

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Л 55

P2-88-298

Ли Ам Гир, В.М.Мальцев

УРАВНЕНИЯ

ДЛЯ ДВУХВРЕМЕННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В ОКРЕСТНОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

1988

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе^{/1/} получены уравнения квантовой теории поля в фазовом пространстве (ФП). Формулировка в ФП имеет ряд преимуществ, которыми можно воспользоваться.

Во-первых, здесь имеют дело не с амплитудой, а с плотностью вероятности. Следовательно, полученные уравнения могут служить исходными уравнениями статистической теории. Во-вторых, квантовый гамильтониан в ФП переходит в пределе $\hbar \rightarrow 0$ в классический гамильтониан. Это дает возможность находить приближенные решения в окрестности классического решения.

В работе излагаются приближенные методы решения уравнений в фазовом пространстве.

В п.1 получено разложение гамильтониана в окрестности классического поля. Вычислена энергия квантового солитона. В п.2 рассмотрено взаимодействие фермиона с квантовым солитоном. В заключение сформулированы основные результаты работы.

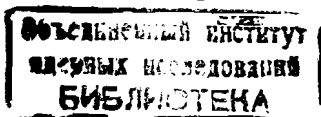
1. РАЗЛОЖЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА В ОКРЕСТНОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭНЕРГИЯ КВАНТОВОГО СОЛИТОНА

Для иллюстрации метода рассмотрим уравнение (в^{/1/} (2,18),(2.19) и (2.24)), определяющее спектр по энергии в ФП для скалярного поля:

$$\hat{E}[\varphi, \pi] f[\varphi, \pi] = E f[\varphi, \pi], \quad (1.1a)$$

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi f[\varphi, \pi] = 1, \quad (1.1б)$$

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \left\{ f[\varphi, \pi] \right\}^2 = 1, \quad (1.1в)$$



$$\hat{E}[\varphi, \pi] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \varphi (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi + \frac{1}{2} \left[U\left(\varphi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta\pi}\right) + U\left(\varphi - \frac{i\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta\pi}\right) \right] \right\} = H_{\kappa\lambda} - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left\{ \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \frac{\delta}{\delta\pi} (-\nabla^2 + \mu^2) \frac{\delta}{\delta\pi} + U''(\varphi) \frac{\delta}{\delta\pi} \right\} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2n} \int d\vec{x} \frac{U^{(2n)}(\varphi(\vec{x}))}{(2n)!} \left(\frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})}\right)^{2n} \quad (I.2)$$

$$H_{\kappa\lambda} = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \varphi (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi + U(\varphi(\vec{x})) \right\}. \quad (I.3)$$

Прежде всего найдем решение в случае свободного поля, которое удовлетворяет условиям (I.1б) и (I.1в):

$$\hat{E}[\varphi, \pi] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \varphi (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \frac{\delta}{\delta\pi} (-\nabla^2 + \mu^2) \frac{\delta}{\delta\pi} \right) \right\}. \quad (I.4)$$

Если разложим $\varphi(\vec{x})$ по системе $\{u_{\vec{k}}(\vec{x})\}$ ортогональных функций, которые являются собственными функциями оператора $(-\nabla^2 + \mu^2)$ (т.е. преобразование Фурье)

$$(-\nabla^2 + \mu^2) u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \omega_{\vec{k}}^2 u_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad (I.5)$$

то получим

$$\hat{E}[\varphi, \pi] = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2} \pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2} \varphi_{\vec{k}} \varphi_{-\vec{k}} - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{-\vec{k}}} + \omega_{\vec{k}}^2 \frac{\partial}{\partial \pi_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \pi_{-\vec{k}}} \right) \right\}, \quad (I.6)$$

$$\text{где } \varphi_{\vec{k}} = \int d\vec{x} \varphi(\vec{x}) u_{\vec{k}}(\vec{x}); \quad \pi_{\vec{k}} = \int d\vec{x} \pi(\vec{x}) u_{\vec{k}}(\vec{x}). \quad (I.7)$$

Это система гармонических осцилляторов. Следовательно, (I.6) можно переписать в виде

$$\hat{E}[\varphi, \pi] = \sum_{\vec{k}} \hat{E}_{\vec{k}}(\varphi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}}), \quad (I.8)$$

$$\text{где } \hat{E}_{\vec{k}}(\varphi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}}) = \frac{1}{2} \pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2} \varphi_{\vec{k}} \varphi_{-\vec{k}} - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{-\vec{k}}} + \omega_{\vec{k}}^2 \frac{\partial}{\partial \pi_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \pi_{-\vec{k}}} \right) - \quad (I.9)$$

- квантовомеханический гамильтониан осциллятора в фазовом пространстве (см. /1/). Отсюда непосредственно получаем результат, который удовлетворяет условиям (I.1б, в)

$$E = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right); \quad n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (I.10)$$

$$\text{где } \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}, \quad (I.11)$$

$$\text{и } f[\varphi, \pi] = \prod_{\vec{k}} e^{-\frac{2}{\hbar} H_{\vec{k}}(\varphi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}})} L_{n_{\vec{k}}} \left(\frac{4}{\hbar} H_{\vec{k}}^{\kappa\lambda}(\varphi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}}) \right), \quad (I.12)$$

$$\text{где } H_{\vec{k}}^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} \pi_{\vec{k}} \pi_{-\vec{k}} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2} \varphi_{\vec{k}} \varphi_{-\vec{k}}. \quad (I.13)$$

Теперь вернемся к уравнениям (I.1). Для того чтобы разложить решения φ в окрестности классического поля $\varphi_{\text{кл}}$, исследуем уравнения (I.1) в пределе при $\hbar \rightarrow 0$. Тогда

$$\hat{E}[\varphi, \pi] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} H_{\kappa\lambda}[\varphi, \pi]. \quad (I.14)$$

Решения (I.1) принимают вид

$$f[\varphi, \pi] = \delta[\varphi - \varphi_{\text{кл}}^{(i)}] \delta[\pi]; \quad i = 1, 2, \dots \quad (I.15)$$

или

$$f[\varphi, \pi] = \delta[E - H_{\kappa\lambda}], \quad (I.16)$$

где $\delta[u]$ - функционал, т.е. $\delta[u] \equiv \prod_{\vec{x}} \delta(u(\vec{x}))$.

Выражение (I.15) соответствует статическому решению, а (I.16) - любому классическому решению конечной энергии (особенно нас интересуют периодические решения). В случае (I.15) из (I.1) и (I.4) следует

$$E \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_{\text{кл}}(\vec{x}) (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{\text{кл}}(\vec{x}) + U(\varphi_{\text{кл}}(\vec{x})) \right\}. \quad (I.17)$$

В случае (I.16) имеем

$$E \stackrel{\hbar \rightarrow 0}{=} H_{k_1} = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi_{k_1}^2(\vec{x})}{2} + \varphi_{k_1}(\vec{x}) (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1}(\vec{x}) + U(\varphi_{k_1}(\vec{x})) \right\}. \quad (I.18)$$

Мы интересуемся полем $\varphi(\vec{x})$, которое "хорошо локализовано" в окрестности $\varphi_{k_1}(\vec{x})$, т.е. квантовым солитоном. Тогда \hat{E} можно разложить вблизи $\varphi_{k_1}(\vec{x})$:

$$\hat{E}[\varphi, \pi] = \hat{E}[\varphi_{k_1} + (\varphi - \varphi_{k_1}), \pi] = V[\varphi_{k_1}] + \hat{E}^{(2)}[\varphi - \varphi_{k_1}, \pi] + O((\varphi - \varphi_{k_1})^3, (\frac{\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta \pi})^4), \quad (I.19)$$

где
$$V[\varphi_{k_1}] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_{k_1} (-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1} + U(\varphi_{k_1}) \right\}, \quad (I.20)$$

$$\hat{E}^{(2)}[\varphi - \varphi_{k_1}, \pi] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_{k_1}) \hat{\omega}^2 (\varphi - \varphi_{k_1}) + (\varphi - \varphi_{k_1}) \times \right. \\ \left. \times [(-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1} + U'(\varphi_{k_1}) - \frac{1}{2} (\frac{\hbar}{2})^2 \left[\frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} + \frac{\delta}{\delta \pi} \hat{\omega}^2 \frac{\delta}{\delta \pi} \right]] \right\}, \quad (I.21)$$

а
$$\hat{\omega}^2 = \nabla^2 + \mu^2 + U''(\varphi_{k_1}(\vec{x})). \quad (I.22)$$

Вводя переменную

$$\chi(\vec{x}) = \varphi - \varphi_{k_1} + \hat{\omega}^{-2} [(-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1} + U'(\varphi_{k_1})], \quad (I.23)$$

перепишем (I.19) в виде

$$\hat{E}[\varphi, \pi] = E_{k_1} + \hat{E}_{\text{эф}}[\varphi, \pi] + O((\varphi - \varphi_{k_1})^3, (\frac{\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta \pi})^4), \quad (I.24)$$

где
$$\hat{E}_{\text{эф}} = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \chi(\vec{x}) \hat{\omega}^2 \chi(\vec{x}) - (\frac{\hbar}{2}) \frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2}{\delta \chi^2} + \frac{\delta}{\delta \pi} \hat{\omega}^2 \frac{\delta}{\delta \pi} \right] \right\} \quad (I.25)$$

и
$$E_{k_1} = V[\varphi_{k_1}] - \int d\vec{x} \left((-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1} + U'(\varphi_{k_1}) \right) \hat{\omega}^{-2} \times \\ \times \left((-\nabla^2 + \mu^2) \varphi_{k_1} + U'(\varphi_{k_1}) \right). \quad (I.26)$$

Заметим, что для статического решения $U'(\varphi_{k_1}) = 0$.

Легко найти собственные значения оператора $\hat{E}_{\text{эф}}$ так же, как это сделано выше для гармонического осциллятора. При этом очень важно условие (I.10), которое не разрешает лишние решения.

Известно, что собственный вектор оператора $\hat{\omega}^2$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\omega}^2 u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \left(-\nabla^2 + \mu^2 + \frac{\partial^2 U(\varphi)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_{k_1}} \right) u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \omega_{\vec{k}}^2 u_{\vec{k}}(\vec{x}). \quad (I.27)$$

Подставляя в $\hat{E}_{\text{эф}}$ разложения

$$\chi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{x}), \\ \pi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \pi_{\vec{k}} u_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad (I.28)$$

получим

$$\hat{E}_{\text{эф}} = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2} \pi_{\vec{k}}^* \pi_{\vec{k}} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2} c_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}} - (\frac{\hbar}{2})^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial c_{\vec{k}}^*} \frac{\partial}{\partial c_{\vec{k}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega^2 \frac{\partial}{\partial \pi_{\vec{k}}^*} \frac{\partial}{\partial \pi_{\vec{k}}} \right) \right\} = \sum_{\vec{k}} \left\{ H_{k_1} - \left(\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \right)^2 \left(H_{k_1} \frac{\partial^2}{\partial H_{k_1}^2} + \frac{\partial}{\partial H_{k_1}} \right), \right. \quad (I.29)$$

где

$$H_{k_1} = \frac{1}{2} \pi_{\vec{k}}^* \pi_{\vec{k}} + \frac{\omega_{\vec{k}}^2}{2} c_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}}.$$

Это также система гармонических осцилляторов. Следовательно,

$$E_{\text{эф}} = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right); \quad n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (I.30)$$

$$f[\pi_{\vec{k}}, c_{\vec{k}}] = \prod_{\vec{k}} e^{-\frac{1}{\hbar} H_{k_1}(\pi_{\vec{k}}, c_{\vec{k}})} L_{n_{\vec{k}}}^0 \left[\frac{4}{\hbar} H_{k_1}(\pi_{\vec{k}}, c_{\vec{k}}) \right], \quad (I.31)$$

где $\omega_{\vec{k}}$ определено в (I.27), а $L_{n_{\vec{k}}}^0$ - полином Лагерра. От (I.31) можно перейти к $f[\varphi, \pi]$, если использовать (I.23) и (I.28). В результате энергетический спектр квантового солитона с учетом (I.20), (I.24), (I.26) и (I.30) имеет вид

$$E = E_{k_1} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (I.32)$$

Если $\varphi_{k\lambda}(\vec{x})$ является периодическим решением, то мы должны полагать, что $\varphi_{k\lambda}(\vec{x})$ представляет собой решение $\varphi(\vec{x}, t_0)$ в каком-то фиксированном времени t_0 . При этом спектр (1.30) необходимо усреднить по периодической траектории

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 E[\varphi_{k\lambda}(t_0)] = \langle E_{k\lambda} \rangle + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ \vec{k}}} \hbar \langle \omega_{\vec{k}} \rangle (n_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) + \dots, \quad (I.33)$$

где первый член - среднее от (1.26) по периодической траектории, а $\langle \omega_{\vec{k}} \rangle$ - собственные значения уравнения (1.27), в котором $U''(\varphi_{k\lambda})$ также усреднено по периодической траектории.

Этот прием заменяет сложную процедуру метода ВКБ^[2].

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФЕРМИОНА С КВАНТОВЫМ СОЛИТОНОМ

В рассматриваемом случае оператор \hat{E} равен сумме

$$\hat{E} = \hat{E}_0^\psi + \hat{E}_0^\varphi + \hat{E}_I, \quad (2.1)$$

где \hat{E}_0^φ задан в (1.4), а \hat{E}_0^ψ и \hat{E}_I представлены выражениями (см. (2.18) и (2.29) в [1])

$$\hat{E}_0^\psi = \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left\{ \psi^\dagger h_0 \frac{\delta}{\delta \psi} + (h_0 \psi) \frac{\delta}{\delta \psi} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\hat{E}_I = \frac{G}{2} \int d\vec{x} \left\{ \psi^\dagger \beta \left(\varphi + \frac{i\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta \pi} \right) \frac{\delta}{\delta \psi} + \beta \left(\varphi - \frac{i\hbar}{2} \frac{\delta}{\delta \pi} \right) \psi \frac{\delta}{\delta \psi} \right\}, \quad (2.3)$$

здесь $h_0 = i\hbar \vec{\alpha} \nabla + \beta m_0$. (2.4)

Энергетический спектр определяется уравнением

$$\hat{E} f[\psi, \psi^\dagger, \varphi, \pi] = E f[\psi, \psi^\dagger, \varphi, \pi], \quad (2.5a)$$

$$\int \psi \psi^\dagger \psi \psi^\dagger \psi \psi^\dagger \psi \psi^\dagger \pi f[\psi, \psi^\dagger, \varphi, \pi] = 1. \quad (2.5b)$$

Как сказано выше, для квантового солитона $\hat{E}[\varphi, \pi]$ можно разложить в окрестности $\varphi_{k\lambda}$. Учитывая этот факт, для определения спектра энергий можно использовать следующую процедуру:

а) Рассмотрим уравнение (2.5) в пределе при $\hbar \rightarrow 0$. Тогда получим оператор \hat{E}_0^ψ фермиона, взаимодействующего с классическим полем $\varphi_{k\lambda}$. Определим его спектр. Это приближение нулевого порядка.

б) Разложим оператор \hat{E} (2.1) в окрестности $\varphi_{k\lambda}$ и применим теорию возмущений. При этом в качестве невозмущенного оператора принимаем сумму операторов $(\hat{E}_0^\psi + \hat{E}_0^\varphi)$, в которой оставлены члены до $(\varphi - \varphi_{k\lambda})^2$, и оператора \hat{E}_I , в котором оставлен член нулевого порядка.

Тогда получим

$$\hat{E} = \hat{E}_0 + \hat{E}_I, \quad (2.6)$$

где $\hat{E}_0 = V[\varphi_{k\lambda}] + \hat{E}^{(2)}[\varphi - \varphi_{k\lambda}, \pi] + \hat{E}_0^\psi[\psi, \psi^\dagger, \varphi_{k\lambda}]$, (2.7)

$$\hat{E}_I = \int d\vec{x} \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{U^{(n)}(\varphi_{k\lambda})}{n!} (\varphi - \varphi_{k\lambda})^n + \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{2n} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n U^{(n)}(\varphi_{k\lambda} + (\varphi - \varphi_{k\lambda}))}{n!} \left(\frac{\delta}{\delta \pi} \right)^{2n} \right\}. \quad (2.8)$$

Здесь $V[\varphi_{k\lambda}]$ и $\hat{E}^{(2)}$ заданы в (1.20) и (1.21),

$$\hat{E}_0^\psi = \int d\vec{x} \left[\psi^\dagger (h_0 + \beta G \varphi_{k\lambda}) \frac{\delta}{\delta \psi} + (h_0 + \beta G \varphi_{k\lambda}) \psi \frac{\delta}{\delta \psi} \right]. \quad (2.9)$$

В результате для энергетического спектра имеем

$$E = E_0^\psi + E_0^\varphi + \langle E_I \rangle + \dots, \quad (2.10)$$

где E_0^ψ задан в (1.32); E_0^φ - собственные значения оператора \hat{E}_0^φ (2.9) и $\langle E_I \rangle$ - среднее от оператора \hat{E}_I по собственным функционалам операторов (2.9) и (1.31).

В заключение отметим, что это является непертурбативной теорией возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В фазовом пространстве разложение в окрестности классических полей естественно следует из структуры оператора \hat{E} , который в пределе при $\hbar \rightarrow 0$ переходит в классический гамильтониан.

Для калибровочного поля удобно работать в аксиальной калибровке, т.к. в этом случае каноническое квантование самое простое и, следовательно, \hat{E} можно получить непосредственно. После построения гамильтониана в фазовом пространстве дальнейшая процедура становится очевидной и следует логике, изложенной выше.

Авторы благодарят проф. Б.М. Барбашова и В.В. Нестеренко за полезные и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Ам Гир, Мальцев В.М. Сообщение ОИЯИ P2-88-297, Дубна, 1988.
2. Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A. Phys.Rev., 1974, D10, 4114; Dashen R.F., Ma S.K., Rajaraman R. Phys.Rev., 1975, D11, 1499.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 мая 1988 года.

Ли Ам Гир, Мальцев В.М.

P2-88-298

Уравнения для двухвременной матрицы плотности.

Приближенные решения в окрестности
классического решения

Исследуются уравнения квантовой теории поля в фазовом пространстве. Введение двухвременной матрицы плотности позволяет в замкнутом виде сформулировать квантовую теорию поля в фазовом пространстве. Получено разложение гамильтониана в фазовом пространстве в окрестности классического поля. Это дает возможность находить приближенные решения в окрестности классического решения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Lee Am Gil, Maltsev V.M.

P2-88-298

Equations for Two-Dimensional Density Matrix.
Approximate Solutions in the Vicinity
of the Classical Solution

Equations of quantum field theory in the phase space have some advantages in comparison with the usual formulation. In this case one deals not with the amplitude but with the probability density (more precisely, with the Wigner distribution). Moreover, in the limit $\hbar \rightarrow 0$ the quantum Hamiltonian in the phase transforms into the classical one. This makes it possible to find approximate solutions in the vicinity of the classical solution.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988