объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-88-569

Н.С.Шавохина

ГАРМОНИЧЕСКАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА, УРАВНЕНИЯ БОРНА - ИНФЕЛЬДА И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Направлено в "Известия вузов, Математика"

1988

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА на N-мерном многообразии M задается тензорным полем $g_{\alpha\beta} d^{\alpha} \otimes d^{\beta}$, где d^{α}- дифференциалы координат x^{α} на M. По замыслу Эйнштейна /1/ симметричное поле $h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta})$ несет информацию о гравитации, антисимметричное поле $\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha})$ - об электромагнетизме.

НЕОСОБЕННАЯ МЕТРИКА. В связи с этим полагаем, что определители g и h матриц $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$ нигде не обращаются в нуль. Такую метрику называем неособенной. Для нее вводим поля $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$ из условий

$$g_{\nu\alpha} \tilde{g}^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\nu} = g_{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\alpha}, \qquad h_{\alpha\nu} h^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\nu}, \qquad /1/$$

где δ^{β}_{α}- символ Кронекера, т.е. поля, обратные по отношению к $g_{\alpha\beta}$ и $h_{\alpha\beta}$. Затем обозначаем $\tilde{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{g}^{\beta\alpha})$, $\tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\beta\alpha})$. Поле $f_{\alpha\beta}$, обратное полю $f^{\alpha\beta} = \tilde{h}^{\alpha\beta}$, равно

$$f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} \phi_{\nu\beta} \qquad /2/$$

Для неособенной метрики имеем

$$h_{\nu\alpha} \tilde{h}^{\alpha\beta} + \phi_{\nu\alpha} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\nu}, \qquad h_{\alpha\nu} \tilde{\phi}^{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\nu} \tilde{h}^{\alpha\beta},$$

$$h_{\alpha\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} \tilde{h}^{\alpha\beta}, \qquad \phi_{\alpha\nu} \tilde{h}^{\alpha\beta} = f_{\alpha\nu} \tilde{\phi}^{\alpha\beta},$$

$$f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} g_{\nu\beta} = g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\beta\nu}$$

На сигнатуру квадратичной формы $h_{\alpha\beta} d^{\alpha} d^{\beta}$ никаких ограничений не накладываем.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. Скобки Кристоффеля для тензора $h_{\alpha\beta}$ задают на M аффинную связность. Ковариантное дифференцирование с этой связностью будем обозначать D. Для неособенной метрики составим следующие четыре характеристики

$$H^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|J|}} D_{\mu} (\sqrt{|J|}\, \tilde{h}^{\alpha\mu}), \qquad \Phi^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|J|}} D_{\mu} (\sqrt{|J|}\, \tilde{\phi}^{\alpha\mu}),$$

$$G_{\alpha} = \tilde{h}^{\mu\nu} \phi_{\alpha\mu\nu}, \qquad \Psi_{\alpha} = \frac{1}{2} \tilde{\phi}^{\mu\nu} (\phi_{\alpha\mu\nu} + \phi_{\nu\alpha\mu} + \phi_{\mu\nu\alpha}). \qquad /3/$$

где $J = gh^{-1}$, $\phi_{\alpha\mu\nu} = D_\nu \phi_{\alpha\mu}$. Из условий /1/ и вышеприведенных равенств следует, что эти характеристики связаны следующим образом:

$$\Psi_\alpha = H^\beta h_{\beta\alpha} + \Phi^\beta \phi_{\beta\alpha}, \qquad H^\alpha = \tilde{h}^{\alpha\beta}\Psi_\beta + \tilde{\phi}^{\alpha\beta} G_\beta ,$$

$$G_\alpha = H^\beta \phi_{\beta\alpha} + \Phi^\beta h_{\beta\alpha} , \qquad \Phi^\alpha = \tilde{\phi}^{\alpha\beta}\Psi_\beta + \tilde{h}^{\alpha\beta} G_\beta ,$$

$$\Psi_\alpha = f_{\alpha\beta} H^\beta - \phi_{\alpha\sigma} h^{\sigma\beta} G_\beta, \quad H^\alpha = h^{\alpha\sigma}\phi_{\sigma\beta}\Phi^\beta + h^{\alpha\beta}\Psi_\beta,$$

$$\Psi^\alpha = h^{\alpha\sigma}\phi_{\sigma\beta} H^\beta + h^{\alpha\beta} G_\beta, \quad G_\alpha = f_{\alpha\beta}\Phi^\beta - \phi_{\alpha\sigma} h^{\sigma\beta}\Psi_\beta .$$

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА ЭЙНШТЕЙНА. В своей единой теории поля в качестве одной из систем дифференциальных уравнений Эйнштейн полагал

$$\Phi^\alpha = 0 , \quad \alpha = 1, \ldots, N . \qquad /4/$$

Метрику с условием /4/ называем метрикой Эйнштейна. При этом условии $\Psi_\alpha = H^\beta h_{\beta\alpha}$, $H^\alpha = h^{\alpha\beta}\Psi_\beta$, $G_\alpha = H^\beta \phi_{\beta\alpha}$, $G_\alpha = \phi_{\sigma\alpha} h^{\sigma\beta}\Psi_\beta$.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕТРИКА. Из вышеприведенных дифференциальных тождеств следует теорема: если две характеристики, лежащие на одной из сторон квадрата $\begin{matrix} H & \Phi \\ G & \Psi \end{matrix}$ равны нулю, то равны нулю и остальные две. Метрику с равными нулю характеристиками /3/ называем гармонической. Такая метрика вполне характеризуется дифференциальными уравнениями

$$D_\mu (\sqrt{|J|}\, \tilde{g}^{\alpha\mu}) = 0 , \quad D_\mu (\sqrt{|J|}\, \tilde{g}^{\mu\alpha}) = 0 . \qquad /5/$$

Отсюда и название – гармоническая метрика, поскольку условия /5/ аналогичны условиям де Дондера [2], которым удовлетворяет симметричная метрика в гармонических координатах.

Согласно вышеуказанной теореме, чтобы метрика Эйнштейна стала гармонической, к условию /4/ достаточно добавить хотя бы одно из условий $H^\alpha = 0$, $\Psi^\alpha = 0$.

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА БОРНА – ИНФЕЛЬДА. В своей теории электромагнитного поля Борн и Инфельд [3] также задавали уравнения /4/, но при условии, что

$$\phi_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \phi_\beta - \partial_\beta \phi_\alpha , \qquad /6/$$

где ϕ_α – ковекторное поле, ∂_α – частная производная по x^α. Уравнения /4/ получаются в результате варьирования по x римановa объема $V = \int \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^N$. В силу условия /6/ получаем $\phi_{\alpha\mu\nu} + \phi_{\nu\alpha\mu} + \phi_{\mu\nu\alpha} = 0$. Следовательно, условие /6/ сильнее, чем условие $\Psi_\alpha = 0$, а метрика Борна – Инфельда является частным случаем гармонической метрики.

Из вышеуказанной теоремы следует, что при условии /6/, как и при более слабом условии $\Psi_\alpha = 0$, уравнения /4/ можно заменить на уравнения $G_\alpha = 0$.

Дальше будем считать, что компоненты $h_{\alpha\beta}$ не зависят от координат x^α. В этом случае уравнения Борна – Инфельда для ϕ_α можно записать в виде

$$f^{\alpha\beta}\partial_\alpha \phi_{\beta\gamma} = 0 . \qquad /7/$$

Оказывается, что они тесно связаны с минимальными поверхностями.

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ. Понятие минимальной /а точнее – экстремальной/ многомерной поверхности хорошо известно [4,5]. Если задать минимальную поверхность в виде графика

$$x^p = \xi^p(x^1, \ldots, x^K) , \quad p = K + 1, \ldots, N , \qquad /8/$$

то в рассматриваемом случае постоянных $h_{\alpha\beta}$ функции ξ^p будут удовлетворять системе уравнений

$$F^{ab} \frac{\partial^2 \xi^p}{\partial x^a\, \partial x^b} = 0 , \qquad /9/$$

где F^{ab} – матрица, обратная матрице F_{ab} основной квадратичной формы $h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = F_{ab}dx^a dx^b$ поверхности /8/. Уравнения /9/ получаются в результате варьирования по ξ^p площади поверхности /8/, равной $S = \int \sqrt{|F|}\, dx^1 \ldots dx^K$, где F – определитель матрицы F_{ab}.

Латинские индексы здесь принимают значения от 1 до числа K, если в алфавите они, подобно a и b, идут раньше буквы "o", и от числа K+1 до числа N, если в том же алфавите они, подобно p и q, идут после буквы "o". Сама же буква "o" в качестве индекса не употребляется. Как и в случае с греческими индексами, по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование в вышеуказанных пределах.

МЕТРИКА БОРНА – ИНФЕЛЬДА, ЗАДАВАЕМАЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ. Наряду с N-K функциями /8/ введем K функций $\xi^a = x^a$, затем положим $h_{ap} = 0$ и будем искать решение уравнений /6-7/ в виде

$$\phi_\alpha = h_{\alpha p}\xi^p . \qquad /10/$$

В таком случае тензор /6/ имеет компоненты

$$\phi_{ab} = 0 , \quad \phi_{pq} = 0, \quad \phi_{ap} = \partial_a \phi_p = h_{pn}\partial_a \xi^n . \qquad /11/$$

а тензор /2/ - компоненты

$$f_{ab} = h_{ab} + \frac{\partial \xi^{p}}{\partial x^{a}} h_{pq} \frac{\partial \xi^{q}}{\partial x^{b}} = F_{ab}, \qquad /12/$$

$$f_{pq} = h_{pq} + \frac{\partial \phi_{p}}{\partial x^{a}} h^{ab} \frac{\partial \phi_{q}}{\partial x^{b}}, \quad f_{ap} = 0 .$$

Из /12/ следует, что $f^{ap} = 0$, что матрица f^{pq} обратна матрице f_{pq} и что матрица f^{ab} равна матрице F^{ab}. Из /11/ следует, что $\partial_{p} \phi_{\beta\gamma} = 0$. Поэтому в данном случае уравнения /7/ сводятся к уравнениям $f^{ab} \partial_{a} \phi_{bq} = 0$, эквивалентным уравнениям /9/. Эта эквивалентность следует уже из вариационного принципа, так как в данном случае $g = F h^{*}$, где $h^{*} = \mathrm{const}$ - определитель матрицы h_{pq}.

ДВА ПРИМЕРА. Первое точное решение уравнений Борна - Инфельда в четырехмерном мире Минковского нашел М.Борн, решив задачу об электростатическом потенциале электрона /3,6/. Другое точное решение тех же самых уравнений нашли Н.А.Черников и Б.М.Барбашов, решив задачу о столкновении двух плоских электромагнитных волн /7/. Оба решения относятся к рассмотренному здесь типу и их можно представить в виде /10/. В первом примере минимальная поверхность трехмерна и пространственно-подобна, а во втором - двумерна и времениподобна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Единая полевая теория тяготения и электричества. Собр. научн. тр., т.2. М.: Наука, 1966, с.171.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехтеориздат, 1955, с.504.
3. Born M., Infeld L. Foundation of the New Field Theory. Proc.Roy.Soc.A. 1934, 144, p.425.
4. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948, с.316.
5. Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и задача Плато. М.: Наука, 1987, с.312.
6. Born M. On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field. Proc.Roy.Soc. A.143, 1934, p.410.
7. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Взаимодействие двух плоских волн в электродинамике Борна - Инфельда. В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наукова думка, 1967, с.733.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июля 1988 года.

Шавохина Н.С.

P2-88-569

Гармоническая несимметричная метрика, уравнения Борна - Инфельда и минимальные поверхности

Рассматриваются алгебраические и дифференциальные свойства неособенной несимметричной метрики. Устанавливается, что такая метрика характеризуется парой векторных и парой ковекторных полей, существенно связанных двумя тождествами. Если эти поля равны нулю, то метрика называется гармонической. Последняя является частным случаем несимметричной метрики Эйнштейна. Напротив, несимметричная метрика Борна - Инфельда является частным случаем гармонической метрики. Указаны решения уравнений Борна - Инфельда, задаваемые минимальными поверхностями.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Shavokhina N.S.

P2-88-569

Harmonic, Nonsymmetric Metric, Born - Infeld Equations and Minimal Surfaces

Algebraic and differential properties of the nonsingular, nonsymmetric metric are considered. It is shown that this metric is characterized by a pair of vector and a pair of covector fields essentially connected by two identities. If these fields are zero, the metric is called harmonic. The latter is a particular case of the nonsymmetric Einstein metric. On the contrary, the nonsymmetric Born - Infeld metric is a particular case of the harmonic metric. The solutions of the Born - Infeld equations are pointed out which are given by minimal surfaces.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988