

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P 422

P2-88-544

К.В.Рерих

ИНТЕГРИРУЕМАЯ  
ТРЕХКАНАЛЬНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ ДВУХ ЧАСТИЦ  
СО СПИНОМ 1

Направлено в журнал "Математический сборник"

1988

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно <sup>/1/</sup>, широкий класс уравнений Чу - Лоу <sup>/2/</sup> и им подобных, отличающихся от последних по существу только матрицей кроссинг-симметрии, допускает формулировку их в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений <sup>/1,3/</sup>:

$$S_i(-w) = \sum_j A_{ij} S_j(w),$$

$$S_i(w+1) = 1/\sum_j A_{ij} S_j(w).$$

/1/

Здесь  $S_j(w)$  - матричные элементы S-матрицы в состояниях  $i$ ,  $A_{ij}$  - элементы матрицы кроссинг-симметрии  $n \times n$  со свойствами  $A^2 = E$ ,  $\sum_j A_{ij} = 1$ . Решения системы /1/ должны быть мероморфными действительными функциями униформизирующей переменной  $w = 1/\pi \arcsin \omega$ , где  $\omega$  - энергия пиона в лабораторной системе, и удовлетворять некоторым локальным условиям требуемого порогового поведения и поведения в борновском полюсе.

Ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных разностных уравнений система /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную задачу, решение которой, как и любой нелинейной системы, имеет самостоятельный интерес. Этой проблеме посвящены многолетние исследования ряда авторов <sup>/1,3-16/</sup>, направленные как на поиск частных решений, так и на построение общего решения системы уравнений /1/, которое в явном виде известно только для случая матрицы  $A(2 \times 2)$  <sup>/4,5/</sup>.

Известен общий произвол в решениях системы /1/, который поясняет замена  $S_i(w) \rightarrow S_i(w + \beta(w))D(w)$ , где  $\beta(w)$  и  $D(w)$  имеют свойства

$$\beta(-w) = -\beta(w), \quad \beta(w+1) = \beta(w), \quad D(-w) = D(w), \quad D(1-w)D(w) = 1. \quad /2/$$

В настоящей работе впервые будет дано общее решение уравнений /1/ с матрицей  $A(1,1)$ :

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

/3/

которое, кроме неоднозначности типа /2/, будет зависеть от новых произвольных функций  $\gamma(w)$  или  $\delta(w)$ , где  $\gamma(w)$  - четная функция, а  $\delta(w)$  - нечетная, и которые соответствуют двум типам общего решения. Физически уравнения /1/ с матрицей /3/ описывают в рамках статической модели упругое s-волновое рассеяние двух частиц со спином 1 или p-волновое рассеяние частицы с нулевым спином на частице со спином 1.

Настоящая работа посвящена решению чисто математических вопросов этой физической задачи.

Ниже в §2 совершается переход от функций  $S_i(w)$  в /1/ к функциям определенной четности  $x(w)$ ,  $y(w)$  и  $t(w)$ , которые являются коэффициентами в разложении  $S_i(w)$  по собственным векторам  $A(1,1)$ . Система уравнений /1/ распадается на систему нелинейных разностных уравнений для функций  $x(w)$ ,  $y(w)$  и разностное уравнение для  $t(w)$  с правой частью, зависящей от  $x(w)$  и  $y(w)$ . На основе геометрической интерпретации /§ 2/ уравнений для  $x(w)$  и  $y(w)$  как квадратичных преобразований Крэмона в § 3 будет получено функциональное уравнение на инвариантные кривые и с его помощью будет дана классификация всех инвариантных кривых, а именно: имеются только три алгебраические кривые и одна неалгебраическая, для алгебраических кривых получены инвариантные полиномы, их определяющие. На основе найденных инвариантных полиномов в § 4 построено квадратичное кремоново преобразование  $x(w)$ ,  $y(w) \rightarrow u_1(w)$ ,  $u_2(w)$ , которое приводит исходные уравнения к весьма простому виду. В § 5 получены два частных решения этих уравнений, которые являются параметрическим заданием двух ветвей инвариантной неалгебраической кривой. Выяснена структура полюсов полученных решений, указан эффективный алгоритм вычисления этих решений при произвольных значениях аргумента. Обсуждаются свойства ветвей неалгебраической кривой и их графическое представление.

В § 6 будет установлено, что исходные уравнения в их новой форме, полученной в § 4, рассматриваемые как преобразования плоскости, имеют якобиан, не равный единице. Далее мы находим для этих уравнений инвариантную меру и строим соответствующее квадратичное преобразование, преобразующее их в форму, сохраняющую площадь.

Это позволяет использовать геометрические результаты Биркгофа /17/. Следуя Биркгофу, вводится нормализующая замена  $u_1(w)$ ,  $u_2(w) \rightarrow \xi_1(w)$ ,  $\xi_2(w)$  - ряды по двум переменным, для которых преобразование /разностные уравнения/ имеют вид

$$\xi_1' = b(\eta)\xi_1, \quad \xi_2' = \frac{1}{b(\eta)}\xi_2,$$

где  $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$  - есть инвариант. Ряды нормализующей замены, а также ряд для  $b(\eta)$  сходятся в некоторой конечной окрестности

начала координат, что следует из работ /18, 19/. Получены рекуррентные соотношения для коэффициентов указанных выше рядов путем решения соответствующих функциональных уравнений. Установлена связь этих коэффициентов с коэффициентами, входящими в решения, задающие неалгебраическую инвариантную кривую /§ 5/. Решая разностные уравнения для  $\xi_1(w)$  и  $\xi_2(w)$ , получим общее решение в виде рядов по переменным  $\xi_1(w) = \gamma(w) \exp(\ln b(\gamma^2)w)$ ,  $\xi_2(w) = \gamma(w) \exp(-\ln b(\gamma^2)w)$  либо  $\xi_1(w) = \delta(w) \exp(\ln b(-\delta^2)w)$ ,  $\xi_2(w) = -\delta(w) \exp(-\ln b(-\delta^2)w)$ , где  $\gamma(w)$  и  $\delta(w)$  - упомянутые выше периодические функции. Для третьей искомой функции  $t(w)$  получено линейное разностное уравнение с правой частью, равной логарифму отношения рядов по переменным  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ . При  $\gamma(w)$  и  $\delta(w)$ , равных нулю, решение этого уравнения совпадает с решениями, полученными ранее в /7/. Установление явной мероморфности исходных функций  $S_i(w)$  будет предметом отдельного исследования.

## § 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ /1/ С МАТРИЦЕЙ /3/ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА

Будем рассматривать систему уравнений /1/ с матрицей /3/ в удобной для нас форме, предложенной в /10/:

$$\begin{aligned} x' &= F_1(x, y)/D(x, y) & F_1 &= x + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2, \\ y' &= F_2(x, y)/D(x, y) & F_2 &= -y + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2, \end{aligned} \quad /4/$$

$$x' = x(w+1), \quad y' = y(w+1) \quad D = 1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2,$$

$$x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w), \quad /5/$$

$$t(w+1)t(w) = (1 - \frac{5}{4}y + 2x)(1 - \frac{5}{4}y' - 2x'), \quad /6/$$

$$t(-w) = t(w). \quad /7/$$

Связь  $S_i(w)$  в /1/ с функциями  $x(w)$ ,  $y(w)$  и  $t(w)$  дается формулой

$$S_i(w) = (\xi_i + \eta_i y(w) + \mu_i x(w))/t(w), \quad /8/$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  - собственные векторы матрицы  $A$  из /3/.

$$A(\xi, \eta) = (\xi, \eta), \quad A\mu = -\mu$$

$$\xi = (1, 1, 1), \quad \eta = (\frac{15}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}), \quad \mu = (-4, -2, 2). \quad /9/$$

В центре нашего внимания в дальнейшем будет система нелинейных разностных уравнений /4/ для функций  $x(w)$  и  $y(w)$ , удовлетворяющих /5/. К функции  $t(w)$  и уравнению /6/ мы вернемся в конце § 6.

Представим себе, что мы имеем семейство решений системы /4/, которое мы можем изобразить на плоскости  $x, y$  в виде семейства траекторий. Это могут быть частные решения системы /4/, лежащие на инвариантной кривой в плоскости  $x, y$  или же семейство решений, зависящее от параметра, принимающего непрерывные значения. Тогда уравнения /4/ задают сдвиг на таких инвариантных кривых или преобразование внутри семейства решений. Несомненно, что инвариантные кривые должны играть важную роль в нахождении общего решения системы /4/. Поэтому будем рассматривать уравнения /4/ как геометрическое преобразование плоскости  $x, y$  и поставим задачу отыскания всех инвариантных кривых и инвариантов такого преобразования. Заметим, что согласно общей теории нелинейных разностных систем /см., например, /20/ / система /4/ зависит от двух произвольных периодических функций. Одна из них -  $\beta(w)$  согласно свойству /2/ задает нелинейный сдвиг на решениях /4/ и, как следствие /6/, другая -  $D(w) = e^{\alpha(w - \frac{1}{2})}$  изменяет мультипликативно только  $t(w)$ . Таким образом, инвариантом преобразования /4/ будет недостающая периодическая функция, что будет получено в § 6.

Обратное преобразование /4/ однозначно и легко получается из /4/ заменой  $w \rightarrow -w-1$  и с учетом /5/.

$$x = -\frac{F_1(-x', y')}{D(-x', y')}, \quad y = \frac{F_2(-x', y')}{D(-x', y')} \quad /10/$$

Более удобно перейти в /4/ к однородным координатам  $x \rightarrow x/z, y \rightarrow y/z$ . Тогда преобразование /4/ примет вид  $T_2$ :

$$x' : y' : z' = \Phi_1(x, y, z) : \Phi_2(x, y, z) : \Phi_3(x, y, z),$$

$$\Phi_1 = xz + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2,$$

$$\Phi_2 = -yz + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2, \quad /11/$$

$$\Phi_3 = z^2 + 4xz + \frac{13}{4}yz + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2.$$

Обратное преобразование  $T_2^{-1}$  в соответствии с /10/ имеет вид

$$x : y : z = \Phi_1'(x', y', z') : \Phi_2'(x', y', z') : \Phi_3'(x', y', z'),$$

$$\Phi_1'(x, y, z) = -\Phi_1(-x, y, z), \quad \Phi_k'(x, y, z) = \Phi_k(-x, y, z), \quad k = 2, 3. \quad /12/$$

Преобразования /11/ и /12/ представляют собой частный случай квадратичных преобразований Кремона  $T_2, T_2^{-1} \in \text{Cg}_2$  - см. /21/ с.1,30. Заметим, что впервые связь уравнений Чу - Лоу вида /1/ с преобразованиями Кремона была отмечена в /9/.

Остановимся на свойствах преобразования Кремона /11/, /12/, важных для дальнейшего. Преобразования  $T_2$  и  $T_2^{-1}$  являются взаимно однозначным преобразованием плоскости, причем взаимная однозначность нарушается в трех фундаментальных точках  $O_1, O_2, O_3$  ( $O'_1, O'_2, O'_3$ ) и на трех соответствующих им основных прямых  $j_1, j_2, j_3$  ( $j'_1, j'_2, j'_3$ ) /см. рис.1/. При преобразовании  $T_2$  ( $T_2^{-1}$ ) фундаментальным точкам  $O_i$  ( $O'_i$ ) соответствуют точки основных прямых  $j'_i$  ( $j_i$ ), а все точки прямых  $j_i$  ( $j'_i$ ) отображаются в точки  $O'_i$  ( $O_i$ ). Фундаментальные точки  $O_i$  ( $O'_i$ ) определяются из одновременного обращения в нуль трех функций  $\Phi_k$  ( $\Phi'_k$ ):

$$O_i = (x_i, y_i, 1), \quad O'_i = (-x_i, y_i, 1)$$

/13/

$$O_1 = (2, 4, 1), \quad O_2 = (-\frac{2}{5}, \frac{4}{25}, 1), \quad O_3 = (\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, 1).$$

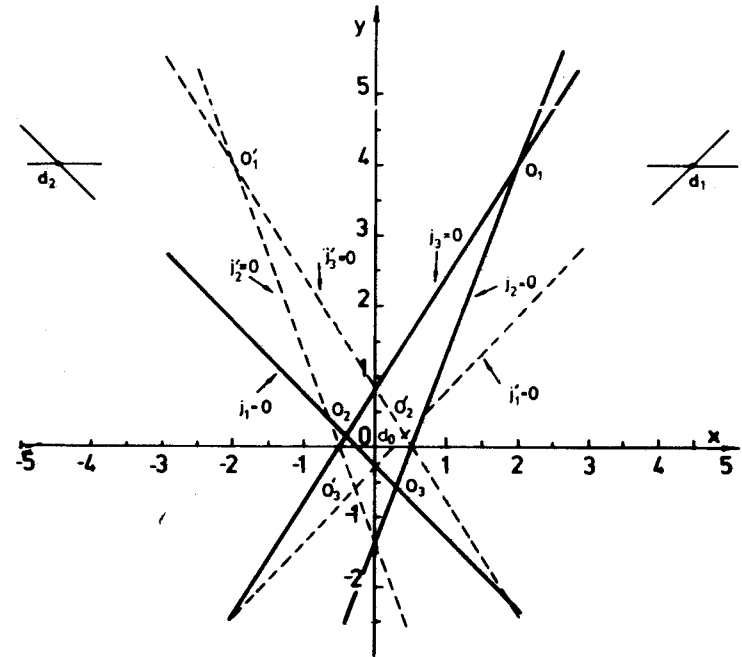


Рис.1. Фундаментальные точки и основные прямые прямого /11/ и обратного /12/ преобразования Кремона.

Основные прямые  $j_i(j'_i)$  проходят через точки  $O_k O'_l (O_k O'_l)$ ,  $k \neq l \neq i$ , и они есть

$$j_1 = z + 4x + \frac{15}{4}y = 0, \quad j_2 = z - 2x + \frac{3}{4}y = 0, \quad j_3 = z + 2x - \frac{5}{4}y = 0 \quad /14/$$

$$j'_i = j_i(-x, y, z).$$

Если от переменных  $x, y, z$  перейти к  $j_1, j_2, j_3$ , то преобразование /11/ примет стандартную форму

$$j'_1 : j'_2 : j'_3 = j_2 j_3 : j_3 j_1 : j_1 j_2, \quad /15/$$

$j'_i$ -функции от  $x', y', z'$ .

Неподвижные точки преобразования /11/ определяются из условия

$$x : y : z = \Phi_1(x, y, z) : \Phi_2(x, y, z) : \Phi_3(x, y, z). \quad /16/$$

Они лежат на кубиках

$$1) y\Phi_3 - z\Phi_2 = 0, \quad 2) z\Phi_1 - x\Phi_3 = 0, \quad 3) x\Phi_2 - y\Phi_1 = 0. \quad /17/$$

Первые две кубики имеют общими точками  $O_1, O_2, O_3$  и две точки  $z = \Phi_3 = 0$ . Остальные 4 точки являются неподвижными и лежат на третьей кубике.

Решение этих уравнений дает:

$$d_0 = d_3 = (0, 0, 1), \quad d_1, d_2 = (\pm 2\sqrt{5}, 4, 1). \quad /18/$$

В каждой точке  $d(x_0, y_0, 1)$  есть два инвариантных направления, вдоль которых инвариантные кривые могут входить в неподвижную точку. Анализ линеаризованного отображения /4/ в окрестности каждой неподвижной точки показывает, что точка  $d_0$  является параболической /собственное значение =  $\pm 1$ / с инвариантными направлениями

$$1) x = 0, \quad 2) y = 0. \quad /19/$$

Точки  $d_1, d_2$  являются гиперболическими и имеют следующие инвариантные направления:

$$1) y - 4 = 0, \quad 2) x \mp 2\sqrt{5} \mp \frac{15}{32}\sqrt{5}(y - 4) = 0. \quad /20/$$

Ниже мы рассмотрим вопрос о преобразовании кривых относительно преобразования Кремона /11/.

### § 3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ

Пусть мы имеем общую неприводимую алгебраическую кривую  $\Gamma = f_\mu(x, y, z) = 0$ , заданную однородным полиномом степени  $\mu$ . При преобразовании /11/ она перейдет в кривую степени  $2\mu$   $f_{2\mu} = f_\mu(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ , которая также, как легко показать, будет неприводимой в том и только в том случае, если кривой  $f_\mu(x, y, z)$  не принадлежат фундаментальные точки  $O'_i$  /13/. Если неприводимая кривая имеет в точках  $O'_i$  /13/ кратности  $\mu_i$ , то

$$f_\mu(x', y', z') = g_\mu(x, y, z) j_1^{\mu_1} j_2^{\mu_2} j_3^{\mu_3}, \quad /21/$$

где

$$\mu' = 2\mu - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Для того чтобы неприводимая кривая  $f_\mu(x, y, z)$  была инвариантна относительно преобразования Кремона /11/, порядок кривой в /21/  $\mu$  должен удовлетворять условию  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  и  $g_\mu(x, y, z) = \epsilon f_\mu(x, y, z)$ ,  $\epsilon = \pm 1$ . Таким образом, неприводимые алгебраические инвариантные кривые должны являться решениями функционального уравнения

$$f_\mu(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \epsilon f_\mu(x, y, z) j_1^{\mu_1} j_2^{\mu_2} j_3^{\mu_3}, \quad /22/$$

где  $\Phi_i(x, y, z)$  и  $j_i(x, y, z)$  заданы /11/ и /14/ соответственно,  $\mu = \sum \mu_i$  и  $\epsilon = \pm 1$ , причем  $\mu_i$  есть кратности кривой  $f_\mu$  в точках  $O'_i$ . Функция  $f_\mu(x, y, z)$  ввиду инвариантности относительно замены  $x \rightarrow -x, y \rightarrow y$  /см./5// должна быть четной по  $x$ .

Алгебраические кривые, не проходящие через неподвижную точку  $d_0(0, 0, 1)$ , имеют вид

$$f_\mu = z^\mu + az^{\mu-1}y + z^{\mu-2}(bx^2 + cy^2) + \dots = 0. \quad /23/$$

Для кривых, проходящих через точку  $d_0$ , будет отсутствовать, минимум, первый член разложения  $z^\mu$  в /23/. Найдем все алгебраические инвариантные кривые.

Подставляя в /22/ с  $\epsilon = +1$  разложения /23/ с учетом /11/, /14/ и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах  $z^{2\mu-k} x^k y^m$  для  $k = 0, 1, \dots$  и  $0 \leq m \leq k$ , мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты в /23/ и условие на  $\mu_i$ , которое имеет вид

$$3\mu_2 + \mu_3 = 0. \quad /24/$$

Основные прямые  $j_i, (j'_i)$  проходят через точки  $O_k, O'_\ell (O'_k, O'_\ell)$ ,  $k \neq \ell \neq i$ , и они есть

$$j_1 = z + 4x + \frac{15}{4}y = 0, \quad j_2 = z - 2x + \frac{3}{4}y = 0, \quad j_3 = z + 2x - \frac{5}{4}y = 0 \quad /14/$$

$$j'_i = j_i(-x, y, z).$$

Если от переменных  $x, y, z$  перейти к  $j_1, j_2, j_3$ , то преобразование /11/ примет стандартную форму

$$j'_1 : j'_2 : j'_3 = j_2 j_3 : j_3 j_1 : j_1 j_2, \quad /15/$$

$j'_i$ -функции от  $x', y', z'$ .

Неподвижные точки преобразования /11/ определяются из условия

$$x : y : z = \Phi_1(x, y, z) : \Phi_2(x, y, z) : \Phi_3(x, y, z). \quad /16/$$

Они лежат на кубиках

$$1) y\Phi_3 - z\Phi_2 = 0, \quad 2) z\Phi_1 - x\Phi_3 = 0, \quad 3) x\Phi_2 - y\Phi_1 = 0. \quad /17/$$

Первые две кубики имеют общими точками  $O_1, O_2, O_3$  и две точки  $z = \Phi_3 = 0$ . Остальные 4 точки являются неподвижными и лежат на третьей кубике.

Решение этих уравнений дает:

$$d_0 = d_3 = (0, 0, 1), \quad d_1, d_2 = (\pm 2\sqrt{5}, 4, 1). \quad /18/$$

В каждой точке  $d(x_0, y_0, 1)$  есть два инвариантных направления, вдоль которых инвариантные кривые могут входить в неподвижную точку. Анализ линеаризованного отображения /4/ в окрестности каждой неподвижной точки показывает, что точка  $d_0$  является параболической /собственное значение =  $\pm 1$ / с инвариантными направлениями

$$1) x = 0, \quad 2) y = 0. \quad /19/$$

Точки  $d_1, d_2$  являются гиперболическими и имеют следующие инвариантные направления:

$$1) y - 4 = 0, \quad 2) x \mp 2\sqrt{5} \mp \frac{15}{32}\sqrt{5}(y - 4) = 0. \quad /20/$$

Ниже мы рассмотрим вопрос о преобразовании кривых относительно преобразования Кремона /11/.

### § 3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ

Пусть мы имеем общую неприводимую алгебраическую кривую  $f = f_\mu(x, y, z) = 0$ , заданную однородным полиномом степени  $\mu$ . При преобразовании /11/ она перейдет в кривую степени  $2\mu$   $f_{2\mu} = f_\mu(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ , которая также, как легко показать, будет неприводимой в том и только в том случае, если кривой  $f_\mu(x, y, z)$  не принадлежат фундаментальные точки  $O'_i$  /13/. Если неприводимая кривая имеет в точках  $O'_i$  /13/ кратности  $\mu_i$ , то

$$f_\mu(x', y', z') = g_\mu(x, y, z) j_1^{\mu_1} j_2^{\mu_2} j_3^{\mu_3}, \quad /21/$$

где

$$\mu' = 2\mu - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Для того чтобы неприводимая кривая  $f_\mu(x, y, z)$  была инвариантна относительно преобразования Кремона /11/, порядок кривой в /21/  $\mu$  должен удовлетворять условию  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$  и  $g_\mu(x, y, z) = \epsilon f_\mu(x, y, z)$ ,  $\epsilon = \pm 1$ . Таким образом, неприводимые алгебраические инвариантные кривые должны являться решениями функционального уравнения

$$f_\mu(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \epsilon f_\mu(x, y, z) j_1^{\mu_1} j_2^{\mu_2} j_3^{\mu_3}, \quad /22/$$

где  $\Phi_i(x, y, z)$  и  $j_i(x, y, z)$  заданы /11/ и /14/ соответственно,  $\mu = \sum \mu_i$  и  $\epsilon = \pm 1$ , причем  $\mu_i$  есть кратности кривой  $f_\mu$  в точках  $O'_i$ . Функция  $f_\mu(x, y, z)$  ввиду инвариантности относительно замены  $x \rightarrow -x, y \rightarrow y$  /см. /5// должна быть четной по  $x$ .

Алгебраические кривые, не проходящие через неподвижную точку  $d_0(0, 0, 1)$ , имеют вид

$$f_\mu = z^\mu + az^{\mu-1}y + z^{\mu-2}(bx^2 + cy^2) + \dots = 0. \quad /23/$$

Для кривых, проходящих через точку  $d_0$ , будет отсутствовать, минимум, первый член разложения  $z^\mu$  в /23/. Найдем все алгебраические инвариантные кривые.

Подставляя в /22/ с  $\epsilon = +1$  разложения /23/ с учетом /11/, /14/ и сравнивая коэффициенты при одинаковых членах  $z^{2\mu-k} x^k y^m$  для  $k = 0, 1, \dots$  и  $0 \leq m \leq k$ , мы получаем систему линейных уравнений на коэффициенты в /23/ и условие на  $\mu_i$ , которое имеет вид

$$3\mu_2 + \mu_3 = 0. \quad /24/$$

Поскольку мы рассматриваем алгебраические кривые, то все  $\mu_i$  должны быть неотрицательны, поэтому из /24/ следует, что  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ .

Вычисление коэффициентов в /23/ показывает, что отличными от нуля будут только коэффициенты при  $z^{\mu_1-k} y^k$  ( $\mu = \mu_1$ ), которые равны  $(-\frac{1}{4})^k C_{\mu_1}^k$  ( $0 \leq k \leq \mu_1$ ).

Это означает, что искомая инвариантная форма есть

$$f_{\mu_1}(x, y, z) = f_{1,0,0}^{\mu_1}(y, z), \quad /25/$$

где

$$f_{1,0,0}(y, z) = z - \frac{1}{4}y, \quad \mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = 0, \epsilon = 1.$$

Таким образом, единственная инвариантная алгебраическая кривая, не проходящая через нулевую неподвижную точку, есть прямая  $y = 4$  ( $z = 1$ ) /25/ /см. рис.2/, соответствующая известным решениям /7/.

Анализ уравнений /22/ с  $\epsilon = \pm 1$  и  $f_{\mu}$  в виде /23/ без первого члена  $z^{\mu}$  показывает, что для  $\mu \leq 2$  имеются /см. рис.2/ лишь следующие инвариантные формы:

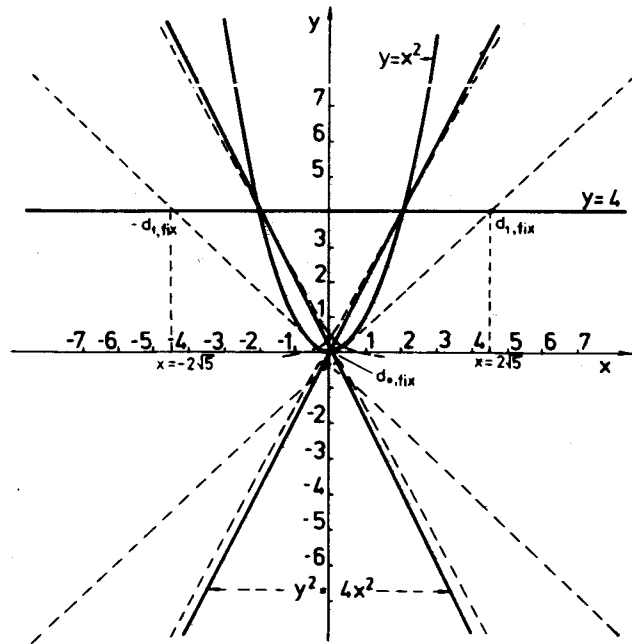


Рис.2. Инвариантные алгебраические и неалгебраическая /штриховая линия/ кривые.

$$f_{1,1,0}(x, y, z) = yz - x^2, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = 0, \epsilon = -1, \quad /26/$$

$$f_{1,0,1}(x, y, z) = y^2 - 4x^2, \quad \mu_1 = \mu_3 = 1, \mu_2 = 0, \epsilon = 1. \quad /27/$$

Парабола /26/ соответствует известному решению /1/, а кривая /27/ распадается на две прямые  $y = \pm 2x$  /10/, каждая из которых по отдельности не является инвариантной относительно /11/, а преобразуется одна в другую.

Докажем, что кроме кривых, заданных инвариантными формами /26/, /27/, нет других алгебраических кривых более высокого порядка, проходящих через неподвижную точку  $d_0(x = y = 0)$ . Предположим, что есть другая инвариантная форма вида /23/ без первого члена  $z^{\mu}$ . В зависимости от того, является ли эта форма решением /22/ с  $\epsilon = 1$  или  $\epsilon = -1$ , ее наиболее общее поведение в нуле будет соответственно ( $\ell_0 \leq k, k \geq 1, \epsilon = 1; k \geq 0, \epsilon = -1$ ):

$$\epsilon = 1, f_{\mu} = z^{\mu-2k} \sum_{\ell=\ell_0}^k a_{k,\ell} x^{2k-2\ell} y^{2\ell} + z^{\mu-2k-1} P_{2k+1}(x, y) + \dots /28/$$

$$\epsilon = -1, f_{\mu} = z^{\mu-2k-1} \sum_{\ell=\ell_0}^k a_{k,\ell} x^{2k-2\ell} y^{2\ell+1} + z^{\mu-2k-2} P_{2k+2}(x, y) + \dots /29/$$

Подставляя разложения /28/, /29/ в уравнение /22/ и сравнивая коэффициенты в разложении левых и правых частей /22/, при  $z^{2\mu-2k-1}$  ( $\epsilon = 1$ ) и  $z^{2\mu-2k-2}$  ( $\epsilon = -1$ ) получим, что при некоторых  $k$  и  $\ell_0$  должно выполняться условие

$$\epsilon = 1, 6\mu_2 + 2\mu_3 - 2k - 10\ell_0 = 0, \quad k \geq 1, \quad /30/$$

$$\epsilon = -1, 6\mu_2 + 2\mu_3 - 2k - 10\ell_0 - 6 = 0, \quad k \geq 0, \quad /31/$$

в противном случае все коэффициенты  $a_{k,\ell}$  в /28/, /29/ будут равны нулю. Условия /30/, /31/ могут быть выполнены лишь в том случае, если  $\mu_2$  и  $\mu_3$  не равны нулю одновременно. С другой стороны, если  $\mu_2$  ( $\mu_3$ ) не равно нулю, то точка  $O_2$  ( $O_3$ ) будет принадлежать одной из кривых, заданных формами /28/, /29/, которые по предположению инвариантны. Поэтому инвариантной кривой, отличной от /26/, /27/, должны принадлежать точки  $T_2^{-1}O_2$  ( $T_2^{-1}O_3$ )...  $(T_2^{-1})^n O_2$ ,  $((T_2^{-1})^n O_3)$ , которые образуют бесконечную последовательность точек, принадлежащих инвариантным кривым /26/, /27/.

Таким образом, из нашего предположения о существовании отличной от /26/, /27/ инвариантной алгебраической кривой /28/

или /29/ следует, что она должна пересекаться с одной из кривых /26/ или /27/ в бесконечном количестве точек, что невозможно при конечном  $\mu$ .

Итак, резюмируя рассмотрение этого раздела, можно утверждать, что кроме найденных инвариантных алгебраических кривых  
 1)  $y - 4 = 0$ , 2)  $y^2 - 4x^2 = 0$ , 3)  $y - x^2 = 0$  /32/

других инвариантных алгебраических кривых у преобразования /4/ не существует. Через точки  $d_1, d_2$  в оставшихся вакантных инвариантных направлениях /20/ может проходить только инвариантная неалгебраическая кривая, симметричная, вследствие /5/, относительно замены  $x \rightarrow -x$  /см. рис.2/. Однако найти и исследовать ее свойства, используя довольно громоздкие уравнения /4/, трудно. Поэтому ниже, с помощью найденных инвариантных кривых /32/, мы построили квадратичное преобразование Крмона, значительно упрощающее уравнение /4/.

#### § 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРЕМОНА И НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ /4/

Используя трансформационные свойства /22/ форм, определяющих инвариантные кривые /32/, легко получить, что следующее квадратичное преобразование Крмона

$$u(w) = \frac{x(y-4)}{y^2-4x^2}, \quad x = \frac{4u}{v+4u^2-v^2}, \quad /33/$$

$$v(w) = \frac{y(y-4)}{y^2-4x^2}, \quad y = \frac{4v}{v+4u^2-v^2},$$

от функций  $x(w)$  и  $y(w)$  к  $u(w)$  и  $v(w)$  приводит разностные уравнения /4/ к более простому виду

$$u' = \frac{6u+5v+u(2u+v)}{4+2u+v}, \quad v' = \frac{4u+6v-v(2u+v)}{4+2u+v}, \quad /34/$$

Как следует из /5/ и /33/, свойства четности сохраняются:  $u(-w) = -u(w)$ ,  $v(-w) = v(w)$ . Линейная часть по  $u$  и  $v$  уравнений /34/ недиагональна. Диагонализация /34/ достигается следующим преобразованием от функций  $u(w)$  и  $v(w)$  к  $u_1(w)$  и  $u_2(w)$ :

$$u_1 = \frac{1}{2(\lambda+1)} \left( \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} v + u \right), \quad u = (\lambda+1)(u_1 - u_2), \quad /35/$$

$$u_2 = \frac{1}{2(\lambda+1)} \left( \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} v - u \right), \quad v = 2(\lambda-1)(u_1 + u_2).$$

где число  $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  есть корень уравнения

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0. \quad /36/$$

Окончательно исходные уравнения /4/ принимают предельно простой вид:

$$u_1'(w+1) = \frac{\lambda u_1 - u_2(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2}, \quad u_2'(w+1) = \frac{\lambda^{-1} u_2 - u_1(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2} \quad /37/$$

Как следует из свойств четности  $u(w)$  и  $v(w)$ ,

$$u_2(w) = u_1(-w). \quad /38/$$

Отметим, что преобразования /33/, /35/ отображают инвариантную прямую  $y - 4 = 0$  /а следовательно, и две неподвижные гиперболические точки  $d_1, d_2$  из /18/ на ней/ в неподвижную точку  $u_1 = u_2 = 0$ , кривую  $y^2 - 4x^2 = 0$  - в бесконечно удаленную точку, а параболу  $y = x^2$  - в инвариантную прямую

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}. \quad /39/$$

Действительно, прямая /39/ подчиняется преобразованию

$$1 - 2\sqrt{\lambda}(u_1' + u_2') = [1 - 2\sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)] \frac{1 - \lambda u_1 + u_2}{1 + \lambda u_1 - u_2}. \quad /40/$$

Это свойство инвариантной прямой /39/ окажется очень полезным в § 6. Заметим, что уравнения /37/, как исходные уравнения /4/, можно интерпретировать как квадратичное преобразование Крмона. Оно имеет фундаментальные точки

$$O_1 = \left\{ -\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2} \right\}, \quad O_2 = O_3 = \left\{ c, \lambda c \right\} \quad /41/$$

и соответствующие им основные прямые

$$j_1 = 1 - \lambda u_1 + u_2 = 0, \quad j_2 = j_3 = 1 + \lambda u_1 - u_2 = 0.$$

Ниже будут получены два решения уравнений /37/, задающих параметрическое представление двух ветвей инвариантной неалгебраической кривой.



§ 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХ ВЕТВЕЙ  
ИНВАРИАНТНОЙ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Система ур./37/ представляет собой частный случай системы нелинейных разностных уравнений, относительно которой в /22/ доказана теорема существования решения, голоморфного в окрестности неподвижной гиперболической точки. Согласно результатам /22/ /см. замечание на с.74/, можно утверждать, что система /37/ имеет два решения вида

$$u_i^I(w) = P_i^I(z_1(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k}^I z_1^k, \quad /42/$$

$$u_i^{II}(w) = P_i^{II}(z_2(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k}^{II} z_2^k, \quad /43/$$

где функции  $P_i^{I,II}(z)$  являются голоморфными в области  $|z| < R(\lambda)$ , а  $z_1(w)$  и  $z_2(w)$  являются решениями уравнений

$$z_1(w+1) = \lambda z_1(w), \quad /44/$$

$$z_2(w+1) = \frac{1}{\lambda} z_2(w) \quad /45/$$

и имеют вид

$$z_1 = \exp((\ln \lambda)w + \beta(w)), \quad z_2 = \exp(-(\ln \lambda)w - \beta(w)), \quad /46/$$

где  $\beta(w)$  имеет свойства /2/. Комбинируя первое уравнение в /37/ со вторым, можно получить линейное соотношение

$$u_1(w+1) - \lambda u_2(w+1) = \lambda u_1(w) - u_2(w). \quad /47/$$

Подставляя /42/ в /47/ и первое уравнение /37/ с учетом /44/, получим коэффициенты  $p_{i,k}^I$ :

$$p_{1,k}^I = (-1)^{k-1} \frac{a_k}{(\sqrt{\lambda})^{k+1}}, \quad p_{2,k}^I = \frac{\lambda(\lambda^{k-1} - 1)}{\lambda^{k+1} - 1} p_{1,k}^I, \quad /48/$$

где  $a_k (k \geq 2)$  определяются рекуррентным соотношением

$$a_k = \frac{(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)(\lambda^k - 1)}{(\lambda^{k-1} - 1)} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{a_m a_{k-m} \lambda^{m-1}}{(\lambda^{k-m+1} - 1)(\lambda^{m+1} - 1)}. \quad /49/$$

Выбирая  $a_1 = 1$ , получим, что  $a_2 = a_3 = 1$ , а для остальных ( $k > 3$ ) будем иметь

$$a_k > 0, \quad a_{k+1} < a_k, \quad a_k \rightarrow 0. \quad /50/$$

Для второго решения /43/ получим

$$p_{1,k}^{II} = p_{2,k}^I, \quad p_{2,k}^{II} = p_{1,k}^I. \quad /51/$$

Из /44/-/46/, /51/ следует, что

$$u_2^{II}(w) = u_1^I(-w), \quad u_1^{II}(w) = u_2^I(-w). \quad /52/$$

Из /48/-/51/ вытекает, что разложения /42/, /43/ сходятся абсолютно в области  $|z_i| < \sqrt{\lambda}$ . Как нетрудно заметить из /48/, /51/, разложения для функций  $P_2^I(z)$  и  $P_1^{II}(z)$  начинаются с  $z^2$ . Это означает, что /42/ и /43/ параметрически задают кривые, касающиеся осей  $u_2 = 0$  и  $u_1 = 0$  соответственно. Если рассмотреть /37/ как преобразования плоскости  $u_1, u_2$ , то эти кривые будут инвариантны относительно последних. Это находится в полном соответствии с результатом P.Montel /см. /23/ с.281/ о кривых, инвариантных относительно класса преобразований, частным случаем которых является /37/.

Если уравнение  $f(u_1, u_2) = 0$  определяет I решение /42/, то в силу симметрии /52/ ур.  $f(u_2, u_1) = 0$  будет определять II решение, причем  $f(u_1, u_2)$  голоморфна в некоторой окрестности  $u_1 = u_2 = 0$ . Таким образом, уравнение  $F(u_1, u_2) = f(u_1, u_2)f(u_2, u_1) = 0$  будет определять неалгебраическую кривую, инвариантную как относительно преобразований /37/, так и замены  $w \rightarrow -w$ , т.е.  $u_1 \rightarrow u_2$ .

Из разложений /42/ и /43/ с учетом /49/ можно получить представление о поведении этой кривой лишь в некоторой окрестности неподвижной точки  $u_1 = u_2 = 0$ . Ниже будет изучена структура полюсов I решения и сформулирован алгоритм вычисления рядов /42/ для больших значений  $z$ , что позволит получить более полное представление о свойствах рядов /42/, так и графическое представление обоих решений.

Для удобства сделаем замену

$$v_1 = \lambda u_1 - u_2, \quad v_2 = \lambda u_2 - u_1. \quad /53/$$

Тогда уравнения /37/ для решения I /42/ примут вид

$$v_1(\lambda z) = \frac{3v_1(z) + v_2(z) - v_2(z)v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_2(\lambda z) = -v_1(z). \quad /54/$$

Внутри области  $|z| < \sqrt{\lambda}$   $v_1(z)$  задана, как это следует из /42/, /48/, /49/, рядом

$$v_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{\lambda}^{-k-1} (\lambda^2 - 1)}{(\lambda^{k+1} - 1)} a_k z^k. \quad /55/$$

Поскольку все  $a_k > 0$  и, как показывает расчет на ЭВМ,  $a_{k+1} < a_k$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = q$ , где  $q \approx 1,028511$ , это означает, что  $v_1(z)$  при отрицательных  $z$  из области сходимости ряда /55/ строго отрицательна, монотонно убывая от нуля при  $z = 0$  до  $-\infty$  при  $z = z_1 \lambda$ , где  $z_1 = -\frac{q}{\sqrt{\lambda}} \approx -0,635655$ .

Согласно /54/ это означает, что  $z_1$  является простым корнем уравнения  $v_1(z) + 1 = 0$ ,  $z_1 \lambda$  - простым полюсом. Анализируя /54/, можно установить, что при  $z = z_1 \lambda^{2k-1}$ ,  $k=1,2,\dots$ ,  $v_1(z)$  будет иметь простые полюса. Поскольку  $v_1(z)$  в интервале  $(z_1 \lambda^{2k+1}, z_1 \lambda^{2k-1})$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то это означает, что имеется бесконечная серия корней  $z_i$  уравнения

$$v_1(z_i) + 1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad /56/$$

В соответствии с /54/ каждый корень  $z_i$  порождает бесконечную серию полюсов функции  $v_1(z)$  при  $z = z_i \lambda^{2k-1}$ ,  $k=1,2,\dots$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $v_2(z)$  при  $z = z_i \lambda^{2k}$ . Из /54/ следует, что

$$v_2(z) = -v_1\left(-\frac{z}{\lambda}\right), \quad /57/$$

а  $v_1(z)$  удовлетворяет уравнению

$$v_1(\lambda^2 z) + v_1(z) + (v_1(\lambda^2 z) - v_1(z) - 3)v_1(\lambda z) = 0. \quad /58/$$

Будем искать решение /58/ в виде

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{1,k,i} \Phi_{k,i}(z), \quad /59/$$

где

$$\Phi_{k,i} = \frac{1}{z - z_i \lambda^{2k-1}} + \frac{1}{z_i \lambda^{2k-1}}$$

есть простейшие дроби. Подставляя разложение /59/ в /58/, получим уравнения на коэффициенты  $v_{1,k,i}$  ( $i=1,2,\dots$ ,  $k=1,2,\dots$ ):

$$v_{1,k+1,i} = \lambda^2 v_{1,k,i} \frac{v_1(z_i \lambda^{2k}) - 1}{v_1(z_i \lambda^{2k}) + 1}, \quad /60/$$

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) - v_1(z_i \lambda^{2k-2}) - 3 = 0, \quad /61/$$

$$v_1(z_i) = -1. \quad /62/$$

Решая рекуррентное соотношение /61/ с учетом /62/, получим

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) = 3k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots \quad /63/$$

Подставляя /63/ в /60/, находим коэффициенты  $v_{1,k,i}$ :

$$v_{1,k,i} = \lambda^{2(k-1)} v_{1,1,i} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(k)}. \quad /64/$$

Подставляя /64/ в /59/ и вводя обозначения

$$b_i = \frac{v_{1,1,i} \gamma}{\lambda z_i}, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(k)} \frac{1}{\lambda^{2k-1} - 1} \approx 0,63976,$$

получим для  $v_1(z)$

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_i}{\gamma} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(k)} \frac{z}{z - z_i \lambda^{2k-1}}. \quad /65/$$

Выражая вычеты в полюсах  $v_1(z)$  при  $z = z_i \lambda^{2k-1}$  ( $k=1$ ), с одной стороны, через значения  $v_1(\frac{z_i}{\lambda})$  и  $v_1'(z_i)$ , а с другой - через коэффициенты  $b_i$ , из /65/ получим:

$$b_i = -\frac{3 + 2v_1(\frac{z_i}{\lambda})}{v_1'(z_i) z_i}. \quad /66/$$

Дифференцируя /54/, получим связь производной  $v_1'(\lambda z)$  со значениями  $v_1(z)$ ,  $v_1'(z)$ ,  $v_1(\frac{z}{\lambda})$  и  $v_1'(\frac{z}{\lambda})$ :

$$v_1'(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_1'(\frac{z}{\lambda}) [v_1^2(z) - 1] + \lambda v_1'(z) [3 + 2v_1(\frac{z}{\lambda})]}{[1 + v_1(z)]^2} \quad /67/$$

При малых значениях  $z$  из области сходимости  $|z| < \epsilon \sqrt{\lambda} q$  ( $\epsilon < 1$ , мы полагаем  $\epsilon = \frac{1}{4}$ )  $v_1(z)$  и  $v_1'(z)$  можно вычислить с нужной точностью с помощью ряда /55/, учитывая соответствующее количество членов /мы выбираем  $N = 20$ /. При этом мы получим значения  $v_1(z)$ ,  $v_1'(z)$ ,  $v_2(z) = -v_1(\frac{z}{\lambda})$  с абсолютной погрешностью  $|\Delta v_1(z)| \leq (\frac{1}{4})^{21}$ .

Для больших значений  $z$  мы можем вычислить  $v_1(z)$ ,  $v_2(z)$ , используя итерации преобразования /54/, которое представим в символическом виде:

$$v(\lambda z) = T v(z), \quad /68/$$

где  $v(z)$  - двумерный вектор  $(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix})$ . Для  $k$ -й степени преобразования /68/ имеем

$$v(\lambda^k z) = T^k v(z). \quad /69/$$

Тогда для любого  $z$  мы можем указать такое  $k$  и  $z_k = \frac{z}{\lambda^k}$ , что

$|z_k| \leq \epsilon \sqrt{\lambda} q$ . Вычислив  $v_1(z_k)$ ,  $v_1'(z_k)$ ,  $v_2(z_k)$  с помощью указанной выше процедуры и применяя  $k$  раз преобразование /68/, /67/, мы получим с высокой точностью значения  $v_1(z)$ ,  $v_1'(z)$  и  $v_2(z)$  для любого  $z$ .

Расчет на ЭВМ дает для первых 4 значений корней  $z_i$  и  $b_i$  следующие приближенные значения:

$$z_1 \approx -0,635655, \quad z_2 \approx -9,4125, \quad z_3 \approx -21,326, \quad z_4 \approx -53,622;$$

$$b_1 \approx 0,98123, \quad b_2 \approx 0,34288, \quad b_3 \approx 0,0832, \quad b_4 \approx 0,0212.$$

Остальные корни расположены при больших отрицательных значениях  $z$  и имеют точку сгущения на бесконечности.

Остановимся на свойствах многозначной функции  $v_2(z) = f(v_1(z))$ . На рис.3 приведены несколько ветвей этой функции, которые соответствуют значениям параметра  $z$  из области ( $z_3 \lambda < z < +\infty$ ). Основная ветвь  $a$ , проходящая через начало координат, соответствует области  $z_1 \lambda < z < +\infty$ , причем при  $z > 0$   $v_1(z) > 0$ . При  $z \rightarrow z_1 \lambda^{2k-1}$  ветви кривой стремятся к асимпто-

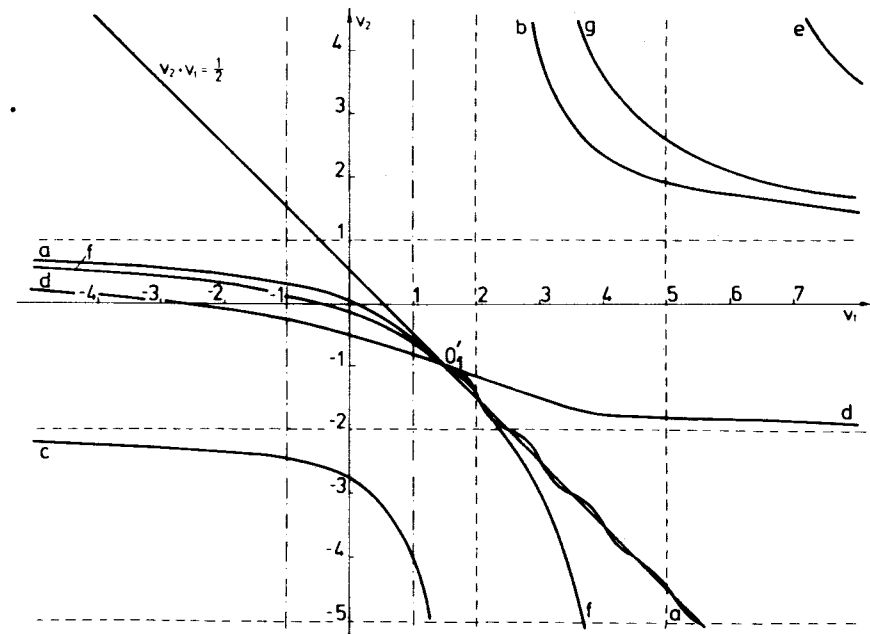


Рис.3. График функции  $v_2 = f(v_1)$ . Отражены первые ветви ( $z > z_3 \lambda$ ). Условные обозначения:  $a, b, c, d, e, f, g$  - ветви кривой, --- асимптоты ветвей  $v_2 = 3k - 4$ ,  $v_2 = 3k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ .

там  $v_2 = -3k + 4$  ( $k, i = 1, \dots, \infty$ ), а при  $z \rightarrow z_1 \lambda^{2k}$  они стремятся к асимптотам

$$v_1 = 3k - 1 \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, \infty \\ i = 1, 2, \dots, \infty \end{array} \right).$$

Остановимся на свойствах этой кривой при  $z > 0$ . Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = v_1(z) + v_2(z) - \frac{1}{2}. \quad /70/$$

Тогда  $\Phi(z)$ ,  $v_1(z)'$ , как это следует из /54/, подчиняются уравнениям

$$\Phi(\lambda z) = \Phi(z) \frac{1 - v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_1(\lambda z) = \Phi(\lambda z) + v_1(z) + \frac{1}{2}. \quad /71/$$

Отсюда следует ( $\Phi(0) = -\frac{1}{2}$ , так как  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ),

$$v_1'(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_1'(\frac{z}{\lambda}) [v_1^2(z) - 1] + \lambda v_1'(z) [3 + 2v_1(\frac{z}{\lambda})]}{[1 + v_1(z)]^2} \quad /67/$$

При малых значениях  $z$  из области сходимости  $|z| < \epsilon \sqrt{\lambda} q$  ( $\epsilon < 1$ ), мы полагаем  $\epsilon = \frac{1}{4}$   $v_1(z)$  и  $v_1'(z)$  можно вычислить с нужной точностью с помощью ряда /55/, учитывая соответствующее количество членов /мы выбираем  $N = 20$ /. При этом мы получим значения  $v_1(z)$ ,  $v_1'(z)$ ,  $v_2(z) = -v_1(\frac{z}{\lambda})$  с абсолютной погрешностью  $|\Delta v_1(z)| \leq (\frac{1}{4})^{21}$ .

Для больших значений  $z$  мы можем вычислить  $v_1(z)$ ,  $v_2(z)$ , используя итерации преобразования /54/, которое представим в символическом виде:

$$v(\lambda z) = T v(z), \quad /68/$$

где  $v(z)$  - двумерный вектор  $(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix})$ . Для  $k$ -й степени преобразования /68/ имеем

$$v(\lambda^k z) = T^k v(z). \quad /69/$$

Тогда для любого  $z$  мы можем указать такое  $k$  и  $z_k = \frac{z}{\lambda^k}$ , что

$|z_k| \leq \epsilon \sqrt{\lambda} q$ . Вычислив  $v_1(z_k)$ ,  $v_1'(z_k)$ ,  $v_2(z_k)$  с помощью указанной выше процедуры и применяя  $k$  раз преобразование /68/, /67/, мы получим с высокой точностью значения  $v_1(z)$ ,  $v_1'(z)$  и  $v_2(z)$  для любого  $z$ .

Расчет на ЭВМ дает для первых 4 значений корней  $z_i$  и  $b_i$  следующие приближенные значения:

$$z_1 \approx -0,635655, \quad z_2 \approx -9,4125, \quad z_3 \approx -21,326, \quad z_4 \approx -53,622;$$

$$b_1 \approx 0,98123, \quad b_2 \approx 0,34288, \quad b_3 \approx 0,0832, \quad b_4 \approx 0,0212.$$

Остальные корни расположены при больших отрицательных значениях  $z$  и имеют точку сгущения на бесконечности.

Остановимся на свойствах многозначной функции  $v_2(z) = f(v_1(z))$ . На рис.3 приведены несколько ветвей этой функции, которые соответствуют значениям параметра  $z$  из области  $(z_3 \lambda < z < +\infty)$ . Основная ветвь  $a$ , проходящая через начало координат, соответствует области  $z_1 \lambda < z < +\infty$ , причем при  $z > 0$   $v_1(z) > 0$ . При  $z \rightarrow z_1 \lambda^{2k-1}$  ветви кривой стремятся к асимпто-

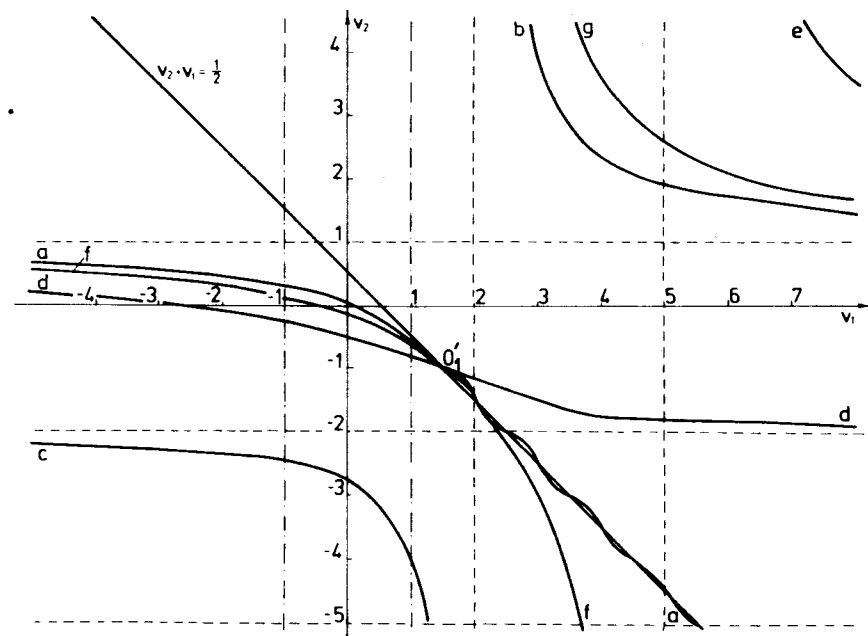


Рис.3. График функции  $v_2 = f(v_1)$ . Отражены первые ветви ( $z > z_3 \lambda$ ). Условные обозначения:  $a, b, c, d, e, f, g$  - ветви кривой,  $-----$  асимптоты ветвей  $v_2 = 3k + 4$ ,  $v_2 = 3k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, \infty$ .

там  $v_2 = -3k + 4$  ( $k, i = 1, \dots, \infty$ ), а при  $z \rightarrow z_1 \lambda^{2k}$  они стремятся к асимптомам

$$v_1 = 3k - 1 \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, \infty \\ i = 1, 2, \dots, \infty \end{array} \right).$$

Остановимся на свойствах этой кривой при  $z > 0$ . Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = v_1(z) + v_2(z) - \frac{1}{2}. \quad /70/$$

Тогда  $\Phi(z)$ ,  $v_1(z)'$ , как это следует из /54/, подчиняются уравнениям

$$\Phi(\lambda z) = \Phi(z) \frac{1 - v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_1(\lambda z) = \Phi(\lambda z) + v_1(z) + \frac{1}{2}. \quad /71/$$

Отсюда следует ( $\Phi(0) = -\frac{1}{2}$ , так как  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ),

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - v_1\left(\frac{z}{\lambda^k}\right)}{1 + v_1\left(\frac{z}{\lambda^k}\right)} \quad /72/$$

Расчет на ЭВМ дает, что при  $z = z_0^* \approx \frac{5,4874}{\lambda}$   $v_1(z_0^*) = 1$ . Тогда из /71/, /72/ и монотонности  $v_1(z)$  при  $z > 0$  следует, что

$$\Phi(\lambda^m z_0^*) = 0, \quad v_1(\lambda^m z_0^*) = 1 + \frac{1}{2}m, \quad m \geq 1. \quad /73/$$

При  $z = z_0^* \lambda$  кривая пересекает инвариантную прямую  $v_1 + v_2 = \frac{1}{2}$  /см. /39/ и /53// в точке  $O_1'/v_1 = \frac{3}{2}$ ,  $v_2 = -1/$  - фундаментальной точке обратного к /54/ преобразования. Из /72/ имеем

$$\Phi(z \lambda^m) = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} \Phi(z). \quad /74/$$

Так как  $v_1(z) > 1$  при  $z > z_0^*$ , то для  $z \in (z_0^*, z_0^* \lambda)$

$$\operatorname{sgn} \Phi(z \lambda^m) = (-1)^m \operatorname{sgn} \Phi(z). \quad /75/$$

Так как  $\Phi(z)$  при  $0 < z < z_0^* \lambda$  отрицательна, то согласно /75/ при  $z > z_0^* \lambda$  она будет осциллировать. Амплитуда этих осцилляций будет стремиться к нулю. Действительно, так как  $\frac{x-1}{x+1} \sim \frac{y-1}{y+1}$ , если

$x > y$  ( $x, y > 0$ ), то

$$\frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} < \frac{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) - 1}{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) + 1} = \frac{k+1}{k+5}, \quad z \in (z_0^*, z_0^* \lambda). \quad /76/$$

Тогда из /74/ и /76/ следует

$$\left| \frac{\Phi(z \lambda^m)}{\Phi(z)} \right| \leq \prod_{k=0}^{m-1} \frac{k+1}{k+5} = \frac{4!}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}. \quad /77/$$

Таким образом, амплитуда осцилляции при  $m \rightarrow \infty$  быстро стремится к нулю.

Пусть  $z_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) корни /отрицательные/ уравнения  $v_1(z) - 1 = 0$ . При  $z > 0$  ввиду монотонности  $v_1(z)$  есть только один корень  $z_0^*$ . Тогда при  $z = z_i^* \lambda^m$  ( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ) согласно /71/

$$\Phi(z_i^* \lambda^m) = 0, \quad v_1(z_i^* \lambda^m) = 1 + \frac{1}{2}m.$$

Таким образом, для функции  $v_2 = f(v_1)$  точки пересечения этой кривой с прямой  $v_1 + v_2 = \frac{1}{2}$  ( $\Phi = 0$ ),  $v_1 = 1 + \frac{1}{2}m$ ,  $v_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m$  являются точками самопересечения этой многозначной кривой, причем для каждого  $m = 1, 2, \dots, \infty$  существует бесконечное число самопересечений ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) /см. рис.3/.

Заметим, что II решению /43/ соответствует кривая, которая получается заменой  $v_2 \rightarrow v_1$ :  $v_1 = f(v_2)$ .

Интересно обсудить свойства этих решений в плоскости  $x, y$ . Согласно /33/, /35/ и /53/  $x(z)$  и  $y(z)$  можно выразить через функцию  $v_1(z)$ :

$$x(z) = \epsilon \frac{2[v_1(z) + v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)]}{v_1(z) - v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right) + 8v_1(z)v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)}, \quad /78/$$

$$y(z) = \frac{4[v_1(z) - v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)]}{v_1(z) - v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right) + 8v_1(z)v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)},$$

где  $\epsilon = 1$  для I решения,  $\epsilon = -1$  для II решения. Это параметрическое задание кривой в плоскости  $x, y$  /см.рис.2/. При  $z > 0$  кривая выходит из неподвижных точек  $y=4$ ,  $x = \pm 2\sqrt{5}$  и при  $z = z_0^* \lambda^k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) пересекает параболу  $y = x^2$  в точках

$$x = \pm \frac{2}{2k+3}, \quad y = \left(\frac{2}{2k+3}\right)^2, \quad /79/$$

осциллируя вокруг нее затухающим образом, асимптотически приближаясь к точке  $y = x = 0$ . При  $z < 0$  кривая устремляется на бесконечность при  $\bar{z}_1 \approx -0,2023$  /знаменатель в /78/ обращается в нуль/ вдоль асимптот  $y \approx \pm 0,9547x$ , затем вдоль тех же асимптот стремится к точкам

$$x(z_i \lambda^{2k+1}) = \pm \frac{2}{24k-7}, \quad y(z_i \lambda^{2k+1}) = \frac{4}{24k-7} \quad /80/$$

( $i = 1, k = 0$ ) на прямых  $y = \pm 2x$ , пересекая потом их в точках  $/i = 1, k = 1/$

$$x(z_i \lambda^{2k}) = \mp \frac{2}{24k-9}, \quad y(z_i \lambda^{2k}) = -\frac{4}{24k-9}. \quad /81/$$

Затем кривая вдоль асимптот  $y \approx \mp 1,84x$  стремится к ( $y = -\infty$ ,  $x = \pm \infty$ ) при  $\bar{z}_2 = -8,3775$  и потом вдоль этих асимптот, выходя из точек ( $y = +\infty$ ,  $x = \mp \infty$ ), пересекает параболу в точках  $x = \mp 2$ ,

$y = 4$ , прямые  $y = \pm 2x$  в точках /80/ ( $i = 1, k = 1$ ) и т.д. При дальнейшем абсолютном увеличении  $z \rightarrow -\infty$  кривая будет бесконечное число раз ( $i = 1, 2, \dots, \infty$ ) пересекать параболу и прямые  $y = \pm 2x$  в точках /79/, /80/, /81/ для каждого значения  $k = 1, 2, \dots, \infty$ , асимптотически приближаясь к началу координат.

## § 6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вернемся к уравнению /37/. Запишем его в символическом виде

$$u' = u(w + 1) = Tu(w), \quad /82/$$

где  $u(w) = \begin{pmatrix} u_1(w) \\ u_2(w) \end{pmatrix}$ , а оператор  $T$  задан /37/. Уравнение /82/,

рассматриваемое как отображение, задает мультипликативно резонансный диффеоморфизм с неподвижной гиперболической точкой, приведение которого в нормальную форму решает теорема Пуанкаре - Дюлака /см. /24/ с.104-105/. В случае диффеоморфизма плоскости с неподвижной гиперболической точкой, сохраняющего площадь, Биркгофом в /17/ была получена нормализующая замена координат, приводящая диффеоморфизм в нормальную форму /см. также /26/, § 21/:

$$\xi'_1 = \xi_1(w + 1) = b(\eta)\xi_1, \quad \xi'_2 = \xi_2(w + 1) = \frac{i}{b(\eta)}\xi_2, \quad /83/$$

где  $\eta = \xi_1\xi_2$  есть инвариант,  $b(0) = \lambda$ . /Заметим, что в отличие от /17/ мы придали отображению /83/ функциональную зависимость от  $w$ ./

Таким образом, мы могли бы использовать результат Биркгофа

и привести уравнение /37/ к виду /83/, если бы  $\det \left| \frac{\partial u'_1, \partial u'_2}{\partial u_1, \partial u_2} \right| =$

$= 1$  в /82/.

Однако, вычисляя якобиан  $T$  из /37/, получим

$$\det \left| \frac{\partial u'_1, \partial u'_2}{\partial u_1, \partial u_2} \right| = \frac{1 - \lambda u_1 + u_2}{1 + \lambda u_1 - u_2} \neq 1. \quad /84/$$

Допустим, что для уравнения /82/ существует инвариантная мера - функция  $M(u_1, u_2)$  такая, что  $M(u_1, u_2) > 0$  в некоторой конечной окрестности  $D$  неподвижной точки  $u_1 = u_2 = 0$ , голоморфна в ней и

$$M(u'_1, u'_2) = M(u_1, u_2) \left[ \frac{1 - \lambda u_1 + u_2}{1 + \lambda u_1 - u_2} \right]^{-1}. \quad /85/$$

Тогда

$$\int_D M(u_1, u_2) du_1 du_2 = \int_{T(D)} M(u'_1, u'_2) du'_1 du'_2.$$

Аналогично дифференциальным уравнениям с инвариантной мерой /см., например, /25/ с.145/ в нашем случае ее наличие позволит свести уравнение /82/ к интегрируемому виду /83/.

Рассмотрим преобразование от функций  $u(w) \rightarrow a(w)$ :

$$a(w) = \phi(u(w)): a_1 = \phi_1(u_1, u_2), \quad a_2 = \phi_2(u_1, u_2). \quad /86/$$

Тогда уравнение /82/ для  $a(w)$  примет вид

$$a' = a(w + 1) = \tilde{T}a(w), \quad /87/$$

где

$$\tilde{T} = \phi_{w+1}^{-1} T \phi_w.$$

Если отображение  $\phi$  /86/ имеет якобиан, равный

$$\det \left| \frac{\partial a_1, \partial a_2}{\partial u_1, \partial u_2} \right| = M(u_1, u_2), \quad /88/$$

где  $M(u_1, u_2)$  удовлетворяет /85/, то якобиан /87/ равен

$$\det \left| \frac{\partial a'_1, \partial a'_2}{\partial a_1, \partial a_2} \right| = \det \left| \frac{\partial a'_1, \partial a'_2}{\partial u'_1, \partial u'_2} \right| \det \left| \frac{\partial u'_1, \partial u'_2}{\partial u_1, \partial u_2} \right| \left[ \det \left| \frac{\partial a_1, \partial a_2}{\partial u_1, \partial u_2} \right| \right]^{-1} = 1. \quad /89/$$

Фактически в нашем распоряжении уже имеется инвариантная мера  $M(u_1, u_2)$ , в чем нетрудно убедиться, взглянув на уравнение /40/, которому удовлетворяет инвариантная прямая /39/:

$$M(u_1, u_2) = \frac{1}{1 - 2\sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)}. \quad /90/$$

Найдем отображение /86/, удовлетворяющее /88/, /90/. Конечно, условия /88/ недостаточно. Будем исходить из принципа простоты и искать отображение /86/ в классе квадратичных кремоновых преобразований со знаменателем таким же, как в /90/. Естествен-

но потребовать, чтобы линейное приближение к /86/ было тождественным преобразованием и чтобы свойство /38/ сохранилось для  $a_1(w)$ , т.е.

$$a_2(w) = a_1(-w),$$

что дает

$$\phi_2(u_1, u_2) \equiv \phi_1(u_2, u_1).$$

Эти требования однозначно фиксируют /86/ и оно есть

$$a_1 = \frac{u_1 - \sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)^2}{1 - 2\sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)}, \quad /91/$$

$$a_2 = \frac{u_2 - \sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)^2}{1 - 2\sqrt{\lambda}(u_1 + u_2)}.$$

Обратное к /91/ преобразование однозначно и имеет вид

$$u_1 = a_1 - \sqrt{\lambda}(a_1^2 - a_2^2), \quad /92/$$

$$u_2 = a_2 + \sqrt{\lambda}(a_1^2 - a_2^2).$$

Таким образом, мы можем применить к отображению /87/ результаты Биркгофа. Согласно Биркгофу [17] существует замена  $u = \psi(\xi)$ :

$$a_1 = \psi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ k+l \geq 2}} c_{k, l} \xi_1^k \xi_2^l, \quad /93/$$

$$a_2 = \psi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2 + \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ k+l \geq 2}} d_{k, l} \xi_1^k \xi_2^l, \quad \det \left| \frac{\partial a_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial a_2}{\partial \xi_2} \right| = 1.$$

которая приводит систему /87/ к виду /83/. Функции  $\psi_1, \psi_2$  и  $b(\eta)$  из /83/, как доказано в [18] /см. также [19] /, являются голоморфными по своим переменным в конечной окрестности начала координат.

Поскольку свойство /38/ совместно с /37/ и замена /92/ его не нарушает, то требование  $\xi_1(-w) = \xi_2(w) \rightarrow \psi_2(\xi_1, \xi_2) \equiv \psi_1(\xi_2, \xi_1)$  будет совместно с /83/. Комбинируя /92/ с /93/, получим

$$u_1 = \chi(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=0}^k a_{k, l} \xi_1^{k-l} \xi_2^l,$$

$$u_2 = \chi(\xi_2, \xi_1), \quad /94/$$

где

$$\chi = \phi^{-1}\psi.$$

Как следует из /92/, /93/, функция  $\chi(\xi_1, \xi_2)$  должна удовлетворять уравнению

$$\det \left| \frac{\partial \chi(\xi_1, \xi_2), \partial \chi(\xi_2, \xi_1)}{\partial \xi_1, \partial \xi_2} \right| = 1 - 2\sqrt{\lambda}(\chi(\xi_1, \xi_2) + \chi(\xi_2, \xi_1)). \quad /95/$$

Подставляя замену /94/ в первое из уравнений и в линейную комбинацию первого и второго уравнения /37/ /см. уравнение /47//, получим с учетом /83/ следующие функциональные уравнения на функцию  $\chi(\xi_1, \xi_2)$  и  $b(\eta)$  ( $\eta = \xi_1 \xi_2$ ):

$$\chi(b(\eta)\xi_1, \frac{1}{b(\eta)}\xi_2) - \lambda \chi(\frac{1}{b(\eta)}\xi_2, b(\eta)\xi_1) = \lambda \chi(\xi_1, \xi_2) - \chi(\xi_2, \xi_1) /96/$$

$$\chi(b(\eta)\xi_1, \frac{1}{b(\eta)}\xi_2) - \lambda \chi(\xi_1, \xi_2) = -[\chi(b(\eta)\xi_1, \frac{1}{b(\eta)}\xi_2) + \chi(\xi_2, \xi_1)] \times$$

$$\times [\lambda \chi(\xi_1, \xi_2) - \chi(\xi_2, \xi_1)], \quad /97/$$

где функция  $b(\eta)$  ищется в виде ряда:

$$b(\eta) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\xi_1 \xi_2)^k, \quad b_0 = \lambda. \quad /98/$$

Подставляя разложения /94/, /98/ в уравнения /95/-/97/, получим рекуррентные соотношения на коэффициенты  $a_{k, l}$  и  $b_k$  ( $a_{1,0} = 1, a_{1,1} = 0$ ):

$$\lambda (\lambda^{k-2} \ell - 1) a_{k, l} = - \sum_{m=1}^{\min(\ell, k-l, E(\frac{k-1}{2}))} b_m (k-2\ell) a_{k-2m, \ell-m} -$$

$$\ell \neq \frac{k-1}{2}$$

$$- \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{q=\max(0, \ell-k+p)}^{\min(\ell, p)} [ \sum_{m=0}^{\min(\ell-q, q+k-\ell-p, E(\frac{k-p-1}{2}))} b_m (p-2q) a_{p, q} (\lambda a_{k-2m, p, \ell-q-m} -$$

$$- a_{k-2m-p, k-m-l-p+q} + a_{p,p-q} (\lambda a_{k-p, l-q} - a_{k-p, k-p-l+q}) \}. \quad /99/$$

$$a_{2\ell+1, \ell} = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{2\ell} \sum_{m=\max(0, n-\ell-1)}^{\min(n, \ell+1)} (2m-n) a_{n, n-m} a_{2\ell+2-n, \ell+1-m}$$

$$b_{\ell} = - \sum_{m=1}^{\ell-1} b_m a_{2\ell+1-2m, \ell-m} - \sum_{p=1}^{2\ell} \sum_{q=\max(0, p-\ell-1)}^{\min(\ell, p)} \times \quad /100/$$

$$\times \left[ \sum_{m=0}^{\min(\ell-q, q+\ell-p+1, E(\frac{2\ell-p}{2}))} b_m (p-2q) \times \right.$$

$$\left. \times a_{p,q} (\lambda a_{2\ell+1-2m-p, \ell-q-m} - a_{2\ell+1-2m-p, \ell+1-m-p+q}) + \right.$$

$$\left. + a_{p,p-q} (\lambda a_{2\ell+1-p, \ell-q} - a_{2\ell+1-p, \ell+1-p+q}) \right]. \quad /101/$$

Величины  $b_m(n)$  в /99/, /101/ определяются разложением

$$[b(\eta)]^n = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(n) \eta^m,$$

$$b_m \equiv b_m(1)$$

и могут быть вычислены с помощью следующих рекуррентных соотношений через  $b_m$ :

$$n \geq 1 \quad b_m(n+1) = \sum_{p=0}^m b_{m-p}(n) b_p,$$

$$n \leq -1 \quad b_m(n-1) = \sum_{p=0}^m b_{m-p}(n) b_p (-1),$$

$$b_m(-1) = -\frac{1}{b_0} \sum_{p=0}^{m-1} b_{m-p} b_p (-1), \quad /102/$$

$$b_0(-1) = \frac{1}{b_0}, \quad b_0 = \lambda.$$

Соотношения /99/, /101/ получены из /97/, а соотношение /100/ - из /95/. Приведенные соотношения позволяют выразить все  $a_{k,\ell}$  и  $b_{\ell}$  через  $a_{1,0} = 1$ ,  $b_0 = \lambda$ . Для установления некоторых свойств  $a_{k,\ell}$  полезно соотношение, следующее из /96/:

$$\lambda (\lambda^{k-2\ell-1} - 1) a_{k,\ell} - (\lambda^{k-2\ell+1} - 1) a_{k, k-\ell} =$$

$$\sum_{m=1}^{\min(\ell, k-\ell, E(\frac{k-1}{2}))} b_m (k-2\ell) (a_{k-2m, \ell-m} - \lambda a_{k-2m, k-m-\ell}). \quad /103/$$

Полагая в /103/  $\ell = 0$ , получим

$$a_{k,k} = \frac{\lambda (\lambda^{k-1} - 1)}{\lambda^{k+1} - 1} a_{k,0}. \quad /104/$$

Подставляя /104/ в правую часть /99/ при  $\ell = 0$  и полагая

$$a_{k,0} = (-1)^{k-1} \sqrt{\lambda}^{-k-1} a_k, \quad /105/$$

получим для  $a_k$  рекуррентное соотношение, совпадающее с соотношением /49/, полученным в § 5 при нахождении инвариантной неалгебраической кривой. Полагая в /103/  $k = 2\ell$ , получим

$$a_{2\ell, \ell} = 0.$$

Получим теперь общее решение разностных уравнений /83/ для  $\xi_1(w)$  и  $\xi_2(w)$ . Возможны два варианта общего решения:

$$I. \quad \xi_1(w) = \gamma(w) e^{[\ln b(\gamma^2)]_w}, \quad \gamma(-w) = \gamma(w),$$

$$\xi_2(w) = \gamma(w) e^{-[\ln b(\gamma^2)]_w}, \quad \gamma(w+1) = \gamma(w), \quad /106/$$

$$\xi_1(w) = \delta(w) e^{[\ln b(-\delta^2)]_w}, \quad \delta(-w) = -\delta(w)$$

$$II. \quad \xi_2(w) = -\delta(w) e^{-[\ln b(-\delta^2)]_w}, \quad \delta(w+1) = \delta(w). \quad /107/$$

В соответствии с исходным произволом /2/ аргумент  $w$  в /106/ и /107/ можно заменить на  $w + \beta(w)$ . Итак, ряды /94/, /98/,



коэффициенты которых заданы /99/-/102/, вместе с /106/ или /107/ определяют два типа общего решения уравнений /37/ для  $u_1(w)$  и  $u_2(w)$ .

Обратимся теперь к уравнению /6/ для  $t(w)$ . Выразим из /8/  $t(w)$  через  $S_2(w)$ :

$$t(w) = \frac{1 - \frac{5}{4}y - 2x}{S_2(w)} \quad /108/$$

Подставляя /108/ в /6/, где заменим  $w \rightarrow -w$  с учетом /5/ и /7/, получим

$$S_2(w)S_2(1-w) = 1 \quad /109/$$

Решение /109/ есть

$$S_2(w) = e^{g(w - \frac{1}{2})} \quad /110/$$

$$g(-w) = -g(w).$$

Подставляя /108/ в /7/ с учетом /110/, получим линейное разностное уравнение на  $g(w)$ :

$$g(w + \frac{1}{2}) + g(w - \frac{1}{2}) = \ln - \frac{2x + \frac{5}{4}y - 1}{2x - \frac{5}{4}y + 1} \quad /111/$$

Подставляя в /111/  $x(w)$ ,  $y(w)$ , выраженные через  $u_1(w)$  и  $u_2(w)$  из /33/, /35/, получим окончательно уравнение на  $g(w)$ :

$$g(w + \frac{1}{2}) + g(w - \frac{1}{2}) = \ln - \frac{(\lambda u_1 - u_2)(1 + \lambda u_2 - u_1)}{(u_1 - \lambda u_2)(1 + \lambda u_1 - u_2)}, \quad /112/$$

где  $u_1, u_2$  заданы рядами /94/. Подставляя /108/ в /8/ с учетом /33/, /35/, получим для  $S_1(w)$ :

$$S_1(w) = \frac{\xi_1 [u_1 + u_2 - \frac{8}{\sqrt{\lambda}}(\lambda u_1 - u_2)(\lambda u_2 - u_1)] + \eta_1 4(u_1 + u_2) + \mu_1 2 \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} (u_1 - u_2)}{-\frac{8}{\sqrt{\lambda}}(\lambda u_1 - u_2)(1 + \lambda u_2 - u_1) \cdot e^{-g(w - \frac{1}{2})}} \quad /113/$$

Решение уравнения /112/ для  $g(w)$  можно получить аналогично тому, как это сделано в /7/ /см. Приложение /7/. Устремляя периодические функции  $\gamma(w)$  или  $\delta(w)$  к нулю, получим для  $g(w)$  и  $S_1(w)$  два типа частных решений из /7/. Обсуждение явной мероморфности полученных решений для  $S_1(w)$  будет проведено в отдельной работе.

Автор благодарен за полезные обсуждения А.П.Веселову, М.И.Граеву, Е.П.Жидкову, В.А.Исковских, В.Г.Кадышевскому, А.А.Кириллову, В.В.Козлову, И.М.Кричеверу, В.А.Мещерякову, В.К.Мельникову, А.М.Степину, Б.Н.Хоромскому.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков В.А. Препринт ОИЯИ Р-2369, Дубна, 1965.
2. Chew G.F., Low F.E. - Phys.Rev., 1956, v.101, p.1570.
3. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. - Ann. of Phys., 1970, v.59, p.408; ТМФ, 1970, т.3, с.78.
4. Wanders G. - Nuovo Cim., 1962, v.23, p.817.
5. Мещеряков В.А. - ЖЭТФ, 1966, т.51, с.648.
6. Rotheletner T. - Zs.Phys., 1964, v.177, p.287.
7. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. - ЯФ, 1968, 10, с.108.
8. Мещеряков В.А. Препринт ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971. Препринт ОИЯИ Р2-7047, Дубна, 1973.
9. Kaiser H. - Ann.Phys., 1971, v.27, 7F, No.2, p.149.
10. Гердт В.П., Мещеряков В.А. Препринт ОИЯИ, Р2-7976, Дубна, 1974.
11. Гердт В.П., Мещеряков В.А. - ТМФ, 1975, т.24, с.155.
12. Рерих К.В. - ТМФ, 1982, т.50, № 2, с.251.
13. Rerikh K.V. Proceedings of the XIII international conference of differential geometric methods in theoretical physics. Shumen, Bulgaria, 1984, World Scient., 1986, с.170.
14. Rerikh K.V. Proceedings of XIX International symposium, Ahrenshoop, DDR, 1985, p.236.
15. Рерих К.В. Сообщения ОИЯИ Р2-86-798, Дубна, 1986.
16. Рерих К.В. Сообщения ОИЯИ Р2-87-514, Дубна, 1987.
17. Birkhoff G.D. - Acta Math., 1922, v.43, p.1-119.
18. Moser J. - Comm. of Pure and Appl.Math., 1956, v.IX, p.673.
19. Siegel C.L. - Comm. on Pure and Appl.Math., 1957, v.10, p.305.
20. Гельфонд А.И. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
21. Hudson H. Cremona transformations in plane and space. Cambridge, 1927.

22. Harris W.A., Sibuya Y. - Trans. of Amer. Math. Soc., 1965, v.115, p.62.
23. Kuczma M. Functional equations in a single variable. Warszawa: Polish scientific Publishers, 1968.
24. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Динамические системы т.1, с.7. Итоги науки и техники. М., 1985.
25. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Динамические системы, т.3. Итоги науки и техники. М., 1985.
26. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 июля 1988 года.

Рерих К.В.

P2-88-544

Интегрируемая трехканальная статическая модель процессов  
рассеяния двух частиц со спином 1

Исследуются уравнения статической модели с матрицей кроссинг-симметрии  $A(1,1)$  в известной форме в виде системы нелинейных разностных уравнений. Дана геометрическая интерпретация этих уравнений как квадратичных преобразований Кремона. Используя свойства последних, получено функциональное уравнение на инвариантные алгебраические кривые, исследование которого позволяет найти три инвариантные алгебраические кривые и утверждать, что кроме них, возможно, существует только инвариантная неалгебраическая кривая. Из найденных инвариантных полиномов построено квадратичное преобразование Кремона, которое преобразует исходные уравнения к весьма простому виду, что позволяет найти инвариантную неалгебраическую кривую и исследовать ее свойства. Эти уравнения трактуемые как отображение с неподвижной гиперболической точкой, имеют якобиан, не равный единице. Для них найдена инвариантная мера и преобразование Кремона, преобразующее их в форму отображения, сохраняющего площадь. Используя результаты Биркгофа и Мозера для такого отображения, приводим исходные разностные уравнения в легко интегрируемую форму. Получены два типа общего решения исходных уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Rerikh K.V.

P2-88-544

Integrable Three-Channel Static Model for the Scattering  
of Two Particles with Spin 1

Equations of the static model with the crossing symmetry matrix  $A(1,1)$  in their famous formulation as a system of nonlinear difference equations are investigated. The geometric interpretation of these equations as quadratic Cremona transformations is given. Using the properties of the latter we obtain the functional equation on the invariant algebraic curves, the investigation of which enables one to find three invariant algebraic curves and to assert that except for them only the invariant nonalgebraic curve possibly exists. Using invariant polynomials found we constructed the quadratic Cremona transformation, which transforms the initial equations to a very simple form, which enables one to find an invariant nonalgebraic curve and to investigate its properties. These equations interpreted as the mapping with a fixed hyperbolic point have the Jacobian not equal one. We found the invariant measure and the Cremona transformation casting these equations into the form of area-preserving mapping. Using the results of Birkhoff and Moser for the mapping we transform the initial difference equations into an easily integrable form. Two types of the general solution for the initial equations are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988