объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-454

А.Б.Пестов, И.А.Сатиков,[1] В.И.Стражев[2]

О РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА К УРАВНЕНИЮ ДИРАКА - КЭЛЕРА

Направлено в журнал "Теоретической и математической физики"

[1] Белорусский политехнический институт, Минск
[2] Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Минск

1988

В последнее время все большую популярность приобретает уравнение Дирака - Кэлера[1-9], исчерпывающая физическая интерпретация которого, несомненно, будет иметь важное значение. В текущей литературе это уравнение обсуждается в связи с геометрической моделью поколений [10-13] и описанием кварков в рамках решеточной формулировки КХД[14-17], что основано на его редукции к уравнению Дирака. Другая возможная интерпретация предложена ранее в[5]. В настоящей работе мы воспроизвели структуру уравнений Дирака - Кэлера и Дирака, используя только определяющие соотношения алгебры Клиффорда. Проведенное рассмотрение опирается на алгебраическую конструкцию, из которой следует, что существует размерная редукция уравнения Дирака к уравнению Дирака - Кэлера. Таким образом, рассмотрение теорий Дирака - Калуцы - Клейна может оказаться существенным для физической интерпретации уравнения Дирака - Кэлера.

Рассмотрим алгебру Клиффорда над полем комплексных чисел с определяющими соотношениями

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 g_{ij}\, e, \qquad i,j = 0 \div d-1, \qquad /1/$$

в которых g_{ij} есть метрический тензор d-мерного псевдоевклидова пространства $R^d_{p,q}$, e есть единичный элемент алгебры. Элементы $\gamma_{i_1 \ldots i_p} = \gamma_{[i_1} \cdots \gamma_{i_p]}$, $p = 1 \div d$, вместе с e образуют естественный базис алгебры Клиффорда, общий элемент которой имеет в этом базисе вид

$$\Psi = \sum_{p=0}^{d} \Psi_p, \quad \Psi_0 = \psi e, \qquad \Psi_p = \frac{1}{p!} \psi^{i_1 \ldots i_p} \gamma_{i_1 \ldots i_p}. \qquad /2/$$

Рассматриваемая как линейное пространство алгебра Клиффорда имеет инвариантные подпространства как относительно преобразований

$$\Psi \to \Psi' = S \Psi S^{-1}, \qquad /3/$$

так и относительно преобразований

$$\Psi \to \Psi' = S \Psi, \qquad /4/$$

где $S = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega^{ij} \gamma_{ij}\right)$, $\omega^{ij} = -\omega^{ij}$ есть параметры группы вращений $R^d_{p,q}$. При отображениях /3/ инвариантные подпростран-

ства размерности C_p^d образуют элементы вида $\Psi = \frac{1}{p!}\psi^{i_1 \dots i_p} \gamma_{i_1 \dots i_p}$, а их коэффициенты $\psi^{i_1 \dots i_p}$ преобразуются при этом как компоненты полностью кососимметрических тензоров. Соответственно этому уравнение Дирака над алгеброй Клиффорда [5]

$$\hat{P}\Psi = m\Psi \quad (h = c = 1), \qquad /5/$$

где $\hat{P} = -i\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\gamma^k = g^{ki}\gamma_i$, а Ψ - общий элемент алгебры Клиффорда /2/ с коэффициентами, зависящими от x^k, можно рассматривать как систему зацепляющихся дифференциальных уравнений для кососимметрических тензорных полей. Эта система известна сейчас как уравнение Дирака - Кэлера.

Выделение инвариантных подпространств для случая преобразований /4/ не столь очевидно, так как требует построения полной системы проекционных операторов. В рассматриваемом случае проекционными операторами или идемпотентами будут элементы алгебры Клиффорда E, удовлетворяющие соотношению $E^2 = E$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $d = 2m$ и

$$g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{m-1\, m-1} = 1, \ g_{\nu\mu} = 0, \ \nu \neq \mu, \ g_{\nu\mu} = g_{m+\nu\ m+\mu}, \qquad /6/$$

греческие индексы пробегают значения $0, \dots, m-1$. Для элементов алгебры Клиффорда $J_\nu = \gamma_\nu \gamma_{m+\nu}$, $\nu = 0 \div m-1$, имеем согласно /1/ и /6/

$$J_\nu^2 = -e, \qquad J_\nu J_\mu = J_\mu J_\nu. \qquad /7/$$

Из /7/ следует, что элементы $E = \frac{1}{2^m}\prod_{\nu=0}^{m-1}(e + i\epsilon_\nu J_\nu)$, $\epsilon_\nu = \pm 1$, являются идемпотентами. Различные идемпотенты отличаются друг от друга наборами значений $\epsilon_\nu = \pm 1$, $\nu = 0 \div m-1$. Всего возможно, следовательно, 2^m проекционных операторов E_N, $N = 1 \div 2^m$:

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{2^m}(e + i\gamma_0\gamma_m)(e + i\gamma_1\gamma_{m+1})\dots(e + i\gamma_{m-1}\gamma_{2m-1}),\\
E_2 &= \frac{1}{2^m}(e - i\gamma_0\gamma_m)(e + i\gamma_1\gamma_{m+1})\dots(e + i\gamma_{m-1}\gamma_{2m-1}),\\
&\dots \qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots\\
E_N &= \frac{1}{2^m}(e - i\gamma_0\gamma_m)(e - i\gamma_1\gamma_{m+1})\dots(e - i\gamma_{m-1}\gamma_{2m-1}).
\end{aligned}\right\} \qquad /8/$$

Из /7/ и /8/ следует, что идемпотенты E_N, $N = 1 \div 2^m$, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{N=1}^{2^m} E_N = e, \qquad E_N^2 = E_N, \qquad E_N E_M = E_M E_N = 0. \qquad /9/$$

Построенная система проекционных операторов имеет простой геометрический смысл: координатные плоскости $(x^0, x^m), (x^1, x^{m+1}), \dots, (x^{m-1}, x^{2m-1})$ взаимно ортогональны и имеют только одну общую точку.

Полагая $\Psi_N = \Psi E_N$, получим $\Psi = \Psi e = \sum_{N=1}^{2^m} \Psi_N$. Элементы алгебры Клиффорда вида ΨE_N образуют линейное пространство C_N размерности 2^m, инвариантное относительно преобразований /4/. Пространство C_N называется спинорным пространством. Из /9/ следует, что различные C_N не имеют общих элементов, отличных от нулевого. Так как согласно /1/, /7/, /8/

$$J_\nu E = \gamma_\nu \gamma_{m+\nu} E = -i\epsilon_\nu E, \qquad \nu = 0 \div m-1, \qquad /10/$$

то общий элемент спинорного пространства C_N /спинор/ можно представить в виде

$$\Psi_N = \Psi E_N = \Phi E_N, \qquad /11/$$

где Φ - общий элемент алгебры Клиффорда пространства $R^m_{1,m-1}$:

$$\Phi = \sum_{r=0}^{m} \Phi_r, \qquad \Phi_0 = \phi e, \ \Phi_r = \frac{1}{r!}\phi^{\nu_1 \dots \nu_r} \gamma_{\nu_1 \dots \nu_r}, \ r = 1 \div m. \qquad /12/$$

Из /5/, /9/, /11/, /12/ следует, что спинор имеет 2^m компонент и подчиняется уравнению Дирака $\hat{P}\Psi_N = m\Psi_N$, если Ψ удовлетворяет уравнению Дирака - Кэлера.

Рассмотрим для конкретности пространство C_1 и в нем спинорные преобразования вида

$$\Psi_1 \to \Psi_1' = S\Psi_1,$$

где

$$S = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu<\mu} \omega^{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\nu<\mu} \omega^{\nu\mu}\gamma_{m+\nu,\, m+\mu}\right).$$

Повороты в плоскостях (x^ν, x^μ) и $(x^{m+\nu}, x^{m+\mu})$ совершаются на один угол. Согласно /1/, /6/, /10/

$$S\Psi_1 = T\Phi T^{-1} E_1,$$

где $T = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu<\mu}\omega^{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu}\right)$. Таким образом, существует связь между спинорами пространства размерности $d = 2m$ и кососимметрическими тензорами пространства размерности $d = m$. Отсюда и из /11/, /12/ следует, что если компоненты спинора удовлетворяют уравнению Дирака $\hat{P}\Psi_N = m\Psi_N$ и не зависят от координат $x^{m+\nu}$, $\nu = 0 \div m-1$, то они являются решениями уравнения Дирака - Кэлера. Пусть, например, $\hat{P}\Psi_N = m\Psi_N$ - уравнение Дирака в 8-мерном пространстве $R^8_{2,6}$. Это уравнение имеет класс решений, такой, что Ψ_N не зависят от координат x^4, x^5, x^6, x^7. Все решения этого класса являются решениями уравнения Дирака - Кэлера в пространстве Минковского. Таким образом, мы показали, что имеются новые возможности для физической интерпретации уравнения Дирака - Кэлера, идущие от уравнения Дирака в пространствах высшей размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kähler E. - Rendiconti di Mat (Roma), 1962, Ser.V.V., 21, No.3, 4, p.425.
2. Whittaker J.M. - Proc.Roy Soc.(London), 1928, v.A121, p.543.
3. Ivanenko D., Landau L. - Z.Phys., 1928, Bd.48, S.340.
4. Graf W. - Ann.Inst.Henri Poincare, 1978, A29, No.12, p.85.
5. Пестов А.Б. - ТМФ, 1978, т.34, № 1, с.48. Препринт ОИЯИ Р2-5798, ОИЯИ, 1972.
6. Ivanenko D.I., Obuchov Yu.N., Solodukhin S.N. Preprint IC/85/2, Trieste, ICTP, 1985.
7. Holdom B. - Nucl.Phys., 1984, B233, No.3, p.413.
8. Bullinaria J.A. - Ann.of Phys., 1986, v.168, No.2, p.301.
9. Сатиков И.А., Стражев В.И. - ТМФ, 1987, т.73, № 1, с.16.
10. Banks I.M., Dothan V., Horn D. - Phys.Lett., 1982, B117, No.6, p.413.
11. Benn I.M., Tucker R.W. - Phys.Lett., 1982, B119, No.4,5,6, p.348.
12. Pestov A.B. - In.: Proc. of the XVII International Symposium: Special Topics in Gauge Field Theories.Academie der Wissensxhaften der DDR, Ahrenshoop, 1983, p.233.
13. Стражев В.И. - В сб.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. ИФВЭ, Протвино, 1984, т.II, с.88.
14. Becher P., Joos H. - Zeit.für Phys., 1982, Bd.C15, S.343.
15. Gockeler M. - Phys.Lett., 1984, B142, No.3, p.197.
16. Bullinaria J.A. - Ann.of Phys., 1985, 159, No.2, p.272.
17. Jourjine A.N. - Phys.Rev., 1986, D34, No.4, p.1234.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня 1988 года.

Пестов А.Б., Сатиков И.А., Стражев В.И. Р2-88-454
О редукции уравнения Дирака к уравнению Дирака - Кэлера

Установлена связь между спинорами пространства размерности $d = 2m$ и кососимметрическими тензорами пространства размерности $d = m$. Показано, что существует размерная редукция уравнения Дирака к уравнению Дирака - Кэлера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Pestov A.B., Satikov I.A., Strazhev V.I. P2-88-454
Reduction of the Dirac Equation to the Dirac - Kähler Equation

Relation is established between spinors of the space of dimensionality $d = 2m$ and antisymmetric tensors of the space of dimensionality $d=m$. It is shown that there exists a dimensional reduction of the Dirac equation to the Dirac - Kähler equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988