

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-88-560

Ю.Л.Калиновский,<sup>1</sup> В.Каллис, Б.Н.Куранов,<sup>2</sup>  
В.Н.Первушин, Н.А.Сариков<sup>2</sup>

**БИЛОКАЛЬНЫЕ МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ  
И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ**

Направляется в журнал "Ядерная физика"

---

<sup>1</sup>Гомельский политехнический институт

<sup>2</sup>Институт ядерной физики АН УзССР, Ташкент

**1988**

## Введение

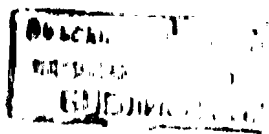
Экспериментальное изучение физики тяжелых кваркониев ставит задачу феноменологического описания их распадов на легкие мезоны. Как известно, феноменология тяжелых кваркониев основана на нерелятивистской потенциальной кварковой модели <sup>1/1</sup>, в то время как легкие мезоны описываются киральными феноменологическими лагранжианами <sup>1/2</sup>.

Данная работа посвящена попытке объединить потенциальную модель с киральными лагранжианами.

Тяжелый кварконий представляет собой водородоподобный атом, и естественно использовать для построения  $S$ -матрицы взаимодействия аналогию с КЭД. В КЭД спектр отдельного атома вычисляется исключительно в радиационной калибровке и в системе покоя. Так как фермионы в атоме находятся вне массовой поверхности, результаты вычисления спектра инвариантны только относительно совместных калибровочных и релятивистских преобразований (открытых еще Гейзенбергом и Паули <sup>1/3</sup>). Обоснованию диаграммной техники радиационной калибровки с группой этих совместных преобразований было дано в работах <sup>1/4,5</sup> в рамках "минимального метода" квантования калибровочных теорий с явным решением уравнения Гусси (уравнения на временную компоненту калибровочного поля  $A_0 = \eta \cdot t$ ;  $\eta^2 = 1$ ,  $\eta_\mu$  - произвольный временноподобный вектор - ось квантования).

В таком "минимальном" квантовании меняется смысл понятий калибровочной инвариантности и релятивистской ковариантности. Калибровочная инвариантность требует не от средних (как в методе Дирака), а от средних физических переменных, которые функционально зависят от исходных полей. Обычные преобразования Лоренца исходных полей соответствуют преобразованиям Лоренца физических переменных, сопровождаемым дополнительным эрмитовым калибровочным поворотом. Учет этих поворотов восстанавливает (на уровне диаграмм Фейнмана) релятивистскую ковариантность как трансформационное свойство <sup>1/4,5</sup>. Релятивистская ковариантность как форма знания достигается лишь определенным выбором оси квантования  $\eta_\mu$ , в зависимости от граничных условий физической задачи. В частности, для описания связанных состояний ось квантования выбирается так, чтобы кулоновское поле частицы достигло вместо атома (в противном случае релятивистский закон дисперсии  $P^2 = M^2$  не выполняется <sup>1/6</sup>).

Для взаимодействующих атомов, которые описываются бикомпактными полями, релятивистская ковариантность достигается только в том случае,



если ось квантования параллельна вектору оператора дифференцирования бислокального поля по полной координате /7,8/.

Как известно, все общепринятые методы квантования калибровочных теорий ориентированы на описание  $S$ -матрицы с асимптотическими состояниями свободных частиц. Обобщение этих методов на связанные состояния в КЭД требует введения указанных выше дополнительных принципов (минимального квантования и выбора оси квантования).

Обобщая потенциальную модель спектроскопии кваркониев на описание их взаимодействия, мы будем использовать именно эти принципы, меняя только кулоновский потенциал на сумму кулоновского и растущего (осцилляторного) потенциалов.

Работа состоит из следующих разделов. В разделе I исходя из четырехкваркового взаимодействия получены эффективное бислокальное действие и уравнения Дайсона - Швингера и Бете - Солпитера. В разделе 2 рассматривается спектр кварков в мезоне, а в разделе 3 выведены трехмерные релятивистские уравнения для мезонов. В разделе 4 проводится квантование бислокальных полей, и в разделе 5 определяется их нормировка. В разделе 6 представлены матричные элементы взаимодействия мезонов и константа распада пиона. В разделе 7 обсуждается переход бислокальных лагранжианов в локальные киральные лагранжианы.

### I. От кварков к мезонам

Мы будем исходить из следующего эффективного действия, содержащего четырехкварковое взаимодействие /9/

$$S_{\text{эфф}} = \int d^4x \left\{ \bar{q}(x) [G_{\hat{m}_0}^{-1}(x) + L(x)] q(x) - \frac{1}{2} \int d^4y q(y) \bar{q}(x) [K^{\gamma}_{\alpha_1 \beta_1 / \alpha_2 \beta_2}(x-y)] \frac{q(x) \bar{q}(y)}{\beta_2} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $G_{\hat{m}_0}^{-1} = (-i \not{\partial} + \hat{m}_0)$  - оператор Дирака свободных кварков с токовыми массами  $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_1^{\alpha_1}, m_2^{\alpha_2}, \dots, m_n^{\alpha_n})$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают дираковские ароматные индексы кварков;  $L(x)$  - локальный внешний оператор (например, лептонный ток); а  $K^{\gamma}$  - "мгновенное" взаимодействие (ядро) с заданной осью квантования  $\eta$ :

$$K^{\gamma}_{\beta_1 \alpha_1 / \beta_2 \alpha_2}(x) = K^{\gamma}_{\beta_1 \alpha_1 / \beta_2 \alpha_2}(x'', x') = \gamma_{\beta_1 \alpha_1}^{\mu} V(x') \gamma_{\beta_2 \alpha_2}^{\nu} \delta(x''); \quad x_{\mu}^{\pm} = x_{\mu} - x_{\mu}^{\prime\prime}, \quad x_{\mu}^{\prime\prime} = \eta_{\mu} (x \cdot \eta), \quad \delta_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu} \eta^{\nu}, \quad \eta^2 = 1, \quad \eta = \delta^{\mu} \eta_{\mu} \quad (2)$$

где  $V(x^{\pm})$  - сумма кулоновского и растущего (например, осцилляторного) потенциалов /6/, т.е.

$$V(r) = \frac{4}{3} \left( -\frac{\alpha_s}{r} + V_0 r^2 \right), \quad r = |x^{\pm}|, \quad (3)$$

$\alpha_s$  - и  $V_0$  - параметры. Для рассмотрения мезонов нам достаточно ограничиться цветосинглетной частью ядра  $K^{\gamma}$  (поскольку в (3) учтен фактор, обусловленный синглетным членом разложения в цветовом пространстве,  $\frac{1}{4} \lambda_{\alpha}^{\mu} \lambda_{\beta}^{\nu} \sim \frac{4}{3} I$ ).

Отметим, что действие (I) с чисто кулоновским потенциалом  $\alpha_s/r$  следует из КЭД (или КЭД), если в разложении глюонного (фотонного) поля на временную ( $A_0 = \gamma \cdot A$ ) и поперечную ( $A^{\perp}$ ) компоненты вместо  $A_0$  использовать классическое решение уравнения связи (Гаусса) и положить  $A^{\perp} = 0$  /4/.

Наиболее детально четырехкварковое взаимодействие с растущим потенциалом в случае  $\eta_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  было рассмотрено в недавних работах /6/, где получены спектры легких кварков и мезонов при нулевых токовых массах кварков,  $\hat{m}_0 = 0$ . Однако авторам этих работ не удалось корректно решить проблему релятивизации волновых функций связанных состояний.

Для релятивистского описания спектра мезонов и их взаимодействия применим к действию (I) изложенный во Введении принцип выбора оси квантования ( $\eta_{\mu}$ ) для волновой функции связанного состояния по "направлению" оператора дифференцирования по полной координате /7,8/  $X = (x_{\mu}^{\pm})$  координаты конститuentных частиц -  $x_{\mu}^{\pm}$ ,

$$\eta_{\mu} \parallel \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \right). \quad (4)$$

Действие (I) с помощью тождественного преобразования Лежандра, использующего бислокальные поля  $m(x, y)$  (линеаризующие четырехфермионное взаимодействие), после квантования по фермионным полям принимает вид /10/

$$S_{\text{эфф}}[m] = N_c \left\{ \frac{1}{2} (m, [K^{\gamma}]^{-1} m) - i \text{Tr} \ln [G_{\hat{m}_0}^{-1} + m + L] \right\}, \quad (5)$$

где  $\text{Tr}$  означает интегрирование по непрерывным переменным и суммирование по дискретным индексам. Условие экстремума для этого действия,  $\delta S_{\text{эфф}} / \delta m = 0$  при  $m = \Sigma$  совпадает с уравнением Дайсона - Швингера для массового оператора кварка  $\Sigma$ :

$$\Sigma(x-y) = \hat{m} \delta^4(x-y) + i K^{\gamma} (x-y) G_z(x-y), \quad (6)$$

где  $G_z^{\pm}(x-y) = -i \not{\partial} \delta^4(x-y) + \Sigma(x-y)$ . Это уравнение определяет спектр кварков и, в частности, спонтанное нарушение киральной симметрии (возникновение динамической массы у кварков) [6].

Разложение действия (5) в окрестности классического решения ( $\Sigma$ ) по флуктуациям  $(m' = m - \Sigma)$  [10] определяет свободное действие

$$S_d[m] = \frac{N_c}{2} \{ (m', [K^{\gamma}]^{-1} m') + i \text{Tr} (G_z m')^2 \} \quad (7)$$

и действие, описывающее взаимодействие бислокальных полей,

$$S_g[m] = -i N_c \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Tr} (G_z m')^n = -i N_c \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Tr} \Phi^n, \quad (8)$$

где поля

$$\Phi(x,y) \triangleq \int d^4 z G_z(x,z) m'(z,y),$$

$$\text{Tr} \Phi^n \triangleq \text{tr} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \Phi(x_1, x_2) \Phi(x_2, x_3) \dots \Phi(x_n, x_1) \quad (9)$$

введены для удобства. Мы положили здесь  $L(x) = 0$ .

Вариация (7) по  $m'$  ведет к однородному уравнению Бете - Селитера в "лестничном" приближении на вершинную функцию связанного состояния

$$l_{z,0}(x,y) = i K^{\gamma}(x,y) \int d^4 z_1 d^4 z_2 l_{z,0}^{\gamma}(x,z_1) l_{z,0}^{\gamma}(z_1, z_2) l_{z,0}^{\gamma}(z_2, y), \quad (10)$$

которую надо рассмотреть совместно с уравнением (6).

## 2. Спектр кварков в мезоне

Рассмотрим уравнение Дайсона - Швингера (6) в импульсном пространстве для кварка (4)

$$\not{k}_{(z)} m_{(z)} + i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V(k, q) \delta^{\gamma\alpha} l_{z,0}^{\alpha}(q) \delta_{\beta}^{\gamma}, \quad (11)$$

$$\text{или } V(k) \int d^4 x e^{i k x} V(x) l_{z,0}^{\gamma}(q) \int d^4 x e^{-i q x} l_{z,0}^{\alpha}(x).$$

Разбивая переменную интегрирования в (11) на продольную и поперечную части  $q_{\mu} = (q^{\parallel}, q^{\perp})$  и беря интеграл по  $q^{\parallel}$  с учетом

$$i \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = i \frac{dq^{\parallel}}{(2\pi)} \frac{d^3 q^{\perp}}{(2\pi)^3}, \quad (q^{\parallel} = \sqrt{(q^{\perp})^2}, q_{\mu}^{\parallel} = \frac{q_{\mu} \cdot q^{\parallel}}{q^{\parallel}}), \quad (12)$$

нетрудно увидеть, что массовый оператор зависит только от поперечных импульсов и его можно представить в виде

$$\Sigma_{(z)}(k^{\perp}) = E_{(z)}(k^{\perp}) [\sin \varphi_{(z)}(k^{\perp}) + k^{\perp} \cos \varphi_{(z)}(k^{\perp})] - k^{\perp}, \quad (13)$$

где  $\hat{k}_{\mu}^{\perp}$  - единичный вектор ( $k_{\mu}^{\perp} q^{\mu} = 0$ ). Тогда функция Грина кварка  $G_{z,0}^{\pm}$  после подстановки (13) принимает вид

$$G_{z,0}^{\pm}(q^{\parallel}, q^{\perp}) = \frac{1}{q^{\parallel} - \Sigma_{(z)}^{\pm}(q^{\perp})} = \\ = - \int_{\sigma_{(z)}^{\pm}(q^{\perp})} \left[ \frac{\Lambda_{\pm}^{\sigma}}{E_{(z)}(q^{\perp}) - q^{\parallel} - i\epsilon} + \frac{\Lambda_{\pm}^{\sigma}}{E_{(z)}(q^{\perp}) + q^{\parallel} - i\epsilon} \right] S_{(z)}^{\sigma}(q^{\perp}). \quad (14)$$

Здесь введены оператор типа матрицы преобразования Фолди - Ваутхойзона [11]

$$S_{(z)}^{\sigma}(q^{\perp}) \triangleq \exp \{ \hat{q}^{\perp} [\varphi_{(z)}(q^{\perp}) - \frac{\pi}{2}] \} \quad (15)$$

и проекционный оператор

$$\Lambda_{\pm}^{\sigma} \triangleq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\hat{q}^{\perp}}{\sqrt{q^{\perp 2}}} \right), \quad (16)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$S_{(z)}^{\sigma}(q^{\perp}) \not{q}^{\perp} = \not{q}^{\perp} S_{(z)}^{\sigma}(q^{\perp}) \quad (17)$$

$$\Lambda_{\pm}^{\sigma} + \Lambda_{\pm}^{\sigma'} = 1, \quad \Lambda_{\pm}^{\sigma} \Lambda_{\pm}^{\sigma'} = \Lambda_{\pm}^{\sigma'}, \quad \Lambda_{\pm}^{\sigma} \Lambda_{\pm}^{\sigma} = 1 \quad (18)$$

В результате такой процедуры для  $G_{z,0}^{\pm}$  уравнению (11) равносильно на основании уравнений на  $\varphi_{(z)}(k^{\perp})$  и  $l_{(z)}(k^{\perp})$ :

$$\begin{cases} E_{(a)}(k^+) \sin \varphi_{(a)}(k^+) = m_{(a)}^0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q^+}{(2\pi)^3} V(k^+ - q^+) \sin \varphi_{(a)}(q^+) & (19) \\ E_{(a)}(k^+) \cos \varphi_{(a)}(k^+) = |k^+| + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q^+}{(2\pi)^3} V(k^+ - q^+) (k^+ - q^+) \cos \varphi_{(a)}(q^+) & (20) \end{cases}$$

В системе покоя, где  $\eta_\mu = (1, 0, 0, 0)$ , эти уравнения совпадают с уравнениями работы /6/, для которых были получены численные решения в случае осцилляторного потенциала при  $m^0 = 0$ , приводящие к спонтанному возникновению массы кварков. Решение уравнений (19) и (20) для осцилляторного потенциала с ненулевыми токовыми массами кварков ( $m^0 \neq 0$ ) с использованием численных методов были получены в работе /12/, где показано, что для больших масс  $m^0 \geq V_0^{1/3}$  эффект спонтанного нарушения становится незаметным (см. рис. 1). (Включение кулоновского потенциала ведет к перенормировке токовой массы кварка).

3. Трехмерное релятивистски ковариантное уравнение для кваркония

Рассмотрим уравнение Бете - Солпитера (10), которое в импульсном пространстве записывается в следующем виде:

$$\Gamma_{(a)}(P/k) = -i \int \frac{d^4 q^+}{(2\pi)^4} V(k^+ - q^+) \mathcal{G}_{(a)}^1(q^+ + \frac{1}{2}P) \Gamma_{(a)}(P/q) \Gamma_{(a)}^1(q^+ - \frac{1}{2}P) \mathcal{G}_{(a)}^1(q^+) \quad (21)$$

Это уравнение отличается от обычных /6/ выбором оси квантования (4). Правая часть уравнения (21) после интегрирования по продольной компоненте ( $q^0$ ) 4-импульса  $q_\mu = (q^0, \mathbf{q})$  и использованием формулы (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{I} \int \frac{d^3 q^+}{(2\pi)^3} \Gamma_{(a)}^1(q^+, \frac{1}{2}P) \Gamma_{(a)}^1(P/q) \Gamma_{(a)}^1(q^+, \frac{1}{2}P) &= \hat{I} \mathcal{D}(P/q^+) \otimes \Gamma_{(a)}(P/q^+) = \\ = \hat{I} \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \left[ \frac{\Lambda_+^+ \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \Gamma_{(a)}^1(P/q^+) \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \Lambda_+^+}{E_+(q^+) \sqrt{\varphi^2} - i\epsilon} + \right. & (22) \\ \left. \frac{\Lambda_+^+ \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \Gamma_{(a)}^1(P/q^+) \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \Lambda_+^+}{E_-(q^+) \sqrt{\varphi^2} - i\epsilon} \right] \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \end{aligned}$$

где  $L_\pm = L_{(a)} \pm L_{(a)}$ ,  $L_{(a)}$  - решение уравнений (20), интегральный оператор  $\hat{I}$  имеет вид

$$\hat{I} f = \int \frac{d^3 q^+}{(2\pi)^3} V(k^+ - q^+) f(q^+)$$

Введем ковариантную трехмерную волновую функцию Солпитера

$$\Psi_\varphi(q^+) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{D}_{(a)}(q^+P) \otimes \Gamma_{(a)}(q^+P), \quad (23)$$

и к ней применим процедуру "раздевания" (с помощью операторов (15)),

$$\Psi_\varphi(q^+) = \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \Psi_\varphi(q^+) \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+). \quad (24)$$

(Как будет видно ниже, эта процедура приводит к значительным упрощениям). В результате подстановки (22)-(24) в (21) получим релятивистски-ковариантное трехмерное уравнение на  $\Psi_\varphi$

$$\begin{aligned} [E_+(q^+) - \sqrt{\varphi^2}] (\Lambda_+^+ \Psi_\varphi(q^+) \Lambda_+^+) + [E_+(q^+) + \sqrt{\varphi^2}] (\Lambda_-^+ \Psi_\varphi(q^+) \Lambda_-^+) &= \\ = -\hat{I} [\mathcal{S}_{(a)}^1(q^+) \mathcal{S}_{(a)}^1(k^+)] \Psi_\varphi(k^+) [\mathcal{S}_{(a)}^1(k^+) \mathcal{S}_{(a)}^1(q^+)] & (25) \end{aligned}$$

(Уравнение (25) отличается от класса квазипотенциальных уравнений /13/. Нетрудно видеть, что собственные значения уравнения (25) (спектр кваркониев) удовлетворяют релятивистскому закону дисперсии  $\sqrt{\varphi^2} = M_\mu(\varphi^2 = M_\mu^2)$  в отличие от результатов работы /6/.

"Раздетая" функции  $\Psi_\varphi$  в силу (17), (18), (23)-(25) удовлетворяют тождеству

$$\Lambda_\pm^+ \Psi_\varphi(q^+) \Lambda_\pm^+ = 0 \Rightarrow \mathcal{D} \Psi_\varphi(q^+) = -\Psi_\varphi(q^+) \mathcal{D} \quad (26)$$

и может быть разложена по  $\gamma$ -матрицам

$$\Psi_\varphi(q^+) = \gamma_5 [l_1(q^+) + \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{\varphi^2}} l_2(q^+)] + \gamma_\mu [N_1^\mu(q^+) + \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{\varphi^2}} N_2^\mu(q^+)] \quad (27)$$

где  $l_{1(a)}$  - псевдоскаляр ( $l_1$  в случае нулевой массы отсутствует), а  $N_{1(a)}^\mu$  содержит вектор, аксиал и скаляр (продольная компонента). Следует отметить, что соответствующее разложение для одетой функции ( $\Psi_\varphi$ ) выльдет довольно сложным, особенно для случая  $m_{1(a)} \neq m_{2(a)}$ , и поэтому неудивительно, что в работе /6/ были допущены ошибки: нарушена структура  $(\mathcal{N}_1, l_1)$  и  $(\mathcal{N}_2, l_2)$ ; уравнения на  $\mathcal{N}_i$  получены неправильно. Уравнение (25) после подстановки (27) сводится к следующим уравнениям на  $l$  и  $\mathcal{N}^i$ , в системе покоя  $\varphi_\mu^0 = (M_\mu, 0, 0, 0)$ :

$$M_L L_{2(c)} = [E_T - \hat{I}(A_{(a)}^i A_{(b)}^i + C_{(a)}^i C_{(b)}^i + B_{(a)}^i B_{(b)}^i)] L_{2(c)},$$

$$M_N N_{2(c)} = \left\{ E_T - \hat{I}[(A_{(a)}^i A_{(b)}^i - C_{(a)}^i C_{(b)}^i + B_{(a)}^i B_{(b)}^i) \delta^{ke} + \right.$$

$$\left. + C_{(a)}^k C_{(b)}^e + C_{(a)}^e C_{(b)}^k - B_{(a)}^k B_{(b)}^e - B_{(a)}^e B_{(b)}^k + i \varepsilon^{keli} (C_{(a)}^i A_{(a)}^i + C_{(a)}^i A_{(b)}^i)] \right\} N_{2(c)}^e.$$

Здесь введены обозначения

$$A_{(a)}(k^t, \varphi^t) = C_{(a)}(k^t) C_{(a)}(\varphi^t) + (\hat{k}^t \hat{\varphi}^t) S_{(a)}(k^t) S_{(a)}(\varphi^t),$$

$$B_{(a)}^i(k^t, \varphi^t) = \hat{\varphi}_i^t S_{(a)}(\varphi^t) C_{(a)}(k^t) - \hat{k}_i^t S_{(a)}(k^t) C_{(a)}(\varphi^t),$$

$$C_{(a)}^k(k^t, \varphi^t) = -\hat{k}_i^t \hat{\varphi}_j^t \varepsilon_{ijk} S_{(a)}(k^t) S_{(a)}(\varphi^t);$$

$$S_{(a)}(\varphi^t) = \sin\left[\frac{F_{(a)}(\varphi^t)}{2}\right], \quad C_{(a)}(\varphi^t) = \cos\left[\frac{F_{(a)}(\varphi^t)}{2}\right];$$

$A_{(a)}(k^t = \varphi^t) = 1, B_{(a)}^i(k^t = \varphi^t) = 0 = C_{(a)}^i(k^t = \varphi^t)$ .  
(аналогичные выражения записываются с индексом (b)).

Нетрудно видеть, что уравнение (24) в пределе малых токовых масс кварков ( $m_q \rightarrow 0$ ) имеет собственное значение  $M_L = 0$ , так как в этом случае уравнение (23) совпадает с уравнением Дайсона - Швингера (18). Функция  $L_L$  описывает голдстоуновский бозон

$$L_L \xrightarrow{m_q \rightarrow 0} L_L^0 = \frac{1}{F} \sin \varphi(\varphi^t) \quad (29)$$

где  $F$  - константа размерности энергии, определенная из условия нормировки (34). (Следует отметить, что оператор мезонов, полученный в работе [6], может быть верен только для пиона и его радиальных возмущений (из-за выходящих ошибок)).

#### 4. Квантование биллокальных полей

Описание взаимодействия любых частиц осуществляется в рамках формализма  $S$  матриц. В квантовой теории существует определенная последовательность построения матричных элементов  $S$  матрицы: сначала вычисляются операторы возмущенных стационарных состояний, а затем матричные элементы переходов между этими состояниями, рассматривая любой взаимодействие как "малое возмущение"

$S$  - матрица существует, если асимптотические состояния стабильны, т.е. не распадаются, когда нет никакого "возмущения".

Мы видели выше, что стабильность и релятивистская ковариантность асимптотических состояний обеспечиваются определенным выбором оси времени  $\eta_\mu$ . Для свободных полей ось времени параллельна полному импульсу (в противном случае "атом" и потенциал, образующий "атом", движутся в разные стороны).

Для взаимодействующих биллокальных полей  $m(x, y)$   $S$  - матрица стабильна и релятивистски ковариантна, если ось времени  $\eta_\mu$  параллельна вектору оператора дифференцирования по полной координате  $(\eta_\mu - \frac{d}{dx_\mu}; X = \frac{x+y}{2})$ . Тогда квантованное биллокальное поле представляется в виде следующего разложения по операторам рождения  $\alpha_n^{(+)}(\mathcal{P})$  и уничтожения  $\alpha_n^{(-)}(\mathcal{P})$ :

$$m(x, y) = m(x, z) = \sum_N \int d\Omega_N \left( \frac{d^4 \mathcal{P}}{(2\pi)^4} e^{i\mathcal{P}z} \right. \quad (30)$$

$$\left. [e^{i\mathcal{P}X} \Gamma_N(\mathcal{P}/\varphi^t) \alpha_n^{(+)}(\mathcal{P}) + e^{-i\mathcal{P}X} \bar{\Gamma}_N(\mathcal{P}/\varphi^t) \alpha_n^{(-)}(\mathcal{P})] \right)$$

Здесь  $d\Omega_N = \frac{d^3 \mathcal{P}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_N}}$ ,  $\omega_N = \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + M_N^2}$ ,  $\Gamma_N(\mathcal{P}/\varphi^t)$  - решение уравнения (21) для "атома" с квантовыми числами  $N$ .

Операторы рождения и уничтожения подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\alpha_n^{(+)}(\mathcal{P}), \alpha_m^{(+)}(\mathcal{P}')] = \delta_{nm} \delta(\mathcal{P} - \mathcal{P}'),$$

$$[\alpha_n^{(+)}(\mathcal{P}), \alpha_m^{(-)}(\mathcal{P}')] = 0 \quad (31)$$

Состояния отдельного "атома"  $N$  или системы "атомов"  $N_1, \dots, N_n$  определяется, как обычно, действием операторов рождения на вакуум

$$\alpha_n^{(+)}(\mathcal{P})|0\rangle = |N, \vec{\mathcal{P}}\rangle; \alpha_n^{(-)}(\mathcal{P})|0\rangle = |N, \vec{\mathcal{P}}\rangle; \dots, |N_n, \vec{\mathcal{P}}_n\rangle. \quad (32)$$

#### 5. Нормировка волновых функций

Релятивистскую нормировку волновых функций описанных состояний определим аналогично тому, как это делается в локальном случае. Например, для свободного поля  $\phi$  со свободным действием  $S_0(\phi) / 14$ :

$$S_{cl}(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \phi(P) \mathcal{D}^{\dagger}(P) \phi(P),$$

$$\phi(P) = \int d^4x e^{iPx} \phi(x); \quad \mathcal{D}^{\dagger}(P) = (P^2 - m^2),$$

разложение по операторам рождения и уничтожения (31) имеет вид

$$\phi(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\text{Res } \mathcal{D}}} \left[ e^{iPx} a^{(+)}(\vec{P}) + e^{-iPx} a^{(-)}(\vec{P}) \right],$$

$$\text{Res } \mathcal{D} = \lim_{P_0 \rightarrow \omega} (P_0 - \omega) \mathcal{D}(P) = \frac{1}{2\omega}, \quad \omega = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2}.$$

Подстановка разложения (30) в действие (7) и использование формул (22), (23), (24), (26) и (27) приводят к следующим выражениям нормировки для волновых функций  $\psi_n$ ,  $L$  и  $N$ :

$$\frac{N_c}{4M_n} \int \frac{d^3q^{\dagger}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left[ \lambda_{-}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{+}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) - \lambda_{+}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{-}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \right] = 1; \quad (33)$$

$$\frac{N_c}{M_L} \int \frac{d^3q^{\dagger}}{(2\pi)^3} \left[ L_{-}(q^{\dagger}) L_{+}^{\dagger}(q^{\dagger}) + L_{+}(q^{\dagger}) L_{-}^{\dagger}(q^{\dagger}) \right] = 1, \quad (34)$$

$$\frac{N_c}{M_n} \int \frac{d^3q^{\dagger}}{(2\pi)^3} \left[ N_{-}(q^{\dagger}) N_{+}^{\dagger}(q^{\dagger}) + N_{+}(q^{\dagger}) N_{-}^{\dagger}(q^{\dagger}) \right] = 1. \quad (35)$$

### 6. Матричные элементы однокачественных полей

Матричные элементы однокачественных полей удобно записать в терминах функции  $\Phi(x, y)$  (см. (9)), для которой разложение по операторам рождения и уничтожения имеет вид

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y) \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{iqx} \cdot \left\{ e^{iPy} a_n^{(+)}(\vec{P}) \Phi_n^{\dagger}(P/q) + e^{-iPy} a_n^{(-)}(\vec{P}) \Phi_n^{\dagger}(P/q) \right\}. \quad (36)$$

Здесь  $\Phi_n^{\dagger}$  и  $\Phi_n^{\dagger}$  — положительно-энергетичные и отрицательно-энергетичные компоненты  $\Phi^{\dagger}$ -функции, соответствующие "атому"  $n$  (состояние  $n$  из четности  $(n)$  и  $(\bar{n})$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\dagger}(P/q^{\dagger}) &= G_{\Sigma_n}^{\dagger}(q + \frac{P}{2}) \Gamma_n^{\dagger}(P/q^{\dagger}) = \\ &= \int_{(\omega)}(q^{\dagger}) \left[ \frac{(E_T - M_n) \lambda_{+}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{-}^{\dagger}}{E_n(q^{\dagger}) - q^{\dagger} - \frac{M_n}{2} - i\varepsilon} + \frac{(E_T + M_n) \lambda_{-}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{+}^{\dagger}}{E_n(q^{\dagger}) + q^{\dagger} + \frac{M_n}{2} - i\varepsilon} \right] \mathcal{D}_{(\omega)}^{\dagger}(q^{\dagger}), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n^{\dagger}(P/q^{\dagger}) &= G_{\Sigma_n}^{\dagger}(q - \frac{P}{2}) \bar{\Gamma}_n^{\dagger}(P/q^{\dagger}) = \\ &= \int_{(\omega)}(q^{\dagger}) \left[ \frac{(E_T - M_n) \lambda_{-}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{+}^{\dagger}}{E_n(q^{\dagger}) + q^{\dagger} - \frac{M_n}{2} - i\varepsilon} + \frac{(E_T + M_n) \lambda_{+}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(q^{\dagger}) \lambda_{-}^{\dagger}}{E_n(q^{\dagger}) - q^{\dagger} + \frac{M_n}{2} - i\varepsilon} \right] \mathcal{D}_{(\omega)}^{\dagger}(q^{\dagger}). \end{aligned}$$

Используя определение амплитуды системы связанных состояний (32) и разложение (36), нетрудно найти матричный элемент, например, между вакуумом и состоянием  $n$  "атомов":

$$\langle n_1 \vec{P}_1; \dots, n_n \vec{P}_n | i S_{\mathcal{G}}^{(n)} | 0 \rangle = -i (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \varepsilon$$

$$\varepsilon \left\{ \prod_{j=1}^n \left[ (2\pi)^3 2\omega_j \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-1} \mathcal{M}^{(n)}(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n);$$

где  $\omega_j = (\vec{P}_j^2 + M_j^2)^{\frac{1}{2}}$ ,

$$\mathcal{M}^{(n)}(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \sum_{\text{перестановки}} \frac{1}{n} \Phi_{a_1 a_2}^{n_1}(q/q) \cdot$$

$$\cdot \Phi_{a_2 a_3}^{n_2}(q_2/q - \frac{P_1 + P_2}{2}) \Phi_{a_3 a_4}^{n_3}(P_3/q - (P_3 + \frac{P_1 + P_2}{2})) \dots \quad (38)$$

$$\cdot \Phi_{a_n a_1}^{n_n}(q_n/q - (q_n + \dots + q_{n-1} + \frac{P_1 + P_2}{2})).$$

Выражение для функции Грина связанных состояний определено в работе /10/:

$$\mathcal{D}_{\Sigma}^{\dagger}(q)(\omega/p, q) \sim \sum_n \left( \frac{L_n^{\dagger}(q/q) \Gamma_n^{\dagger}(P/q)}{(P_n - \omega_n - i\varepsilon) 2\omega_n} \cdot \frac{L_n^{\dagger}(P/q) \Gamma_n^{\dagger}(P/q)}{(P_n + \omega_n - i\varepsilon) 2\omega_n} \right). \quad (39)$$

Выражения (36)–(39) можно использовать для построения квантовой теории поля в терминах связанных состояний.

Определим константу лагранжиана взаимодействия  $f_n^{\dagger}$ . Взаимодейст

вие мезона с лептонным током, описываемым локальным оператором  $L(x)$ , определяется подстановкой  $m \rightarrow m'+L$  в (7) и имеет вид

$$S_L^{(2)} = i N_c \text{Tr} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \cdot m'_{ab}(x_1, x_2) G_{\tau_{ab}}(x_1, y_1) L(y_1) \delta^4(y_1 - y_2) G_{\tau_{ca}}(y_2, x_2). \quad (40)$$

Тогда, подставляя это выражение в левую часть уравнения для матричного элемента распада

$$\langle \nu | i S_L^{(2)} | \pi, \bar{\nu} \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(P_\pi - P_\nu) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (2\omega_\pi)^{-\frac{1}{2}} F_\pi \bar{\nu} \ell_\pi \quad (41)$$

(где  $\ell_\pi$  - матричный элемент лептонного тока, умноженный на  $G_\tau \cos \theta_c / \sqrt{2}$ ), и используя (38), получим

$$F_\pi = \frac{2 N_c}{M_\pi} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} L_2(q^+) \sin \varphi(q^+). \quad (42)$$

С помощью этого выражения можно вычислить константу лептонного распада пиона  $F_\pi$  с известными решениями  $(L_1 \approx \frac{\sin \varphi}{F})$ ,  $L_2(q^+)$ ,  $\varphi(q^+)$ . Уравнение нормировки (34) после подстановки в него в качестве приближенного решения (в пределе легких кварков) голдстоуновской моды (29) ( $L_1 \approx L_1^0 \cdot \sin \varphi / F$ ) дает  $F = F_\pi$ . Подставляя в правую часть уравнения (27)

$$M_\pi L_2(q^+) = [2E(q^+) - \hat{I}] L_2(k^+) \quad (43)$$

голдстоуновское решение ( $L_1 \approx L_1^0$ ) и используя уравнение Дайсона - Швингера

$$E \sin \varphi(q^+) = m_0 + \frac{1}{2} \hat{I} \sin \varphi(k^+),$$

находим приближенное решение для  $L_2$  ( $m_0 > 0$ ),

$$L_2(q^+) \approx L_2^0(q^+) \frac{2m_0}{M_\pi f_\pi}. \quad (44)$$

Тогда из (34) при  $L_1 \approx L_1^0$  и  $L_2 \approx L_2^0$  получим

$$2 N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \sin \varphi(q^+) \approx \frac{F_\pi^2 M_\pi^2}{2m_0}. \quad (45)$$

Нетрудно заметить, что левая часть равенства совпадает (с точностью до знака) с вакуумным средним легких кварков

$$\langle \bar{q} q \rangle = i N_c \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [G_\tau(q) - G_{m_0}(q)] \approx -2 N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \sin \varphi(q^+)$$

В результате имеем искомое низкоэнергетическое соотношение между  $F_\pi$  и  $\langle \bar{q} q \rangle$ .

$$-2 m_0 \langle \bar{q} q \rangle = F_\pi^2 M_\pi^2. \quad (46)$$

## 7. Низкоэнергетический предел бислокальных лагранжианов

Как мы видели, в пределе низких энергий решение уравнения Солпитера определяется голдстоуновской модой  $L_1(q^+) \sim \sin \varphi(q^+) / F_\pi$ . Если учесть, что в этом пределе решение уравнения Дайсона - Швингера имеет асимптотику  $\varphi(q^+) \sim \frac{1}{F}$ , то нетрудно видеть, что предельным значением вершинной функции в импульсном пространстве будет просто константа. В координатном представлении соответствующий низкоэнергетический предел бислокального поля тогда имеет вид

$$m'(x, y) \sim \delta^{(4)}(x - y). \quad (47)$$

Этот предел (47) возникает также, если предположить, что ядро Бете - Солпитера является  $\delta$ -функцией,  $K(x, y) \sim \delta^{(4)}(x - y)$ . Именно такой потенциал четырехфермионного взаимодействия был исходным приближением в первой формулировке [15] спонтанного нарушения киральной симметрии. Существует множество литературы [16, 17], где доказано, что  $\delta$ -образный потенциал ведет к киральным феноменологическим лагранжианам. (Изучению легких мезонов с использованием  $\delta$ -образного потенциала в нашем подходе релятивизации рассмотрено в работе [18]).

Таким образом, предел (47), обусловленный асимптотикой волновых функций кваркониов (а не выбором  $\delta$ -образного потенциала), также приводит к киральным феноменологическим лагранжианам.

## Заключение

Результатом работы является релятивизация потенциальной модели и обобщение ее на описание взаимодействия мезонов.

Для построения модели единого описания спектра и взаимодействия кваркониов мы исходили из аналогии тяжелого кваркониона подорожничко-ну этому, описываемому в КД. Построение релятивистски ковариантной  $\gamma^5$  матрицы для антисимметрических состояний (атомов) в КД требует использования принципов "минимального" квантования (с явным решением уравнения на временную компоненту  $A_0 = \gamma \cdot A$ ) и отбра-  
 деленного выбора оси квантования  $\mathcal{Q}_r$ .



"Минимальное" квантование неабелевой теории (КХД<sub>мин</sub>) было проведено в работах /4,5/. КХД<sub>мин</sub> по сравнению с обычной формулировкой в радиационной калибровке (основанной на методе квантования Дирака) может содержать дополнительную физическую информацию:

1) ненормируемые решения уравнения Гаусса (которые ведут к инфракрасному доопределению кулоновского потенциала (т.е. к возмущению растущего потенциала); 2) топологическое вырождение физических переменных (которое ведет к механизму конфайнмента - деструктивной интерференции фаз топологического вырождения /5,19/.

В настоящей работе, по существу, был рассмотрен низший порядок КХД<sub>мин</sub> по поперечным глюонным полям ( $A^+$ ) с указанным выше доопределением кулоновского потенциала в инфракрасной области.

Описание глюонов в КХД<sub>мин</sub> при тех же предположениях было сделано в работе /20/ (см. также /9/), где показано, что точное решение уравнения на спектр глюонов в растущем потенциале приводит к динамической массе глюона и модифицирует формулу асимптотической свободы для малых переданных импульсов, в результате чего эффективная кварк-глюонная константа связи становится малой, а обычный вакуум - стабильным.

Эти результаты позволяют надеяться на малость радиационных поправок к релятивистской потенциальной модели, описанной в статье.

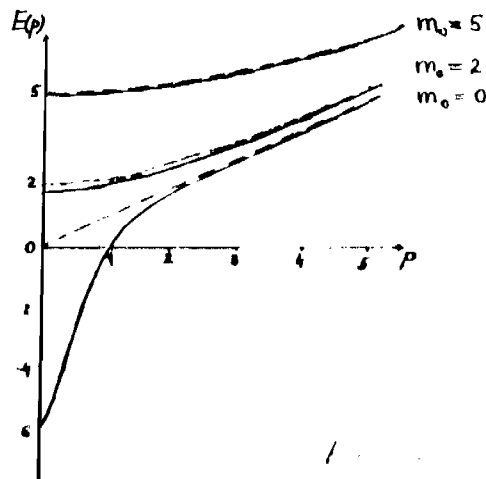


Рис. 1.

Численно решены уравнения Дирака Швингера для кварков с различными токами мезонной  $F(p)$ ;  $F_0 = \sqrt{m_0^2 + p^2}$ ,  $F_0$ ,  $p$  и  $m_0$  даны в единицах  $(\frac{1}{2} V_0)^{1/2} = 300 \text{ МэВ}$ .

В заключение авторы благодарят Д.В. Волкова, В.Г. Кадышевского, А.А. Хелашвили за плодотворные дискуссии.

#### Литература

1. Быков А.А., Дремин И.М., Леонидов А.В. УЭН, 1984, 143, 3.
2. Волков М.К., Первушин В.Н. Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов, М., Атомиздат, 1978, 239с.
3. Heisenberg W., Pauli W. Z. Phys., 1929, 56, 1; 1930, 59, 168.
4. Nguyen Suan Han, Pervushin V.N. Mod.Phys. Lett., 1987, A2, 367.
5. Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. ЯФ, 1987, 45, 1169.
6. A Le Yaonanc, Oliver L., Pene P., Raunai I.C. Phys. Rev., 1984, D29, 1237; 1985, D31, 137.
7. Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. Препринт ОИЯИ P2-88-164.
8. Sazdjn H. Phys. Rev. 1986, D33, 3401; 3495.
9. Pervushin V.N., Kalles W., Sarikov N.A. Preprint JINR E2-87-430. Первушин В.Н., Каллис В., Нгуен Суан Хан, Сариков Н.А. Препринт ОИЯИ, P2-87-674.
10. Pervushin V.N., Kalles, Nguyen Suan Han, Sarikov N.A. Preprint JINR E2-88-78.
11. Первушин В.Н., Х. Рейнхардт, Коерт Д. ЧАД, 1979, 10, 1114.
12. Feldy L.L., Wouthuysen S.A. Phys. Rev., 1950, 78, 29.
13. Амирханов И. и др. Препринт ОИЯИ P11-88-506, Дубна, 1988.
14. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, 380. Kadyshvsky V.G. Nucl. Phys. 1968, 86, 125. Klein A., Lee T.-S. N. Phys. Rev., 1974, D10, 4308.
15. Боголюбов Н.Н., Шарков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1976.
16. Hamby Y., Jona - Lasinio G. Phys. Rev 1961, 122, 345; 1961, 124, 346.
17. Kleiner H. Proc. Erice Lectures, 1976, 289; Proc. Int Conf. on High Energy Physics, Tbilisi, 1976, JINR DI, 2 - 10400, 241.
18. Volkov M.K. Ann. Phys. 1984, 157, 285; Ebert D., Reinhardt N. Nucl. Phys. 1986, B 271, 188.
19. Kulinewski Yu.L., Kaschlun L., Pervushin V.N. Preprint JINR E2-88-487, Dubna.
20. Pervushin V.N. Riv Nuove Cimento, 1985, v. 8, No 10.
21. Bogoljubshvili A.A., Kalinovskiy Yu.L., Kalites W., Pervushin V.N. Proc. of XX Int. Seminar on HEP and QED, Dubna, 14-19 June, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел

25 июля 1988 года.