объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-328

В.К.Мельников

ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в Оргкомитет Международного рабочего совещания "Нелинейные эволюционные уравнения: Интегрируемость и спектральные методы", Италия, 4-15 июля 1988 г.

1988

Недавно в теории нелинейных интегрируемых систем обнаружено новое явление - захват и последующее удержание солитонов. Суть этого явления состоит в следующем. В ряде нелинейных интегрируемых систем найдены решения, описывающие солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в условно-периодические колебательные режимы и находятся в них во все последующие моменты времени.

В настоящем докладе мы продемонстрируем это явление на примере следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\kappa \frac{\partial}{\partial x}|\phi|^2, \quad i\frac{\partial \phi}{\partial y} = u\phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad /1/$$

где $\kappa^2 = 1$. Нетрудно убедиться, что эта система обладает односолитонными решениями вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - rt)]}, \qquad /2/$$

$$\phi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - rt)]}\exp(i\sigma t),$$

где вещественные параметры μ, ν, r и комплексная величина A удовлетворяют единственному условию

$$(2\nu + r)\mu^2 + \kappa|A|^2 = 0, \qquad /3/$$

а частота σ принимает произвольные вещественные значения. Из этого соотношения следует, что если $\kappa\nu > 0$, то $\kappa r < 0$, и, следовательно, при $\kappa\nu > 0$ солитоны /2/ могут распространяться только в одном направлении независимо от значения величины A. Однако, если $\kappa\nu < 0$, то в зависимости от значения величины A произведение κr может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это значит, что в этом случае солитоны /2/ могут распространяться в двух прямо противоположных направлениях. Более того, при выполнении условия $2\mu^2\nu + \kappa|A|^2 = 0$ в силу /3/ получаем $r = 0$, т.е. солитон /2/ в этом случае покоится.

Как уже отмечалось ранее /1/, взаимодействие солитонов в системе /1/ обладает чрезвычайно разнообразной динамикой. На этот раз мы рассмотрим детально случай, когда все взаимодействующие солитоны вида /2/ имеют одинаковые параметры μ и ν. В типичной ситуации, т.е. когда все взаимодействующие солитоны имеют разные значения параметра $r = r_m$, $m = 1, \ldots N$, получаемое с помощью метода обратной задачи рассеяния N-солитонное решение системы /1/ описывает эволюцию солитона /2/ с наибольшим значением величины μr_m в солитон этого же вида с наименьшим значением величины μr_m. Далее, $N > 1$ солитонов вида /2/ с одинаковыми значениями параметра r, но с разными значениями величины $\sigma = \sigma_m$, $m = 1, \ldots, N$, образуют уединенную волну вида

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - rt - f)]}, \qquad /4/$$

$$\phi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - rt - f)]}\exp(i\sigma t),$$

где f и A - 2π -периодические функции переменных $\theta_{m,n} = (\sigma_m - \sigma_n)t$, $m, n = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие единственному условию

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r + 2\nu + \kappa\mu^{-2}|A|^2 = 0, \qquad /5/$$

а частота σ равна одной из частот σ_m. Отсюда следует, что величина r в этом случае удовлетворяет условию

$$r + 2\nu + \kappa\mu^{-2}|A_0|^2 = 0, \qquad /6/$$

где

$$|A_0|^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |A(t)|^2\,dt. \qquad /7/$$

Таким образом, движение волны /4/ слагается из равномерного поступательного движения и условно-периодического колебательного движения. При выполнении условия $2\mu^2\nu + \kappa|A_0|^2 = 0$ согласно /5/-/7/ имеем $r = 0$. Следовательно, в этом случае волна /4/ совершает условно-периодическое колебательное движение. При этом форма u-волны не меняется во времени, а амплитуда ϕ-волны меняется со временем как некоторая условно-периодическая функция t. Ниже найдены решения системы /1/, описывающие солитон /2/, который приходит из бесконечности, а затем трансформируется в волну /4/ и захватывается в условно-периодический колебательный режим. Нами также найдены решения системы /1/, описывающие волну /4/, которая совершала условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит в бесконечность в виде солитона /2/.

Наконец, отметим, что система /1/ обладает инвариантным многообразием вида

$$u = v(x + ct, t), \quad \phi = \psi(x + ct, t)\exp(-iEy), \qquad /8/$$

где c и $E > 0$ - вещественные константы, а функции $v(x, t)$ и $\psi(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v\psi = E\psi. \qquad /9/$$

Эта система имеет односолитонные решения вида

$$v = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x - r t)]}, \quad \psi = \frac{A\exp(i\sigma t)}{\mathrm{ch}[\mu(x - r t)]}, \qquad /10/$$

где вещественные параметры μ, r и комплексная величина A удовлетворяют условиям

$$\mu^2 = E, \quad (r - c)\mu^2 + \kappa|A|^2 = 0, \qquad /11/$$

а частота σ принимает произвольные вещественные значения. Нетрудно видеть, что решение /10/ системы /9/ связано с решением /2/ системы /1/ при $\nu = 0$ преобразованием /8/ с $E = \mu^2$, а второе из условий /11/ получается из соотношения /3/ при $\nu = 0$ с помощью замены r на $r - c$. Отсюда следует, что, полагая $\nu = 0$ в многосолитонном решении системы /1/ и совершая, далее, преобразование /8/ с $E = \mu^2$, мы получим многосолитонное решение системы /9/. Ниже будет дан исчерпывающий анализ динамики полученного таким образом многосолитонного решения системы /9/.

1. ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ /1/

Указанные выше решения системы /1/ строятся следующим образом. Пусть N - произвольное целое число, удовлетворяющее условию $N > 1$. Возьмем вектор-столбец λ с N компонентами λ_m вида

$$\lambda_m = a_m \exp[\omega x - i\omega^2 y - i(\omega^2 - \bar{\rho}_m^2)t], \qquad /1.1/$$

где $a_m \neq 0$, ρ_m и ω - комплексные величины, причем

$$\omega = \mu + i\nu \qquad /1.2/$$

с вещественными μ и ν. Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Пусть, далее, P и Q - квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$P_{m,n} = \frac{1}{2\mu}\lambda_m\bar{\lambda}_n, \quad Q_{m,n} = \frac{i\kappa}{\rho_m^2 - \bar{\rho}_n^2}. \qquad /1.3/$$

Положим

$$D = \det\begin{vmatrix} I & -Q \\ P & I \end{vmatrix}, \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{e} \\ 0 & I & -Q \\ \lambda & P & I \end{vmatrix}, \qquad /1.4/$$

где I - единичная матрица порядка N, а e - вектор-столбец с N компонентами e_m, равными единице. Здесь и всюду в дальнейшем знак " " означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Согласно результатам работы /2/ функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \phi = \frac{\Phi}{D} \qquad /1.5/$$

удовлетворяют системе /1/, т.е. являются ее решением.

Выясним теперь, каково поведение этого решения системы /1/. С этой целью убедимся прежде всего в справедливости равенств

$$D = 1 + \frac{1}{2\mu}\sum_{m,n=1}^{N} Q_{m,n}\bar{\lambda}_m\lambda_n, \quad \Phi = -\sum_{m=1}^{N}\lambda_m. \qquad /1.6/$$

Действительно, в силу /1.4/ имеем

$$D = \det(I + PQ), \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{e} \\ \lambda & I + PQ \end{vmatrix}. \qquad /1.7/$$

Возьмем диагональную матрицу $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. С учетом /1.3/ имеем

$$\Lambda e = \lambda, \quad \Lambda^{-1} P \bar{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{2\mu} U, \quad \bar{\Lambda} Q \Lambda = 2\mu R,$$

где U и R - квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$U_{m,n} = 1, \quad R_{m,n} = \frac{i\kappa \bar{\lambda}_m \lambda_n}{2(\rho_m^2 - \bar{\rho}_n^2)\mu}. \qquad /1.8/$$

Отсюда на основе /1.7/ вытекают равенства

$$D = \det(I + UR), \quad \Phi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\lambda} \\ e & I + UR \end{vmatrix}. \qquad /1.9/$$

Пусть, далее, H - ортогональная матрица порядка N с элементами $H_{m,n}$, такая, что $H_{1,n} = N^{-1/2}, n = 1, \ldots, N$. Очевидно, что остальные элементы этой матрицы удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{N} H_{m,n} = 0, \qquad \text{если } 1 < m \le N.$$

На этом основании получаем равенства

$$V = HU\tilde{H} = \operatorname{diag}(N, 0, \ldots, 0), \quad He = \epsilon_1 N^{1/2}, \quad H\lambda = h, \qquad /1.10/$$

где ϵ_1 - вектор-столбец с компонентами $1, 0, \ldots, 0$, а h - вектор-столбец с компонентами $h_1, \ldots, h_N$, причем

$$h_1 = N^{-1/2} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m. \qquad /1.11/$$

Возьмем, наконец, матрицу $S = HR\tilde{H}$. Нетрудно убедиться, что элемент $S_{1,1}$ этой матрицы, стоящий в левом верхнем углу, имеет вид

$$S_{1,1} = N^{-1} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n}. \qquad /1.12/$$

В соответствии с /1.9/ имеем

$$D = \det(I + VS), \quad \Phi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{h} \\ \epsilon_1 N^{1/2} & I + VS \end{vmatrix},$$

т.е. согласно /1.10/ справедливы равенства

$$D = 1 + NS_{1,1}, \quad \Phi = -N^{1/2} h_1.$$

Отсюда в силу /1.3/, /1.8/, /1.11/ и /1.12/ следует справедливость равенств /1.6/.

Положим теперь

$$\rho_m^2 = \bar{\omega}^2 + \sigma_m - i\mu r_m, \qquad /1.13/$$

где σ_m и r_m - вещественные параметры. С учетом /1.1/, /1.2/, /1.8/ и /1.13/ находим, что

$$\lambda_m = \eta_m \exp[\mu(x + 2\nu y - r_m t)) \exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y],$$

$$R_{m,n} = -\frac{\kappa}{2} \frac{\bar{\eta}_m \eta_n \exp[2\mu(x + 2\nu y) - \mu(r_m + r_n)t]}{[(r_m + r_n + 4\nu)\mu^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu]}, \qquad /1.14/$$

где

$$\eta_m = a_m \exp(i\sigma_m t). \qquad /1.15/$$

Предположим, что величины r_m удовлетворяют условию

$$(2\nu + r_m)\kappa < 0, \quad m = 1, \ldots, N. \qquad /1.16/$$

Предположим, далее, что величины $\gamma_m = \mu r_m + i\sigma_m$ все разные, $m = 1, \ldots, N$. С помощью /1.3/, /1.6/, /1.8/, /1.14/ и /1.15/ получаем, что функции D и Φ допускают представление

$$D = 1 + K\exp[2\mu(x + 2\nu y)],$$

$$\Phi = L\exp[\mu(x + 2\nu y)) \exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y), \qquad /1.17/$$

где

$$K = -\frac{\kappa}{2} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\bar{a}_m a_n \exp[-(\mu r_m + i\sigma_m)t] \exp[-(\mu r_n - i\sigma_n)t]}{[(r_m + r_n + 4\nu)\mu^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu]}. \qquad /1.18/$$

$$L = -\sum_{m=1}^{N} a_m \exp[-(\mu r_m - i\sigma_m)t],$$

и, следовательно, функции K и L зависят только от времени t. Согласно /1.16/ квадратичная форма K положительно определена. Отсюда следует, что $K > 0$ при любом вещественном значении t. Таким образом, на основе /1.5/ и /1.17/ получаем, что интересующее нас решение системы /1/ имеет вид

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - f)]},$$

$$\phi = A\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - f)]}, \qquad /1.19/$$

где

$$f = -\frac{1}{2\mu}\ln K, \quad A = \frac{1}{2} L K^{-1/2}. \qquad /1.20/$$

В соответствии с /1.18/ нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$2\mu\frac{dK}{dt} - 8\mu^2\nu K = \kappa|L|^2 .$$

Отсюда на основании /1.20/ следует, что входящие в выражения /1.19/ функции f и A удовлетворяют соотношению

$$\frac{df}{dt} + 2\nu + \kappa\mu^{-2}|A|^2 = 0 . \qquad /1.21/$$

Здесь нелишне отметить, что условие /1.21/ является необходимым и достаточным для того, чтобы функции u и ϕ вида /1.19/ были решением системы /1/. Таким образом, беря произвольную комплексную функцию A(t) и полагая

$$f = f_0 - \int_{t_0}^{t}(2\nu + \kappa\mu^{-2}|A(\tau)|^2)\,d\tau,$$

мы обязательно получим решение системы /1/ указанного выше вида /1.19/. Однако не при любом выборе функции A(t) это решение может быть получено из многосолитонного решения этой системы.

Посмотрим теперь, какова динамика решения /1.19/ при указанном выше выборе функций f и A. С этой целью предположим, что существуют целые числа N_- и N_+, удовлетворяющие условию $1 \le N_- < N_+ \le N$, такие, что $r_1 = \ldots = r_{N_-}$ и $r_{N_+} = \ldots = r_N$. Предположим, далее, что при $m = N_- + 1, \ldots, N$ выполняется неравенство

$$(r_1 - r_m)\mu > 0, \quad m = N_- + 1, \ldots, N, \qquad /1.22/$$

а при $m = 1, \ldots, N_+ - 1$ выполняется неравенство

$$(r_N - r_m)\mu < 0, \quad m = 1, \ldots, N_+ - 1 . \qquad /1.23/$$

Положим, наконец,

$$K_- = -\frac{\kappa}{2}\sum_{m,n=1}^{N_-}\frac{\bar a_m a_n \exp[-i(\sigma_m - \sigma_n)t]}{[(r_m + r_n + 4\nu)\mu^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu]},$$

$$K_+ = -\frac{\kappa}{2}\sum_{m,n=N_+}^{N}\frac{\bar a_m a_n \exp[-i(\sigma_m - \sigma_n)t]}{[(r_m + r_n + 4\nu)\mu^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu]}, \qquad /1.24/$$

$$L_- = -\sum_{m=1}^{N_-} a_m \exp(i\sigma_m t), \quad L_+ = -\sum_{m=N_+}^{N} a_m \exp(i\sigma_m t) .$$

С учетом /1.22/ получаем, что при $t \to -\infty$ справедливы асимптотики

$$K\exp(2\mu r_1 t) \sim K_-, \quad L\exp(\mu r_1 t) \sim L_-,$$

а при $t \to \infty$ в силу /1.23/ имеют место асимптотики

$$K\exp(2\mu r_N t) \sim K_+, \quad L\exp(\mu r_N t) \sim L_+.$$

Отсюда следует, что при $t \to -\infty$ решение /1.19/ обладает асимптотикой

$$u \sim \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - r_1 t - q_-)]}, \qquad /1.25/$$

$$\phi \sim A_-\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - r_1 t - q_-)]},$$

где

$$q_- = -\frac{1}{2\mu}\ln K_-, \quad A_- = \frac{1}{2}L_- K_-^{-1/2} . \qquad /1.26/$$

Согласно /1.24/ и /1.26/ справедливо соотношение

$$\frac{dq_-}{dt} + r_1 + 2\nu + \kappa\mu^{-2}|A_-|^2 = 0. \qquad /1.27/$$

С другой стороны, при $t \to \infty$ решение /1.19/ имеет асимптотику

$$u \sim \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x + 2\nu y - r_N t - q_+)]},$$

$$\phi \sim A_+ \frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x + 2\nu y - r_N t - q_+)]}, \qquad /1.28/$$

где

$$q_+ = -\frac{1}{2\mu}\ln K_+, \quad A_+ = \frac{1}{2}L_+K_+^{-1/2}. \qquad /1.29/$$

На основании /1.24/ и /1.29/ получаем

$$\frac{dq_+}{dt} + r_N + 2\nu + \kappa\mu^{-2}|A_+|^2 = 0. \qquad /1.30/$$

Таким образом, решение /1.19/ описывает эволюцию волны /1.25/ в волну /1.28/. В частном случае $N_- = 1$, $N_+ < N$ это решение описывает эволюцию солитона /2/ в волну /4/. При $\kappa\nu < 0$ в соответствии с /1.30/ возможно равенство $r_N = 0$. Следовательно, в этом случае решение /1.19/ описывает солитон /2/, который приходит из бесконечности, а затем он трансформируется в волну вида /4/ после чего захватывается в условно-периодический колебательный режим. Наоборот, если $N_- > 1$, $N_+ = N$, то решение /1.19/ описывает эволюцию волны вида /4/ в солитон /2/. При $\kappa\nu < 0$ согласно /1.27/ возможно равенство $r_1 = 0$. Таким образом, в этом случае решение /1.19/ описывает волну, которая совершала условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит в бесконечность в виде солитона /2/. Наконец, при $N_- = 1$, $N_+ = N$ решение /1.19/ описывает эволюцию солитона /2/ с наибольшим значением фазовой скорости в солитон с наименьшим значением фазовой скорости. В этой ситуации при $\kappa\nu > 0$ в силу /1.27/ и /1.30/ имеем $\kappa r_1 < 0$ и $\kappa r_N < 0$, т.е. $r_1 r_N > 0$, и, следовательно, исходный солитон и конечный солитон движутся в одном и том же направлении. Однако при $\kappa\nu < 0$ возможен случай с $r_1 r_N < 0$, т.е. в этой ситуации исходный солитон и конечный солитон движутся в прямо противоположных направлениях.

2. ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ /9/

Положим теперь в равенствах /1.17/ и /1.18/ $\nu = 0$. Получаемое в этом случае согласно /1.5/ решение системы /1/ имеет вид

$$u_0 = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x - f)]}, \quad \phi_0 = \frac{A\exp(-i\mu^2 y)}{\mathrm{ch}[\mu(x - f)]}, \qquad /2.1/$$

где функции f и A зависят только от t и удовлетворяют соотношению /1.21/ с $\nu = 0$. При этом очевидно, что решение /2.1/ может быть получено из /1.19/ при $\nu = 0$. Нетрудно видеть, что функции u_0 и $\phi_0\exp(i\mu^2 y)$ не зависят от y. Отсюда следует, что функции

$$v(x, t) = u_0(x - ct, t), \qquad /2.2/$$

$$\psi(x, t) = \phi_0(x - ct, y, t)\exp(i\mu^2 y)$$

удовлетворяют системе /9/ при $E = \mu^2$, т.е. являются многосолитонным решением этой системы. Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что при $t \to -\infty$ это решение обладает асимптотикой

$$v \sim \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu x - \mu(c + r_1)t - \mu q_-]}, \qquad /2.3/$$

$$\psi \sim \frac{A_-}{\mathrm{ch}[\mu x - \mu(c + r_1)t - \mu q_-]},$$

где функции q_- и A_- удовлетворяют соотношению /1.27/ с $\nu = 0$, а при $t \to \infty$ рассматриваемое нами решение /2.2/ системы /9/ имеет асимптотику

$$v \sim \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu x - \mu(c + r_N)t - \mu q_+]}, \qquad /2.4/$$

$$\psi \sim \frac{A_+}{\mathrm{ch}[\mu x - \mu(c + r_N)t - \mu q_+]},$$

где функции q_+ и A_+ удовлетворяют соотношению /1.30/ при $\nu = 0$.

Нетрудно видеть, что волна /2.3/ будет совершать условно-периодическое колебательное движение, если $c + r_1 = 0$. Из соотношения /1:27/ следует, что удовлетворить это условие можно только в случае, когда $\kappa c > 0$. Аналогичным образом легко убедиться, что волна /2.4/ будет находиться в условно-периодическом колебательном режиме, если $c + r_N = 0$. В соответствии с /1.30/ это возможно только при $\kappa c > 0$. Таким образом, при $\kappa c > 0$ полученное нами многосолитонное решение /2.2/ системы /9/ в зависимости от выбора параметров этого решения может описывать несколько довольно нетривиальных процессов. Наиболее интересными из них являются следующие. Прежде всего здесь имеются решения, описывающие солитон вида /10/, который приходит из бесконечности, а затем захватывается в условно-периодический колебательный режим, и решения, описывающие волну, которая совершала условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и волна ушла в бесконечность в виде солитона /10/. В этом случае, т.е. при $\kappa c > 0$, возможны также решения, описывающие эволюцию солитона /10/ в солитон того же вида, но движущийся в прямо противоположном направлении. Для того чтобы это явление имело место, необходимо выполнение неравенства

$$(c + r_1)(c + r_N) < 0,$$

которое, очевидно, не противоречит соотношениям /1.27/ и /1.30/. Наоборот, при $\kappa c < 0$ решения указанных выше типов невозможны. Однако и в этом случае решение /2.2/ обладает довольно необычной динамикой, сравнительно, например, с динамикой многосолитонного решения системы [3,4]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 2\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

В заключение отметим, что система /9/ обладает двумя локальными законами сохранения вида

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial X_m}{\partial x} = 0, \quad m = 1, 2,$$

где

$$T_1 = v, \quad X_1 = cv - 2\kappa|\psi|^2,$$

$$T_2 = \frac{c}{2}v^2 - 2\kappa\left(v|\psi|^2 - \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 - E|\psi|^2\right),$$

$$X_2 = \frac{c^2}{2}v^2 - 2c\kappa v|\psi|^2 + 2\kappa^2|\psi|^4 - 2\kappa\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \bar\psi}{\partial t} + \frac{\partial \bar\psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

Отсюда следует, что на быстро убывающих по x решениях система /9/ имеет два первых интеграла

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} T_m\,dx, \quad m = 1, 2.$$

Нетрудно убедиться, что на решении /2.2/ эти интегралы принимают следующие значения:

$$I_1 = 4|\mu|, \quad I_2 = \frac{8}{3}c|\mu|^3.$$

Отметим также, что, полагая $H = -I_2$, мы можем записать систему /9/ в следующем гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta v}, \quad \frac{\delta H}{\delta \psi} = \frac{\delta H}{\delta \bar\psi} = 0.$$

Отметим, наконец, что еще более разнообразной динамикой обладают многосолитонные решения системы [5,6]

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3v^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8\kappa|\psi|^2\right)\right] = 0,$$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial y} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

и тесно связанной с нею системы [7]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} + 6v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 8\kappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v\psi = E\psi.$$

Более детально эти вопросы рассмотрены в работах [8,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. В сб.: Труды VIII Межд.сов. по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-87-798, Дубна,1987,с.11-26.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна, 1986.
3. Yajima N., Oikawa M. - Progr.Theor.Phys., 1976, v.56, No.6, p.1719-1739.
4. Ma Y.-C. - Stud.Appl.Math., 1978, v.59, No.3, p.201-221.
5. Mel'nikov V.K. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, No.2, p.129-136.

6. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1987, v.112, No.4, p.639-652.
7. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. - Physica D., 1986, v.18D, No.1, p.455-463.
8. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-114, Дубна, 1988.
9. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-88-232, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 мая 1988 года.

Мельников В.К. Р2-88-328
Захват и удержание солитонов в нелинейных интегрируемых системах

В ряде нелинейных интегрируемых систем найдены решения, описывающие солитоны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в условно-периодические колебательные режимы. Названные решения получены с помощью метода обратной задачи рассеяния. Указанные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-88-328
Capture and Confinement of Solitons in Nonlinear Integrable Systems

Some nonlinear integrable systems were found to have solutions describing solitons that come from infinity and then are captured into conditionally periodical oscillatory regimes. These solutions were obtained by the inverse scattering method. The obtained results are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, solid state physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988