappa \sum_{m=1}^{N} \phi_m f_m, \qquad /5/$$

$$g_m = \psi'_m f_0 - \psi_m f'_0 + (\lambda - \lambda_m) f_m, \qquad m = 1, \ldots, N,$$

где c и κ - константы, а ϕ_m - неизвестные пока функции, $m = 1, \ldots, N$. Выясним, каким требованиям должны удовлетворять функции $u, \phi_1, \ldots, \phi_N, \psi_1, \ldots, \psi_N$, чтобы определенные посредством /5/ величины $g_0, g_1, \ldots, g_N$ удовлетворяли условиям

$$(L - \lambda) g_0 + \kappa \sum_{m=1}^{N} \phi_m g_m = 0, \quad \frac{\partial g_m}{\partial x} \equiv 0, \quad m = 1, \ldots, N, \qquad /6/$$

при произвольном выборе решений $f_0, f_1, \ldots, f_N$ системы /4/. С помощью несложных вычислений нетрудно убедиться, что согласно /1/, /4/ справедливы равенства

$$(L - \lambda) g_0 + \kappa \sum_{m=1}^{N} \phi_m g_m = \kappa \sum_{m=1}^{N} f_m (L - \lambda_m) \phi_m -$$

$$- \{ \frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] - 2\kappa \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_m \psi_m) \} f_0,$$

$$\frac{\partial g_m}{\partial x} = f_0 (L - \lambda_m) \psi_m, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Отсюда следует, что для справедливости равенств /6/ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = 2\kappa \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_m \psi_m), \qquad /7/$$

$$(L - \lambda_m) \phi_m = (L - \lambda_m) \psi_m = 0, \quad m = 1, \ldots, N.$$

В том случае, когда c и κ принимают вещественные значения, система /7/ имеет инвариантное многообразие $u = \bar{u}$, $\psi_m = \epsilon_m \bar{\phi}_m$, где $\epsilon_m^2 = 1$, а черта означает комплексное сопряжение. Движение на этом многообразии определяется системой уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c[A, L] = 2\kappa \sum_{m=1}^{N} \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x} |\phi_m|^2, \qquad /8/$$

$$(L - \lambda_m) \phi_m = 0, \quad m = 1, \ldots, N.$$

Система /8/ допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида /1/. Именно, пусть $u_0 = u_0(x)$ - вещественная функция x, имеющая $k_0 + 2$ непрерывные производные, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ | x u_0(x) | + \sum_{k=0}^{k_0+2} | u_0^{(k)}(x) | \} dx < \infty. \qquad /9/$$

Предположим, далее, что уравнение Шредингера

$$(L - \lambda) \phi = 0 \qquad /10/$$

имеет ровно N точек дискретного спектра $\lambda = \lambda_m$, $m = 1, \ldots, N$. Пусть, наконец, $A_m(t)$ - произвольные непрерывные функции t, $m = 1, \ldots, N$. Тогда с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L может быть найдено решение $u = u(x,t)$, $\phi_m = \phi_m(x,t)$, $m = 1, \ldots, N$, системы /8/, такое, что

$$u(x, 0) = u_0(x),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} | \phi_m(x,t) |^2 dx = | A_m(t) |^2, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad /11/$$

Действительно, пусть $\lambda = -s^2$, где $s \in (-\infty, \infty)$. Рассмотрим два решения f_0^- и f_0^+ уравнения /10/, удовлетворяющие требованиям

$$f_0^- \sim \exp(-isx), \quad x \to -\infty,$$
$$f_0^+ \sim \exp(isx), \quad x \to \infty. \qquad /12/$$

Далее, с учетом /4/ положим при $m = 1, \ldots, N$

$$f_m^- = \epsilon_m \int_{-\infty}^{x} \bar{\phi}_m(z) f_0^-(z, s) dz,$$
$$f_m^+ = -\epsilon_m \int_{x}^{\infty} \bar{\phi}_m(z) f_0^+(z, s) dz. \qquad /13/$$

Подставляя определенные посредством /12/ и /13/ функции f_0^-, $f_0^+, f_1^-, f_1^+, \ldots, f_N^-, f_N^+$ в равенства /5/, мы получим величины $g_0^-, g_0^+, g_1^-, g_1^+, \ldots, g_N^-, g_N^+$. На основе /6/ легко получаем, что при $m = 1, \ldots, N$ справедливо равенство $g_m^- = g_m^+ = 0$. Отсюда в силу /3/ следует, что

$$g_0^- = c(-is)^{k_0+2} f_0^-, \quad g_0^+ = c(is)^{k_0+2} f_0^+. \qquad /14/$$

При $s \neq 0$ пара функций $f_0^-(x,s)$ и $f_0^-(x,-s)$ является линейно независимой. Следовательно, справедливо равенство

$$f_0^+(x,s) = a(s) f_0^-(x,-s) + b(s) f_0^-(x,s). \qquad /15/$$

Возьмем теперь вытекающее из /5/ и /14/ равенство

$$\frac{\partial f_0^+}{\partial t} + cAf_0^+ + \kappa \sum_{m=1}^{N} \phi_m f_m^+ = c(is)^{k_0+2} f_0^+, \qquad /16/$$

заменим в нем f_0^+ на выражение, стоящее в правой части равенства /15/, и перейдем к пределу при $x \to -\infty$. В результате несложных вычислений получаем

$$\frac{\partial a}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial b}{\partial t} + c[(-is)^{k_0+2} - (is)^{k_0+2}]b = 0. \qquad /17/$$

Таким образом, эволюция коэффициентов $a(s)$ и $b(s)$ в нашем случае точно такая же, как и в случае уравнений КдВ иерархии[1].

Из равенства /15/ вытекает хорошо известное представление для функции $a(s)$, именно

$$a(s) = \frac{1}{2is}\{\frac{\partial f_0^+}{\partial x} f_0^- - f_0^+ \frac{\partial f_0^-}{\partial x}\}.$$

Поскольку решения f_0^- и f_0^+ допускают аналитическое продолжение по s в верхнюю полуплоскость, то функция $a(s)$ также допускает аналитическое продолжение по s в верхнюю полуплоскость. При этом нулям $s = s_m$ функции $a(s)$ в верхней полуплоскости соответствуют точки дискретного спектра оператора L. Это значит, что при $s = s_m$ справедливо равенство

$$f_0^+(x,s_m) = B_m f_0^-(x,s_m), \qquad /18/$$

где величины B_m не зависят от x. Согласно сделанным ранее предположениям при $m = 1, \ldots, N$ выполняется соотношение $\lambda_m + s_m^2 = 0$. В силу /5/ отсюда вытекает равенство

$$\phi_m(x) = C_m f_0^+(x,s_m), \qquad /19/$$

где величины C_m также не зависят от x, $m = 1, \ldots, N$. Возьмем теперь равенство /16/, подставим в него вместо f_0^+ правую часть равенства /18/ и перейдем к пределу при $x \to -\infty$. В соответствии с /11/, /18/ и /19/ получаем

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + \{c[(-is_m)^{k_0+2} - (is_m)^{k_0+2}] - \kappa\epsilon_m |A_m(t)|^2\}B_m = 0. \qquad /20/$$

Нетрудно видеть, что при $A_m(t) \equiv 0$ это равенство совпадает с аналогичным соотношением для уравнений КдВ иерархии.

Уравнения /17/ и /20/ полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора L вида /1/. Это позволяет применить к исследованию системы /8/ метод обратной задачи рассеяния. В частности, эти данные полностью определяют ядро интегрального уравнения Гельфанда - Левитана[2].

В том случае, когда k_0 - нечетное целое число, с помощью равенства /20/ находим, что фазовая скорость m-го солитона пропорциональна сумме

$$\sigma_m = 2c(is_m)^{k_0+2} + \kappa\epsilon_m |A_m(t)|^2. \qquad /21/$$

При $c\kappa\epsilon_m < 0$ оба слагаемые в правой части равенства /21/ имеют одинаковый знак и, следовательно, фазовая скорость m-го солитона в этом случае имеет постоянный знак, т.е. m-й солитон все время движется в одном и том же направлении. Однако при $c\kappa\epsilon_m > 0$ слагаемые в правой части равенства /21/ имеют разные знаки и, следовательно, фазовая скорость m-го солитона может менять знак, а сам солитон в этом случае может менять направление движения. Таким образом, бесконечному числу перемен знака величины σ_m соответствует колебательное движение m-го солитона. Если же существует момент времени t_0 такой, что при $t < t_0$ величина σ_m имеет постоянный знак, а при $t > t_0$ величина σ_m имеет бесконечно много перемен знака, то в этом случае m-й солитон сначала движется в постоянном направлении, а затем захватывается в колебательный режим.

Далее, в том случае, когда k_0 - произвольное четное целое число, система /8/ имеет один и тот же вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\kappa \sum_{m=1}^{N} \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x}|\phi_m|^2,$$

$$\frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} + u\phi_m = \lambda_m \phi_m, \quad m = 1, \ldots, N,$$

а уравнения /17/ и /20/ в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial t} \equiv 0, \qquad \frac{\partial B_m}{\partial t} - \kappa\epsilon_m |A_m(t)|^2 B_m = 0.$$

В заключение отметим, что законность всех встречающихся выше предельных переходов основывается на неравенстве /9/ и может быть строго доказана.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Ф.Калоджеро и М.Крускалу за плодотворное обсуждение изложенных выше результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax P.D. - Commun. Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. - Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, т.15, №4, с.309.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1988 года.

Мельников В.К. Р2-88-668
Захват и удержание солитонов
в нелинейных интегрируемых системах

В ряде нелинейных интегрируемых систем найдены решения, описывающие солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в колебательные режимы. Эти решения получены с помощью метода обратной задачи рассеяния для одномерного оператора Шредингера на прямой. Названные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-88-668
Capture and Confinement of Solitons
in Nonlinear Integrable Systems

Some nonlinear integrable systems were found to have solutions describing solitons that come from infinity and then are captured into oscillatory regimes. These solutions were obtained by the inverse scattering method for the one-dimensional Schroedinger operator on a straight line. The obtained results are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, solid state physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988