сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-88-297

Ли Ам Гир, В.М.Мальцев

ДВУХВРЕМЕННАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И ЕЕ УРАВНЕНИЯ. СКАЛЯРНОЕ И ФЕРМИОННОЕ ПОЛЕ

1988

ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов, формулирующих квантовую теорию поля в фазовом пространстве, является метод, в котором записывают уравнение Неймана для матрицы плотности ("одновременной") в координатном представлении и, вводя функцию распределения Вигнера, получают уравнение Вигнера - Лиувилля /1/. Для того чтобы уравнение Вигнера - Лиувилля было эквивалентно уравнению Шредингера, необходимо иметь дополнительное условие /1,2/; которому удовлетворяет "чистое" состояние. На практике, однако, трудно решить уравнение Вигнера - Лиувилля с этим нелинейным условием.

Более удовлетворительным методом для описания квантовой теории поля в фазовом пространстве является введение двухвременной матрицы плотности. Она удовлетворяет системе уравнений, что позволяет сформулировать теорию в замкнутом виде.

Далее, в п.1,мы определим двухвременную матрицу плотности и найдем уравнения, которым она удовлетворяет. В п.2 будут рассмотрены уравнения в фазовом пространстве для скалярного и фермионного полей. Итоги работы сформулированы в заключении. Приложение посвящено квантовомеханической системе в фазовом пространстве.

1. ДВУХВРЕМЕННАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

Рассмотрим систему, состояние которой $|\Psi(t)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \qquad (1.1)$$

где $\hat{H}$ - гамильтониан квантового поля в картине Шредингера. Определим двухвременную матрицу плотности

$$\hat{\rho}(t_1,t_2) = |\Psi(t_1)\rangle\langle\Psi(t_2)|, \qquad (1.2)$$

где $|\Psi(t)\rangle$ нормировано условием

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1. \tag{I.3}$$

Тогда $\hat{\rho}(t_1, t_2)$ обладает свойством оператора эволюции

$$\hat{\rho}(t_1, t_2)\hat{\rho}(t_2, t_3) = \hat{\rho}(t_1, t_3). \tag{I.4}$$

Найдем уравнения, удовлетворяющие $\hat{\rho}(t_1, t_2)$. Из уравнений (I.I) и (I.2) получим

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{\rho}(t_1, t_2) = \hat{H} \hat{\rho}(t_1, t_2), \tag{I.5а}$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} \hat{\rho}(t_1, t_2) = \hat{\rho}(t_1, t_2) \hat{H}. \tag{I.5б}$$

Сумма и разность уравнений (I.5а), (I.5б) дают

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2}\right) \hat{\rho}(t_1, t_2) = \hat{H}\hat{\rho}(t_1, t_2) + \hat{\rho}(t_1, t_2)\hat{H} \equiv \{\hat{H}, \hat{\rho}(t_1, t_2)\}, \tag{I.6а}$$

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) \hat{\rho}(t_1, t_2) = \hat{H}\hat{\rho}(t_1, t_2) - \hat{\rho}(t_1, t_2)\hat{H} \equiv [\hat{H}, \hat{\rho}(t_1, t_2)]. \tag{I.6б}$$

Вводя t - "среднее" и T - "относительное" время

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad T = t_1 - t_2, \tag{I.7}$$

запишем (I.6) в виде

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \hat{\rho}(t, T) = \frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{\rho}(t, T)\}, \tag{I.8а}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t, T) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t, T)\}, \tag{I.8б}$$

где

$$\hat{\rho}(t_1, t_2) = \hat{\rho}(t; T) = \hat{\rho}\left(t + \frac{T}{2}, t - \frac{T}{2}\right). \tag{I.9}$$

Заметим, что $\hat{\rho}(t;0) \equiv \hat{\rho}(t)$ совпадает с обычным определением одновременной матрицы плотности, которая удовлетворяет известному уравнению Неймана

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t;0) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t;0)]. \tag{I.10}$$

Используя аналог преобразования Вигнера [3], определим оператор распределения $\hat{f}(t,\varepsilon)$ (матрицу плотности в "фазовом пространстве" время-энергия $\{t,\varepsilon\}$):

$$\hat{f}(t,\varepsilon) \equiv \int \frac{dT}{(2\pi\hbar)} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T} \hat{\rho}\left(t + \frac{T}{2}, t - \frac{T}{2}\right). \tag{I.11}$$

Легко видеть, что

$$\int d\varepsilon \, \hat{f}(t,\varepsilon) \equiv \hat{\rho}(t).$$

Из (I.6) следует, что $\hat{f}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\varepsilon \hat{f}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{f}(t,\varepsilon)\}, \tag{I.12а}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(t,\varepsilon) = [\hat{H}, \hat{f}(t,\varepsilon)]. \tag{I.12б}$$

По определению плотности вероятности $\hat{f}(t,\varepsilon)$ должен удовлетворять условию

$$\mathrm{Tr} \int d\varepsilon \, \hat{f}(t,\varepsilon) = 1. \tag{I.13}$$

Если гамильтониан явно зависит от времени, то система уравнений (I.12) имеет вид

$$\varepsilon \hat{f}(t,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\left[\hat{H}\left(t + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)\hat{f}(t,\varepsilon) + \hat{f}(t,\varepsilon)\hat{H}\left(t - \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \varepsilon}}\right)\right], \tag{I.14а}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(t,\varepsilon) = \hat{H}\left(t + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)\hat{f}(t,\varepsilon) - \hat{f}(t,\varepsilon)\hat{H}\left(t - \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \varepsilon}}\right), \tag{I.14б}$$

где символ "←" означает, что оператор действует справа налево.

Решим уравнение (I.12) в стационарном случае. Из (I.12б) следует, что

$$\hat{f}(t,\varepsilon) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{f}(\varepsilon) \, e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}. \tag{I.15}$$

Подставляя (I.I5) в (I.I2а), получим

$$\varepsilon \hat{f}(\varepsilon) = \frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{f}(\varepsilon)\}. \tag{I.I6}$$

Из (I.I3), принимая во внимание (I.I5), находим условие

$$\mathrm{Tr}\int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon) = 1. \tag{I.I7}$$

Проинтегрируем уравнение (I.I6) по ε. В итоге имеем уравнение, которое определяет среднюю энергию системы:

$$\bar{E}\hat{f} = \frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{f}\}, \tag{I.I8}$$

где $$\hat{f} = \int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon), \tag{I.I9}$$

$$\bar{E} = \mathrm{Tr}\int d\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \hat{f}(\varepsilon), \tag{I.20}$$

$\bar{E}$ - средняя энергия системы (см. п.2). Из условий (I.I7) и (I.I9) следует

$$\mathrm{Tr}\,\hat{f} = 1. \tag{I.2I}$$

Таким образом, в случае стационарного состояния задача сводится к решению уравнения (I.I8) с условием (I.2I).

Теперь пусть вместо (I.I7) задано условие

$$\int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon) = I, \tag{I.22}$$

где I - единичный оператор. Из (I.I5) и (I.I9) видим, что

$$\int d\varepsilon\, \hat{f}(t,\varepsilon) = \int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon) = \hat{f} = I. \tag{I.23}$$

Следовательно, уравнение (I.I2б) является тривиальным и уравнением системы является (I.I6). Тогда решение (I.I6) есть оператор $\hat{f}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \hat{H})$, который является преобразованием оператора эволюции

$$\hat{U}(T) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T}, \quad T = t_1 - t_2. \tag{I.24}$$

Если снова вернуться к переменной T, то (I.I6) можно записать в вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial T}\hat{\rho}(T) = \frac{1}{2}\{\hat{H}, \hat{\rho}(T)\}, \tag{I.25}$$

где $\hat{\rho}(T) = \int d\varepsilon\, e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon T}\hat{f}(\varepsilon)$; $\hat{\rho}(0) = \hat{f} = I$.

Как мы и ожидали, решением (I.25) является (I.24).

Следовательно, двухвременная матрица плотности $\hat{\rho}(t_1, t_2)$ (или $\hat{f}(t,\varepsilon)$) содержит и вероятностную, и эволюционную информацию. Конкретное содержание определяется условием (I.I7) либо (I.22).

Другими словами, если мы хотим описывать уравнениями (I.I2) статистическое поведение системы, то надо задать условие (I.I3); но для формулировки квантовой теории поля в фазовом пространстве нужно взять условие (I.22).

2. УРАВНЕНИЯ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Перепишем уравнения (I.I2), (I.I3) в релятивистском фазовом пространстве. В квантовой механике - это пространство /4/ $(t, \vec{x}, \varepsilon, \vec{p})$; в квантовой теории поля - это пространство $(t, \varphi(\vec{x}), \varepsilon, \pi(\vec{x}))$ для скалярного поля и пространство $(t, \psi(\vec{x}), \varepsilon, \psi^+(\vec{x}))$ для фермионного поля. Переход удобно выполнить, используя φ - и ψ - представления /I/, которые являются координатным представлением для соответствующего поля.

Для скалярного поля φ - представление определено соотношениями

$$\hat{\varphi}(\vec{x})|\varphi\rangle = \varphi(\vec{x})|\varphi\rangle, \quad \hat{\pi}(\vec{x})|\varphi\rangle = i\hbar\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})}|\varphi\rangle$$

$$\langle\varphi'|\varphi''\rangle = \delta[\varphi' - \varphi''], \quad \int \mathcal{D}\varphi(\vec{x})|\varphi\rangle\langle\varphi| = I, \tag{2.I}$$

где

$$|\varphi\rangle = \prod_{\vec{x}}|\varphi(\vec{x})\rangle, \quad \delta[\varphi' - \varphi''] = \int \mathcal{D}\pi(\vec{x})\, e^{\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\varphi'(\vec{x}) - \varphi''(\vec{x}))\pi(\vec{x})},$$

$$\mathcal{D}\pi(\vec{x}) = \prod_{\vec{x}}\frac{d\pi(x)}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Для фермионного поля ψ - представление задано условиями

$$\hat\psi(\vec x)|\psi\rangle=\psi(\vec x)|\psi\rangle,\quad \langle\bar\psi|\hat\psi^+(\vec x)=\langle\bar\psi|\psi^+(\vec x),$$

$$\hat\psi^+(\vec x)|\psi\rangle=\frac{\delta}{\delta\psi(\vec x)}|\psi\rangle,\quad \langle\bar\psi|\hat\psi(\vec x)=-\frac{\delta}{\delta\psi^+(\vec x)}\langle\bar\psi|,$$

$$\langle\bar\psi|\psi\rangle=e^{\int d\vec x\,\psi^+(\vec x)\psi(\vec x)},\quad \int\mathcal D\psi(\vec x)\mathcal D\psi^+(\vec x)|\psi\rangle\langle\bar\psi|=I, \qquad (2.2)$$

$$\mathcal D\psi(\vec x)\mathcal D\psi^+(\vec x)=\prod_{\vec x} d\psi(\vec x)\,d\psi^+(\vec x)\,e^{-\int d\vec x\,\psi^+(\vec x)\psi(\vec x)},$$

$$|\psi\rangle=\prod_{\vec x}|\psi(\vec x)\rangle,\quad \delta[\psi'-\psi'']=\int\prod_{\vec x}d\psi^+(\vec x)\,e^{\int d\vec x\,\psi^+(\vec x)(\psi'(\vec x)-\psi''(\vec x))},$$

$$\delta[\psi^{+\prime}-\psi^{+\prime\prime}]=\int\prod_{\vec x}d\psi(\vec x)\,e^{-\int d\vec x\,(\psi^{+\prime}(\vec x)-\psi^{+\prime\prime}(\vec x))\psi(\vec x)},$$

где ψ^+, ψ - грассмановские переменные.

а) Скалярное поле

Известно, что гамильтониан скалярного поля в картине Шредингера можно записать в виде

$$H_{кл}=\int d\vec x\left\{\frac12\pi^2(\vec x)+\frac12\varphi(\vec x)(-\nabla^2+\mu^2)\varphi(\vec x)+U(\varphi(\vec x))\right\}, \qquad (2.3)$$

где

$$[\varphi(\vec x),\pi(\vec x')]=i\hbar\,\delta(\vec x-\vec x').$$

Возьмем в этом случае матричные элементы от (I.I2) между состояниями $|\varphi'\rangle$ и $|\varphi''\rangle$. Тогда для функционального распределения Вигнера в релятивистском фазовом пространстве

$$f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon)=\int\mathcal D u(\vec x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec x\,\pi(\vec x)u(\vec x)}\langle\varphi+\tfrac u2|\hat f(t,\varepsilon)|\varphi-\tfrac u2\rangle, \qquad (2.4)$$

где $\langle\varphi'|\hat f(t,\varepsilon)|\varphi''\rangle=\prod_{\vec x}\langle\varphi'(\vec x)|\hat f(t,\varepsilon)|\varphi''(\vec x)\rangle$; $|\varphi'\rangle=|\varphi+\frac u2\rangle$, $|\varphi''\rangle=|\varphi-\frac u2\rangle$, в случае скалярного поля имеем систему уравнений

$$\varepsilon f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon)=\hat E f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon), \qquad (2.5а)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon)=\hat L f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon). \qquad (2.5б)$$

Здесь (2.5б) есть уравнение Вигнера - Лиувилля для скалярного поля[5], а (2.5а) для того же поля-новое уравнение. В системе (2.5) $\hat L$ - лиувиллиан

$$\hat L=\int d\vec x\left\{-\pi\frac{\delta}{\delta\varphi}+(-\nabla^2+\mu^2)\varphi\frac{\delta}{\delta\pi}+\frac{1}{i\hbar}(U_+-U_-)\right\};\quad U_\pm=U\left(\varphi\pm\frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right), \qquad (2.6)$$

а $\hat E$ можем назвать "гамильтонианом в фазовом пространстве":

$$\hat E=\int d\vec x\left\{\frac{\pi^2}{2}+\frac12\varphi(-\nabla^2+\mu^2)\varphi+\frac12(U_++U_-)-\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left[\frac12\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}+\frac{\delta}{\delta\pi}(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\delta}{\delta\pi}\right]\right\}. \qquad (2.7)$$

В системе (2.5) функциональное распределение Вигнера должно обладать условием нормировки (за счет (I.I3))

$$\int d\varepsilon\int\mathcal D\varphi\,\mathcal D\pi\cdot f([\varphi],[\pi],t,\varepsilon)=1. \qquad (2.8)$$

Формально операторы $\hat L$ и $\hat E$ можно записать следующим образом (индексы H и f означают действие соответственно на $H_{кл}$ и f, где $H_{кл}$ - классический гамильтониан скалярного поля (2.3)):

$$\hat L=\frac2\hbar\sin\left(\frac\hbar2\int d\vec x\left[\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)^H\left(\frac{\delta}{\delta\pi}\right)^f-\left(\frac{\delta}{\delta\pi}\right)^H\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)^f\right]\right)\cdot H_{кл}, \qquad (2.9а)$$

$$\hat E=\cos\left(\frac\hbar2\int d\vec x\left[\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)^H\left(\frac{\delta}{\delta\pi}\right)^f+\left(\frac{\delta}{\delta\pi}\right)^H\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)^f\right]\right)H_{кл}. \qquad (2.9б)$$

Отметим, что (2.9) выражает процедуру квантования в фазовом пространстве. В пределе $\hbar\to0$ из (2.9б) следует, что $\hat E\to H_{кл}$. Аналогичный результат получим, если разложим $\hat E$ в фазовом пространстве в формальный ряд по степеням $\left(\frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right)$:

$$\hat{E} = H_{кл} - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \int d\vec{x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\pi} \left(-\nabla^2 + \mu^2 + U''(\varphi)\right) \frac{\delta}{\delta\pi} \right\} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)^n \int \frac{U^{(2n)}(\varphi)}{(2n)!} \left(\frac{\delta}{\delta\pi}\right)^{2n} d\vec{x}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда $U(\varphi) = \frac{\lambda}{2}\varphi^2(\vec{x})$, тогда из (2.10) имеем

$$\hat{E}[\varphi,\pi] = \int d\vec{x} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\varphi\left(-\nabla^2 + \mu^2 + \lambda\right)\varphi - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\delta}{\delta\pi}\left(-\nabla^2 + \mu^2 + \lambda\right)\frac{\delta}{\delta\pi} \right] \right\}. \tag{2.11}$$

Уравнение, соответствующее (I.18):

$$\hat{E} f([\varphi],[\pi]) = E f([\varphi],[\pi]). \tag{2.12}$$

Распределение Вигнера для стационарного состояния (с учетом (I.19) и (2.4)) имеет вид

$$f([\varphi],[\pi]) = \int \mathcal{D}u(\vec{x})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}\, u(\vec{x})\pi(\vec{x})} \langle \varphi + \frac{u}{2} | \hat{f} | \varphi - \frac{u}{2} \rangle \tag{2.13}$$

и подчиняется условию

$$\int \mathcal{D}\varphi(\vec{x}) \mathcal{D}\pi(\vec{x}) f([\varphi],[\pi]) = 1. \tag{2.14}$$

Теперь рассмотрим условие (I.22). В фазовом пространстве (I.16) есть

$$\varepsilon f([\varphi],[\pi],\varepsilon) = \hat{E}[\varphi,\pi] f([\varphi],[\pi],\varepsilon), \tag{2.15а}$$

$$\int d\varepsilon \cdot f([\varphi],[\pi],\varepsilon) = 1 \;; \tag{2.15б}$$

а уравнение (I.25) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} f([\varphi],[\pi],T) = \hat{E}[\varphi,\pi] \cdot f([\varphi],[\pi],T), \tag{2.16а}$$

$$f([\varphi],[\pi],T)\Big|_{T=0} = 1. \tag{2.16б}$$

Решениями (2.15) и (2.16) являются соответственно

$$f([\varphi],[\pi],\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \hat{E}) \cdot 1 \tag{2.17}$$

и

$$f([\varphi],[\pi],T) = e^{-\frac{i}{\hbar}T\hat{E}} f([\varphi],[\pi],T=0) = e^{-\frac{i}{\hbar}T\hat{E}} \cdot 1. \tag{2.18}$$

Здесь $\hat{Q}\cdot 1$ означает, что оператор $\hat{Q}$ действует на число 1.

Докажем, что энергетический спектр системы определяется уравнением

$$\hat{E}[\varphi,\pi] f_n[\varphi,\pi] = E_n f_n[\varphi,\pi], \tag{2.19}$$

где

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi\, f_n[\varphi,\pi] = 1, \tag{2.19а}$$

$$\sum_n f_n[\varphi,\pi] = 1, \tag{2.19б}$$

n означает набор квантовых чисел. Условие (2.19б) выражает свойство проектирования оператора плотности (I.4) (в случае квантовой механики см. приложение).

Решением уравнения (I.16а) является

$$f([\varphi],[\pi],T) = \sum_n a_n e^{-\frac{i}{\hbar}E'T} f_n[\varphi,\pi], \tag{2.20}$$

где через E_n' обозначены собственные значения $\hat{E}$ для того, чтобы различить их со спектром E_n оператора $\hat{H}$.

Согласно условию (2.16б)

$$f([\varphi],[\pi],T)_{T=0} = \sum_n a_n f_n[\varphi,\pi] = 1.$$

Из (2.19б) следует $a_n = 1$, т.е. (2.20) имеет вид

$$f([\varphi],[\pi],T) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n'T} f_n[\varphi,\pi]. \tag{2.21}$$

Интегрируя по φ и π в (2.21) и учитывая (2.19а), получим

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi\, f([\varphi],[\pi],T) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n'T}. \tag{2.22}$$

С другой стороны, из-за (2.13) и (1.24) имеем

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}(T) = \int \mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\pi\, f([\varphi],[\pi],T) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n T}, \tag{2.23}$$

где E_n – собственные значения гамильтониана $\hat{H}$. Сравнивая (2.22) с (2.23), заключаем, что $E_n' = E_n$, т.е. уравнение (2.19) с условиями (2.19а) и (2.19б) дает точный энергетический спектр системы. Если условия (2.19б) не учитываем, то получаем "статистическое описание" скалярного поля.

Заметим, что условие (2.19б) эквивалентно

$$\int \mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\pi\,\left(f_n[\varphi,\pi]\right)^2 = 1. \tag{2.24}$$

Действительно, оператор $\hat{E}$ эрмитов, поэтому его собственные функции образуют полную систему. Если мы выбрали нормировку (2.19а), то соотношения ортогональности и полноты имеют вид

$$\int \mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\pi\, f_n[\varphi,\pi]\, f_m[\varphi,\pi] = N_n\,\delta_{nm}, \tag{2.25}$$

$$\sum_n \frac{1}{N_n} f_n[\varphi,\pi]\, f_n[\varphi',\pi'] = \delta[\varphi-\varphi']\,\delta[\pi-\pi']. \tag{2.26}$$

Интегрируя в (2.26) по φ', π', получим

$$\sum_n \frac{1}{N_n} f_n[\varphi,\pi] = 1. \tag{2.27}$$

Из этого соотношения видно, что (2.19б) имеет место тогда, когда N_n = 1. Откуда, учитывая (2.25), получим (2.24).

Здесь выполнено формальное рассмотрение, т.к. для функциональных собственных функций требуется более строгое определение и рассмотрение. Однако в случае квантовомеханической системы все эти рассуждения являются строгими (см. приложение).

б) <u>Фермионное поле</u>

Для фермионного поля, гамильтониан которого

$$\hat{H} = \int d\vec{x}\, \hat{\psi}^+(\vec{x})\, h_0(\vec{x})\, \hat{\psi}(\vec{x}), \tag{2.28}$$

где $h_0(\vec{x}) = -i\hbar\vec{\alpha}\nabla + \beta m$ ($\vec{\alpha}$, β – матрицы Дирака), система (1.12) переписывается в фазовом пространстве таким же образом, как в

предыдущем случае, с тем различием, что сейчас матричные элементы берутся между состояниями фермионного поля. Используя ψ -представление (2.2), можно записать систему (1.12) в представлении фазового пространства. В результате для $f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon) = \langle \bar{\psi} | \hat{f}(t,\varepsilon) | \psi \rangle$ имеем

$$\varepsilon f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon) = \hat{E} f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon), \tag{2.29а}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon) = \hat{L} f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon), \tag{2.29б}$$

где

$$\hat{L} = \frac{1}{i\hbar}\int d\vec{x} \left\{ \psi^+ h_0 \frac{\delta}{\delta\psi^+} - (h_0\psi)\frac{\delta}{\delta\psi} \right\} \text{ – лиувиллиан,} \tag{2.30}$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2}\int d\vec{x} \left\{ \psi^+ h_0 \frac{\delta}{\delta\psi^+} + (h_0\psi)\frac{\delta}{\delta\psi} \right\} \text{ – гамильтониан.} \tag{2.31}$$

Условие нормировки

$$\int d\varepsilon \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^+\, f([\psi],[\psi^+],t,\varepsilon) = 1, \tag{2.32}$$

где

$$\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^+ = \prod_{\vec{x}} d\psi(\vec{x})\,d\psi^+(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\,\psi^+(\vec{x})\psi(\vec{x})}. \tag{2.33}$$

Уравнения, соответствующие (1.16) или (1.25), имеют вид

$$\varepsilon f([\psi],[\psi^+],\varepsilon) = \hat{E}[\psi,\psi^+]\, f([\psi],[\psi^+],\varepsilon), \tag{2.34а}$$

$$\int d\varepsilon \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^+\, f([\psi],[\psi^+],\varepsilon) = 1 \tag{2.34б}$$

или

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial T} f([\psi],[\psi^+],T) = \hat{E}[\psi,\psi^+]\, f([\psi],[\psi^+],T), \tag{2.35а}$$

$$\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^+\, f([\psi],[\psi^+],T=0) = 1. \tag{2.35б}$$

Средняя энергия системы определяется уравнением (см. (1.18))

$$\hat{E} f[\psi,\psi^+] = \bar{E} f[\psi,\psi^+], \tag{2.36а}$$

$$\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\psi^+ f[\psi,\psi^+] = 1, \tag{2.36б}$$

где

$$f[\psi,\psi^+] = \int d\varepsilon\, f[\psi,\psi^+,\varepsilon] = \langle\bar{\Psi}|\int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon)|\Psi\rangle. \qquad (2.37)$$

Уравнения (2.29) и вытекающие из них уравнения (2.34) (или(2.35) и (2.36)) описывают статистическое поведение системы.

Теперь рассмотрим случай, в котором задано условие (I.22). Тогда согласно (I.25) и (2.2)

$$\int d\varepsilon\, f([\psi],[\psi^+],\varepsilon) = f([\psi],[\psi^+],T)\Big|_{T=0} = \langle\bar{\Psi}|\int d\varepsilon\, \hat{f}(\varepsilon)|\Psi\rangle =$$
$$= \langle\bar{\Psi}|\Psi\rangle = e^{\int d\vec{x}\, \psi^+(\vec{x})\psi(\vec{x})}. \qquad (2.38)$$

При этом условии уравнения (2.34) или (2.35) являются уравнениями спинорного поля в фазовом пространстве.

Энергетический спектр определяется системой уравнений

$$\hat{E} f_n[\psi,\psi^+] = E_n f_n[\psi,\psi^+], \qquad (2.39а)$$

$$\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^+ f_n[\psi,\psi^+] = 1. \qquad (2.39б)$$

Отметим, что в этом случае не нужно условие, аналогичное условию (2.I9б) или (2.24). Согласно определению (2.37), если (2.36б) удовлетворено, то условие, аналогичное условиям (2.I9б) или (2.24), автоматически удовлетворено.

Решение (2.39а), удовлетворяющее (2.39б), есть

$$f_n[\psi,\psi^+] = \prod_{i=1}^{N}\left\{\int d\vec{x}_i\, \phi^+(\vec{x}_i)\psi(\vec{x}_i) \int d\vec{x}_i'\, \psi^+(\vec{x}_i')\, \phi(\vec{x}_i')\right\}, \qquad (2.40)$$

где $\phi_n(\vec{x})$ - собственные функции уравнения Дирака

$$\hat{h}_0 \phi_n(\vec{x}_i) = \varepsilon_n \phi_n(\vec{x}_i). \qquad (2.4I)$$

в) <u>Взаимодействующее поле</u>

Продолжая рассмотрение, легко получить для любого взаимодействующего поля (в данном случае - фермионного) следующее правило образования операторов $\hat{L}$ и $\hat{E}$: сначала запишем $\hat{L}_1$ и $\hat{E}_1$ для фермиона, взаимодействующего с классическим полем, затем, подставляя в (2.9) вместо $H_{кл}$ полученные таким образом операторы, найдем окончательные выражения для $\hat{L}$ и $\hat{E}$.

Например, в случае взаимодействия фермиона со скалярным полем

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{i\hbar}\int d\vec{x}\left\{\psi^+ h\frac{\delta}{\delta\psi^+} - (h\psi)\frac{\delta}{\delta\psi}\right\} + H_{кл}, \qquad (2.42)$$

$$\hat{E}_1 = \frac{1}{2}\int d\vec{x}\left\{\psi^+ h\frac{\delta}{\delta\psi^+} + (h\psi)\frac{\delta}{\delta\psi}\right\} + H_{кл}, \qquad (2.43)$$

где $H_{кл}$ задан в (2.3), а

$$h = -i\hbar\vec{\alpha}\nabla + \beta(m + G\varphi). \qquad (2.44)$$

Теперь подставим (2.42) вместо $H_{кл}$ в (2.9а), а (2.43) вместо $H_{кл}$ в (2.9б). В результате получим

$$\hat{L} = \hat{L}_0^{\psi} + \hat{L}_0^{\varphi} + \hat{L}_I, \qquad (2.45)$$

$$\hat{E} = \hat{E}_0^{\psi} + \hat{E}_0^{\varphi} + \hat{E}_I, \qquad (2.46)$$

где $\hat{L}_0^{\psi}$, $\hat{E}_0^{\psi}$ заданы в (2.30), (2.3I); $\hat{L}_0^{\varphi}$, $\hat{E}_0^{\varphi}$ заданы в (2.6), (2.7) и

$$\hat{L}_I = G\frac{1}{i\hbar}\int d\vec{x}\left\{\psi^+\beta\left(\varphi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right)\frac{\delta}{\delta\psi^+} - \beta\left(\varphi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right)\psi\frac{\delta}{\delta\psi}\right\}, \qquad (2.47)$$

$$\hat{E}_I = G\frac{1}{2}\int d\vec{x}\left\{\psi^+\beta\left(\varphi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right)\frac{\delta}{\delta\psi^+} + \beta\left(\varphi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}\right)\psi\frac{\delta}{\delta\psi}\right\}. \qquad (2.48)$$

При этом соответствующие условия, которые рассмотрены выше, должны быть учтены.

Энергетический спектр системы определен уравнением

$$\hat{E} f_n[\psi,\psi^+,\varphi,\pi] = E_n f_n[\psi,\psi^+,\varphi,\pi] \qquad (2.49)$$

с условиями

$$\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^+ \mathcal{D}\varphi\, \mathcal{D}\pi\, f_n[\psi,\psi^+,\varphi,\pi] = 1, \qquad (2.50а)$$

$$\int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\psi^{+} \mathcal{D}\varphi\, \mathcal{D}\pi \left\{ f_n[\psi,\psi^{+},\varphi,\pi] \right\}^2 = 1. \qquad (2.50б)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный анализ показывает, что двухвременная матрица плотности позволяет в замкнутом виде сформулировать квантовую теорию поля в фазовом пространстве. Она содержит возможность определить энергетический спектр системы в фазовом пространстве. Дополнительно отметим, что до сих пор исходным пунктом квантовой статистической механики являлись уравнения Вигнера – Лиувилля (или Неймана). Мы думаем, что они должны быть заменены уравнениями (I.I2a), (I.I2б), не имеющими лишних классических решений, которыми обладает уравнение Вигнера – Лиувилля (например, в случае гармонического осциллятора /2/) и в которые входит релятивистское распределение Вигнера.

Авторы благодарят проф. Б.М. Барбашова и В.В. Нестеренко за полезные и стимулирующие обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ. КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для случая, не зависящего явно от времени гамильтониана, система уравнений (I.I2) имеет вид ($\hat{\rho}(t_1,t_2) = |\psi(t_1)\rangle\langle\psi(t_2)|$)

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,p,t,\varepsilon) = \hat{L} f(x,p,t,\varepsilon), \qquad (\text{П.I})$$

$$\varepsilon f(x,p,t,\varepsilon) = \hat{E} f(x,p,t,\varepsilon), \qquad (\text{П.2})$$

где

$$f(\vec{x},\vec{p},t,\varepsilon) = \int dT \int d\vec{u}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{u}} \langle \vec{x}+\tfrac{\vec{u}}{2} | \hat{\rho}(t+\tfrac{T}{2}, t-\tfrac{T}{2}) | \vec{x}-\tfrac{\vec{u}}{2} \rangle,$$

$$\hat{L} = \frac{2}{\hbar} \sin\left(\frac{\hbar}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{H}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{f} - \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{f}\right]\right) \cdot H_{кл}, \qquad (\text{П.3})$$

$$\hat{E} = \cos\left(\frac{\hbar}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{H}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{f} + \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{f}\right]\right) \cdot H_{кл}, \qquad (\text{П.4})$$

$$H_{кл} = \frac{p^2}{2m} + U(x). \qquad (\text{П.5})$$

Здесь $\hat{L}$ – квантовомеханический лиувиллиан (например, см. /2/), а $\hat{E}$ можно назвать "гамильтонианом в фазовом пространстве", т.к. в пределе $\hbar \to 0$ он становится классическим гамильтонианом.

Условие нормировки

$$\int d\varepsilon \int \frac{dx\, dp}{(2\pi\hbar)^3} f(x,p,t,\varepsilon) = 1. \qquad (\text{П.6})$$

Уравнéние, соответствующее уравнению (I.I8),

$$\hat{E}(x,p) f(x,p) = \bar{E} f(x,p), \qquad (\text{П.7})$$

$$\int dx\, dp\, f(x,p) = 1, \qquad (\text{П.8})$$

где

$$\bar{E} = \int d\varepsilon \int \frac{dx\, dp}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon \cdot f(x,p,\varepsilon). \qquad (\text{П.9})$$

Уравнения (П.I) и (П.2) с условием (П.6), которые применяются к многочастичным системам, описывают статистические свойства системы, а уравнение (П.7) с условием (П.8) описывает то же в стационарном случае.

Теперь для формулировки квантовой механики в фазовом пространстве рассмотрим условие (I.22).

Уравнения, соответствующие (2.I5) и (2.I6), есть

$$\hat{E}(\vec{x},\vec{p}) f(\vec{x},\vec{p},\varepsilon) = \varepsilon f(\vec{x},\vec{p},\varepsilon), \qquad (\text{П.I0})$$

$$\int d\varepsilon\, f(\vec{x},\vec{p},\varepsilon) = 1 \qquad (\text{П.II})$$

или

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} f(\vec{x},\vec{p},T) = \hat{E} f(\vec{x},\vec{p},T), \qquad (\text{П.I2})$$

$$f(\vec{x},\vec{p},0) = 1. \qquad (\text{П.I3})$$

Подобным образом, как (2.I9), получим уравнения, определяющие энергетический спектр системы

$$\hat{E}\, f_n(\vec{x},\vec{p}) = E_n\, f_n(\vec{x},\vec{p}), \qquad (\Pi.14)$$

$$\int \frac{d\vec{x}\,d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}\, f_n(\vec{x},\vec{p}) = 1, \qquad (\Pi.15a)$$

$$\sum_n f_n(\vec{x},\vec{p}) = 1. \qquad (\Pi.15б)$$

Здесь условие (П.I5б) эквивалентно соотношению

$$\int \frac{d\vec{x}\,d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \left[f_n(\vec{x},\vec{p}) \right]^2 = 1. \qquad (\Pi.16)$$

Действительно, оператор $\hat{E}$ эрмитов, поэтому его собственные функции образуют ортогональную и полную систему.

$$\int \frac{d\vec{x}\,d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}\, f_n(\vec{x},\vec{p})\, f_m(\vec{x},\vec{p}) = N_n\, \delta_{nm}, \qquad (\Pi.17)$$

$$\sum_n \frac{1}{N_n}\, f_n(\vec{x},\vec{p})\, f_n(\vec{x}',\vec{p}') = (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\delta(\vec{p}-\vec{p}'). \qquad (\Pi.18)$$

Интегрируя по $\vec{x}'$, $\vec{p}'$ в (П.I8) с учетом (П.I5а), получим

$$\sum_n \frac{1}{N_n}\, f_n(\vec{x},\vec{p}) = 1. \qquad (\Pi.19)$$

Сравнивая (П.I9) с (П.I5б), заключаем, что условие (П.I5б) одновременно с условием (П.I5а) требует $N_n =$ I. Таким образом, (П.I6) следует из (П.I7).

Пример. Гармонический осциллятор

Гамильтониан

$$\hat{E}(x,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2m}\partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\partial_p^2\right). \qquad (\Pi.20)$$

В пределе $\hbar \to 0$

$$\hat{E}(x,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = H_{кл}. \qquad (\Pi.21)$$

Спектр энергии легко определяется из уравнений (П.I4), (П.I5а), (П,I5б). Для этого в качестве переменной примем $H_{кл}$. Тогда

$$\hat{E}(x,p) \to \hat{E}(H_{кл}) = H_{кл} - \frac{\hbar\omega^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial H_{кл}} + H_{кл}\frac{\partial^2}{\partial H_{кл}^2}\right). \qquad (\Pi.22)$$

Он задает спектр

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (\Pi.23)$$

и имеет собственные функции

$$f_n(x,p) = f_n(H_{кл}(x,p)) = (-1)^n 2\, e^{-\frac{2}{\hbar\omega}H_{кл}(x,p)} \cdot L_n^0\left(\frac{4}{\hbar\omega}H_{кл}(x,p)\right), \qquad (\Pi.24)$$

где L_n^0 -полином Лагерра. Результат согласуется с /6/. Функции $f_n(x,p)$ удовлетворяют (П.I6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Ам Гир. Сообщение ОИЯИ Р2-87-687, Дубна, 1987.
2. Bekker G.A.(jr.). Phys.Rev., 1958, 109, 2198,
   Татарский В.И. УФН,1983, 139, 587.
3. Wigner E.P. Phys.Rev.,1932, 40, 749.
4. Filippov A.T. JINR, E2-87-659, Dubna, 1987.
5. Polubarinov I.V. JINR, E2-82-800, Dubna, 1982;
   E2-83-688, Dubna, 1983.
6. Takabayasi T. Prog.Theor.Phys. Kyoto, 1954, 11, 341;
   Braun Guither E. Physica, 1967, 33, 528.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 мая 1988 года.