объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

М-482

Р2-88-55

В.К.Мельников

ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в журнал "Письма в ЖЭТФ"

1988

В настоящее время разнообразие в динамике солитонных решений нелинейных интегрируемых систем является наиболее интригующим обстоятельством в теории этих систем. В качестве иллюстрации к этому утверждению рассмотрим следующую систему уравнений [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u\varphi = E\varphi, \tag{I}$$

где $\varkappa$ и E – вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $\varkappa^2 = 1$, $E > 0$.

Следуя соображениям, возникающим при внимательном чтении работы [2], будем искать решение этой системы в следующем виде:

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-f)]}, \quad \varphi = \frac{A}{ch[\mu(x-f)]}, \tag{2}$$

где μ – вещественный параметр, а функции f и A зависят только от времени t. В результате непосредственной подстановки этих выражений в систему (I) получаем соотношения

$$\frac{df}{dt} = 4(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2), \quad \mu^2 = E. \tag{3}$$

Из этих соотношений следует, что произвольная комплексная функция $A(t)$ определяет решение системы (I) указанного выше вида (2), если положить

$$f = f_0 + 4\int_{t_0}^{t}(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A(\tau)|^2)\,d\tau. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что при $A \equiv 0$ решение (2) совпадает с хорошо известным солитоном уравнения Кортевега – де Вриса [3]. Далее, если $A = A_0 \exp(i\omega t)$, где $A_0 \neq 0$ и ω не зависят от t, то решение (2) является солитоном системы (I). Отсюда следует, что если

$$\lim_{t\to-\infty}[A(t)\exp(-i\omega t)] = A_0 \neq 0, \quad \lim_{t\to\infty} A(t) = 0,$$

то решение (2) описывает эволюцию солитона системы (I) в солитон уравнения Кортевега – де Вриса. Наоборот, если

$$\lim_{t\to-\infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}[A(t)\exp(-i\omega t)] = A_0 \neq 0,$$

то решение (2) описывает эволюцию солитона уравнения Кортевега – де Вриса в солитон системы (I).

В общем случае при $\varkappa = 1$ под интегралом в (4) стоит положительная величина. Таким образом, при $\varkappa = 1$ волны вида (2) могут распространяться вдоль оси x только в одном направлении, именно слева направо. Однако при $\varkappa = -1$ эти волны могут двигаться в обоих направлениях. Выбирая функцию $A(t)$ специальным образом, нетрудно добиться, чтобы волна (2) сначала двигалась в одном направлении, а затем двигалась в противоположном направлении. Для этого согласно (3) нужно, чтобы разность $E - |A(t)|$ как функция времени t сначала принимала значения одного знака, а затем принимала значения другого знака. Более того, если функция $A(t)$ выбрана так, что разность $E - |A(t)|$ имеет ровно N перемен знака, то волна (2) будет ровно N раз менять направление своего движения. Идя дальше в этом направлении, можно выбрать функцию $A(t)$ так, чтобы при $t > 0$ разность $E - |A(t)|$ имела бесконечно много перемен знака, а при $t < 0$ удовлетворяла условию $(E - |A(t)|)^2 \geq c$, где $c > 0$ – константа. В этом случае решение (2) описывает волну, которая приходит из бесконечности, а затем захватывается в колебательный режим. Наоборот, если функция $A(t)$ выбрана так, что при $t < 0$ разность $E - |A(t)|$ имеет бесконечно много перемен знака, а при $t > 0$ удовлетворяет условию $(E - |A(t)|)^2 \geq c$, то решение (2) описывает волну, которая совершала колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит в бесконечность. Наконец, если функция $A(t)$ выбрана так, что разность $E - |A(t)|$ имеет перемены знака на любом интервале $t < t_-$ и на любом интервале $t > t_+$ (t_- и t_+ взяты произвольно), то решение (2) описывает волну, которая совершает колебательное движение весьма общего вида.

Предположим теперь, что $A(t)$ – периодическая с периодом T функция времени t. Предположим, далее, что эта функция

...СТИТУТ ...ОВАНИЙ БИБЛИОТЕКА

удовлетворяет условиям

$$\int_0^T (E^2 - |A(t)|^2)\, dt = 0, \ |A(t)| \not\equiv E. \qquad (5)$$

В этом случае в силу (4) при $\varkappa = -1$ решение (2) будет периодической с периодом T функцией времени t, т.е. волна (2) будет совершать периодическое колебательное движение относительно некоторого промежуточного положения. При этом u-волна сохраняет свою форму, а амплитуда источника φ будет периодически меняться со временем. Таким образом, введение в уравнение Кортевега - де Вриса источника φ, удовлетворяющего стационарному уравнению Шредингера, приводит к появлению качественно новых решений, описывающих уединенную волну, удерживаемую во все времена в ограниченной части пространства. Впервые решения такого типа были обнаружены в работе /4/ для другой нелинейной интегрируемой системы.

В том случае, когда вместо (5) выполняются условия

$$\frac{1}{T}\int_0^T |A(t)|^2 dt = C \neq E^2, \ |A(t)|^2 \not\equiv C,$$

волна (2) будет неограниченно удаляться как при $t \to -\infty$, так и при $t \to \infty$, т.е. волна (2) приходит из бесконечности и снова уходит в бесконечность. При этом ее движение будет слагаться из равномерного поступательного движения и периодического колебательного движения.

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция $A(t)$ имеет вид

$$A = \begin{cases} A_0 \exp(i\omega t), & \text{если } t < 0, \\ p(t), & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

где A_0 и ω - константы, причем $|A_0| \neq E$, а $p(t)$ - периодическая с периодом T функция времени t, такая, что

$$\int_0^T (E^2 - |p(t)|^2)\, dt = 0, \ |p(t)| \not\equiv E, \ p(0) = A_0.$$

В этом случае описываемая решением (2) волна приходит из бесконечности, а затем захватывается в периодический колебательный режим. Если теперь в этом решении заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученное новое решение системы (I) будет описывать

волну, которая совершала периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит в бесконечность.

Система (I) обладает тремя локальными законами сохранения вида

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0, \ m = 1, 2, 3, \qquad (6)$$

где

$$T_1 = u, \ X_1 = 3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\varkappa|\varphi|^2,$$

$$T_2 = u^2, \ X_2 = 4u^3 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 16\varkappa\left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 - E|\varphi|^2\right),$$

$$T_3 = u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 8\varkappa\left(u|\varphi|^2 - \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 - E|\varphi|^2\right),$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\varkappa|\varphi|^2\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + 8\varkappa\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}\right).$$

Здесь и в дальнейшем черта над функцией φ означает комплексное сопряжение. Из равенств (6) следует, что на быстро убывающих по x решениях системы (I) плотности T_m определяют сохраняющиеся величины I_m вида

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} T_m\, dx, \ m = 1, 2, 3.$$

Нетрудно убедиться, что на решении (2) величины I_m принимают следующие значения:

$$I_1 = 4|\mu|, \ I_2 = \frac{16}{3}|\mu|^3, \ I_3 = \frac{32}{5}|\mu|^5.$$

Положим, наконец, $H = -I_3$. Тогда система (I) может быть записана в следующем гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}, \ \frac{\delta H}{\delta \varphi} = \frac{\delta H}{\delta \overline{\varphi}} = 0.$$

В заключение отметим, что согласно результатам работ [5,6] для исследования системы (I) применим метод обратной задачи рассеяния. Он позволяет найти другие типы решений системы (I). Детальному рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

Литература

I. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.-Physica D, 1986, v.18D, N 1, p.455-463.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-87-868, Дубна, 1987.
3. Gardner C.S. et al.-Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, N 19, p.1095-1097.
4. Calogero F., Degasperis A.-Lett. Nuovo Cimento, 1976, v.16, N 14, p.425-433.
5. Mel'nikov V.K.-Lett.Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.I29-136.
6. Mel'nikov V.K.-Commun.Math.Phys., 1987, v.112, N 4, p.639-652.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 января 1988 года.

Мельников В.К. Р2-88-55
Захват и удержание солитонов
в нелинейной интегрируемой системе

Рассмотрена система, описываемая уравнением Кортевега-де Вриса с источником, удовлетворяющим стационарному уравнению Шредингера. В этой системе найдены решения, описывающие солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в периодические колебательные режимы. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-88-55
Capture and Confinement of Solitons
in a Nonlinear Integrable System

The system is considered which is described by the Korteweg-de Vries equation with the source satisfying the stationary Schroedinger equation. The solutions are found in this system which describe solitons coming from infinity and then captured in the periodic oscillatory regime.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988