объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Ч -

Р2-88-27

Н.А.Черников

# ПОГРУЖЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВО АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Направлено в Оргкомитет рабочего совещания
"Гравитация и электромагнетизм", Минск, 1987 г.

1988

Замечательного вида тензор энергии-импульса получил Папапетру[1], погрузив гравитационное поле в мире Минковского с метрикой

$$\gamma_{ab}\, dx^a dx^b = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (1)$$

По этому поводу он писал: "... Розен доказал[2], что эйнштейнову теорию гравитации можно интерпретировать без каких-либо изменений ее полевых уравнений как теорию гравитации в плоском пространстве, если только рассматривать тензор $g_{ab}$ просто как гравитационный потенциал и ввести метрический тензор $\gamma_{ab}$ плоского пространства независимо. Новая интерпретация имеет характерное математическое преимущество: все величины, бывшие псевдотензорами в общей теории относительности, и все псевдотензорные уравнения, как, например, закон сохранения энергии-импульса, становятся теперь тензорами и тензорными уравнениями"[1, с.11].

Это преимущество достигается за счет того, что разность кристоффелей для $g_{ab}$ и $\gamma_{ab}$ является тензором. Между тем в координатной карте, где тензор $\gamma_{ab}dx^a dx^b$ имеет вид (1), кристоффели для $\gamma_{ab}$ равны нулю. Следовательно, мы сохраним то же самое преимущество, если будем вводить не тензор (1), а нечто меньшее - всего лишь аффинную связность, коэффициенты которой в карте $x$, $y$, $z$, $t$ равны нулю. При этом метрика (1) как бы сдирается. Гравитационное же поле остается погруженным, но уже не в мир Минковского, а в четырехмерное аффинное пространство с аффинными координатами $x$, $y$, $z$, $t$.

Так в эйнштейновой теории гравитации родился новый геометрический объект - фоновая аффинная связность. Причиной рождения нового объекта стало открытие Эйнштейном псевдотензора гравитационного поля. Новый объект родился "в рубашке", каковой является метрика (1), и Эйнштейн признал его своим[3,4]. Как и подобает младенцу, новый объект родился в примитивном виде, без кривизны и кручения. Пора ему сбросить первородную рубашку и приобрести, если не кручение, то хотя бы кривизну.

Пока мы имеем дело только с уравнениями гравитационного поля, то можем обойтись введением только главного объекта - упомянутого выше тензора $g_{ab}$ - и производных от него объектов, как-то: обратного тензора $g^{ab}$, скалярной плотности $\epsilon = \sqrt{|g|}$, связности Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}) \tag{2}$$

и определяемого ею тензора кривизны

$$R^a_{mnb} = \partial_m \Gamma^a_{nb} - \partial_n \Gamma^a_{mb} + \Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb}. \tag{3}$$

С их помощью составляются свертка $R_{nb} = R^a_{anb}$, скаляр $R = g^{ab}R_{ab}$ и функционал Гильберта

$$H = \int R\,dV, \qquad dV = \epsilon \prod_k dx^k. \tag{4}$$

Вариация функционала Гильберта равна

$$\delta H = \int (R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn}) \delta g^{mn}\, dV. \tag{5}$$

Отсюда следуют уравнения гравитационного поля

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} = 0. \tag{6}$$

Подставляя в (5) производную Ли

$$\begin{aligned} \delta g^{mn} &= \xi^s \partial_s g^{mn} - g^{sn}\partial_s \xi^m - g^{ms}\partial_s \xi^n = \\ &= -g^{sn}\nabla_s \xi^m - g^{ms}\nabla_s \xi^n, \end{aligned} \tag{7}$$

получаем

$$\delta H = \int \xi^m [\nabla_s g^{sn} (2R_{mn} - R g_{mn})]\, dV \equiv 0. \tag{8}$$

Отсюда следуют свернутые тождества Бианки - Падова

$$\nabla_s g^{sn} G_{mn} = 0. \tag{9}$$

Когда же переходим к определению энергии гравитационного поля по Эйнштейну, то нам приходится вводить независимый от тензора $g_{ab}$ геометрический объект, и вот почему. Эту энергию Эйнштейн определил через псевдотензор /5, с. 205/

$$E^a_b = (-\Gamma^a_{mn} + \Gamma^s_{ms}\delta^a_n)\epsilon^{-1}\partial_b(\epsilon g^{mn}) - L\delta^a_b, \tag{10}$$

где $L$ - псевдоскаляр, равный

$$L = g^{mn}(\Gamma^a_{mb}\Gamma^b_{an} - \Gamma^a_{sa}\Gamma^s_{mn}). \tag{11}$$



При этом ему пришлось заменить общековариантный интеграл (4) на зависящий от выбора координат интеграл

$$E = \int L\,dV. \tag{12}$$

Тем самым он вступил в противоречие с собственным принципом:

"Согласно теории относительности, законы природы необходимо формулировать независимо от какого-либо конкретного выбора координат, так как системе координат ничто реально существующее не соответствует; о простоте закона можно судить только по его общековариантной формулировке" /6, с.113/ .

Пойти на такой шаг мог только очень решительный человек, наделенный могучей интуицией. Этот шаг оправдывают ссылкой на теорему Гаусса, поскольку

$$\epsilon(R - L) = \partial_s(\epsilon F^s), \tag{13}$$

где

$$F^s = g^{mn}\Gamma^s_{mn} - g^{sn}\Gamma^m_{mn}. \tag{14}$$

Но эту ссылку нельзя признать законной, так как компоненты (14) не составляют вектора. К тому же, как и (12), интеграл

$$I = \int \sum_s \partial_s(\epsilon F^s) \prod_k dx^k \tag{15}$$

зависит от выбора координат, поскольку $I = H - E$ (а равным образом потому, что компоненты (14) не составляют вектора).

Итак, мы встретились с тремя монстрами: псевдотензором $E^a_b$, псевдоскаляром $L$ и псевдовектором $F^s$. Считаясь с теоремой Гаусса, а также и с общим принципом Эйнштейна, мы должны либо вовсе отказаться от таких встреч, либо, как это ни странно, рассматривать их соответственно как тензор, скаляр и вектор. Для этого нужен еще один геометрический объект - аффинная связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$. Мы будем называть ее фоновой в отличие от главной связности (2). Там где в формулах (10), (11) и (14) стоит $\Gamma^a_{mn}$, мы будем ставить $\Gamma^a_{mn} - \check{\Gamma}^a_{mn}$. Так как разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \tag{16}$$

является тензором, то мы получим скаляр

$$\mathfrak{L} = g^{mn}(P^a_{mb}P^b_{an} - P^a_{sa}P^s_{mn}), \tag{17}$$

вектор

$$\mathcal{F}^s = g^{sn}P^m_{mn} - g^{mn}P^s_{mn} \qquad (18)$$

и тензор

$$\mathcal{E}^a_b = (P^a_{mn} - P^s_{ms}\,\delta^a_n)(\check\nabla_b - P^k_{bk})g^{mn} - \wp\,\delta^a_b\,. \qquad (19)$$

Здесь $\check\nabla_b$ означает ковариантную производную с фоновой связностью:

$$\check\nabla_b g^{mn} = \partial_b g^{mn} + \check\Gamma^m_{bs}\,g^{sn} + \check\Gamma^n_{bs}\,g^{sm}. \qquad (20)$$

В отличие от нее ковариантная производная с главной связностью

$$\nabla_b g^{mn} = \partial_b g^{mn} + \Gamma^m_{bs}\,g^{sn} + \Gamma^n_{bs}\,g^{sm} \qquad (21)$$

равна нулю. Поэтому, вычитая (21) из (20), получаем

$$\check\nabla_b g^{mn} = P^m_{bs}\,g^{sn} + P^n_{bs}\,g^{sm}. \qquad (22)$$

Вообще, располагая двумя связностями $\Gamma$ и $\check\Gamma$, для каждого тензорного поля $T$ можно брать ковариантные производные $\nabla T$ и $\check\nabla T$. Вторая получается из первой заменой символов $\nabla$ на $\check\nabla$, $\partial$ на $\nabla$ и связности (2) на тензор (16).

Дальше будем обозначать

$$(\check\nabla_b - P_b)g^{mn} = \Phi^{mn}_b\,, \qquad P_b = P^k_{bk}\,,\ \Phi^{ma}_a = g^{ab}P^m_{ab} = \Phi^m. \qquad (23)$$

Для любого векторного поля $T^s$ получаем

$$(\check\nabla_s - P_s)T^s = \nabla_s T^s = \epsilon^{-1}\partial_s(\epsilon\, T^s). \qquad (24)$$

Имеем

$$P^a_{mn} = \frac{1}{2}g^{ak}(\check\nabla_k g_{mn} - \check\nabla_m g_{kn} - \check\nabla_n g_{km}). \qquad (25)$$

Поэтому для тензора

$$G_{mn},\ G^m_n = g^{ms}G_{sn},\quad G^{ab} = g^{bs}G^a_s, \qquad (26)$$

входящего в левую часть уравнения (6), в силу (9) получаем

$$(\check\nabla_m - P_m)G^m_n = \nabla_m G^m_n - P^s_{mn}G^m_s = \frac{1}{2}G^{ab}\check\nabla_n g_{ab}\,. \qquad (27)$$



Далее, находим

$$g_{mn}\Phi^{mn}_s = (2-N)P_s\,, \qquad 2g_{ab}G^{ab} = (2-N)R, \qquad (28)$$

где $N$ - размерность пространственно-временного многообразия,и

$$(\check\nabla_s + P_s)g_{ab} = -g_{am}g_{bn}\Phi^{mn}_s\,. \qquad (29)$$

Поэтому

$$G^{ab}\check\nabla_n g_{ab} = -R_{ab}\Phi^{ab}_n\,. \qquad (30)$$

Рассмотрим теперь фоновый тензор кривизны

$$\check R^a_{mnb} = \partial_m\check\Gamma^a_{nb} - \partial_n\check\Gamma^a_{mb} + \check\Gamma^a_{ms}\check\Gamma^s_{nb} - \check\Gamma^a_{ns}\check\Gamma^s_{mb}\,. \qquad (31)$$

Он удовлетворяет следующим условиям симметрии

$$\check R^a_{mnb} + R^a_{nmb} = 0, \qquad \check R^a_{mnb} + \check R^a_{bmn} + \check R^a_{nbm} = 0. \qquad (32)$$

Для него справедливы тождества Бианки - Падова

$$\check\nabla_k\check R^a_{mnb} + \check\nabla_n\check R^a_{kmb} + \check\nabla_m\check R^a_{nkb} = 0. \qquad (33)$$

Сравнивая формулы (3) и (31), последовательно находим

$$\check R^a_{mnb} = R^a_{mnb} + \nabla_m P^a_{nb} - \nabla_n P^a_{mb} + P^a_{ms}P^s_{nb} - P^a_{ns}P^s_{mb}, \qquad (34)$$

$$\check R_{nb} = R_{nb} + \nabla_m P^m_{nb} - \nabla_n P_b + P_s P^s_{nb} - P^m_{ns}P^s_{mb}\,, \qquad (35)$$

$$R = \wp + g^{ab}\check R_{ab} + \nabla_s\mathcal{F}^s. \qquad (36)$$

Фоновая связность играет здесь роль системы отсчета. Когда $\check\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{mn}$ (так сказать, в собственной системе отсчета, связанной с гравитационным полем $g_{ab}$), величины (17), (18) и (19) равны нулю. Впервые аффинная связность как система отсчета была истолкована Эйнштейном:

"Теорию относительности можно рассматривать как итог борьбы с фундаментальным представлением физики Галилея и Ньютона, а именно, представлением об "инерциальной системе"./7, с.796/ .

"Общая теория относительности впервые уничтожила инерциальную систему, заменив ее "полем смещений". /Там же/.

"Наиболее ясно общую теорию относительности можно охарактеризовать как теорию, которая обходится без введения "инерциальной системы координат". Первым, кто ясно увидел, что может заменить инерциальную систему, был Леви-Чивита. Инерциальная система дает нам соотношение между векторами в любых двух точках на конечном расстоянии. "Поле смещений" ($\Gamma^a_{mn}$) дает нам инвариантным образом соотношение между векторами (и тензорами) в бесконечно близких точках и поэтому является инвариантом, заменяющим инерциальную систему" /8, с.835/ .

Как видно, Эйнштейн рассматривал здесь случай системы отсчета, связанной с полем $g_{ab}$. При этом он допускал, что может быть $g_{ba} \neq g_{ab}$ , $\Gamma^a_{nm} \neq \Gamma^a_{mn}$ .

Теперь рассмотрим функционал

$$\mathcal{E} = \int \mathfrak{L}\, dV, \tag{37}$$

зависящий как от главного тензора $g^{ab}$, так и от фоновой связности $\breve{\Gamma}^a_{mn}$. Его вариация равна

$$\delta\epsilon = \int(\theta^{mn}_a \,\delta\breve{\Gamma}^a_{mn} + S_{mn}\,\delta g^{mn})\,dV, \tag{38}$$

где

$$\theta^{mn}_a = \Phi^{mn}_a - \frac{1}{2}(\Phi^m \delta^n_a + \Phi^n \delta^m_a), \tag{39}$$

$$S_{mn} = G_{mn} - \frac{1}{2}(\breve{R}_{mn} + \breve{R}_{nm}) + \frac{1}{2}\breve{R}_{ab} g^{ab} g_{mn} . \tag{40}$$

Подставляя в (38) производную Ли (7) и производную Ли от фоновой связности

$$\delta\breve{\Gamma}^a_{mn} = \partial_m\partial_n \xi^a + \xi^s\partial_s\breve{\Gamma}^s_{mn} + \breve{\Gamma}^a_{sn}\,\partial_m\xi^s + \breve{\Gamma}^a_{ms}\,\partial_n\xi^s - \breve{\Gamma}^s_{mn}\,\partial_s\xi^a = \breve{\nabla}_m\breve{\nabla}_n\xi^a + \xi^s\breve{R}^a_{smn}, \tag{41}$$

а также учитывая (9), получаем новое тождество

$$\theta_a = (\breve{\nabla}_m - P_m)(\breve{\nabla}_n - P_n)\theta^{mn}_a + \breve{R}^s_{amn}\,\theta^{mn}_s \equiv \equiv \nabla_m[g^{ms}(\breve{R}_{sa} + \breve{R}_{as}) - \delta^m_a g^{ns}\breve{R}_{ns}] . \tag{42}$$

Прямым способом это тождество доказано в /9/ .

Полагая $P^a_{mn} = 0$ , из (42) получаем (9), так что (9) является частным случаем нового тождества.

Полагая $\breve{R}^s_{amn} = 0$, рассматриваем гравитационное поле на фоне аффинного пространства, и тождество (42) принимает вид

$$(\breve{\nabla}_m - P_m)(\breve{\nabla}_n - P_n)\theta^{mn}_a = 0. \tag{43}$$

Вводя фоновую метрику $\breve{g}_{ab}$, выражаем связность $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ в виде кристоффелей. В результате получаем

$$\theta_a = (\breve{\nabla}_n - P_n)g_{am}\theta^{mn}, \tag{44}$$

где

$$\theta^{mn} = (\breve{\nabla}_k - P_k)(\breve{\nabla}_\ell - P_\ell)S^{\ell kmn}, \tag{45}$$

$$S^{\ell kmn} = \breve{g}^{m\ell} g^{kn} + \breve{g}^{n\ell} g^{km} - \breve{g}^{\ell k} g^{mn} - \breve{g}^{mn} g^{\ell k} . \tag{46}$$

Тождество (42) принимает следующий частный вид

$$(\breve{\nabla}_n - P_n)\breve{g}_{am}\theta^{mn} = \nabla_m(2g^{ms}\breve{R}_{sa} - \delta^m_a g^{ns}\breve{R}_{ns}). \tag{47}$$

Тензор Фока и Ландау - Лифшица на фоне примитивной аффинной связности рассмотрен в /10/.

ЛИТЕРАТУРА


1. Papapetru A. Einstein's Theory of Gravitation and Flat Space. Proc.Roy. Irish Acad., 1948,A52, p.11-23.
2. Rosen N. General Relativity and Flat Space. Phys. Rev., 1940, v. 57, p.147-153.
3. Эйнштейн А. Демонстрация гравитационных полей с неисчезающей массой, свободной от сингулярностей (1941). Собр. науч. трудов т.2, М.: Наука, 1966, с.555-559.
4. Эйнштейн А., Паули В. Несуществование регулярных стационарных решений релятивистских уравнений поля (1943). См./3/ , с.560-567.
5. Эйнштейн А., Громмер Я. Общая теория относительности и закон движения (1927). См./3/ , с.198-222.
6. Эйнштейн А. Замечание к работе Франца Селеди "К космической системе". См./3/, с.112-114.
7. Эйнштейн А. Обобщение теории тяготения (1953). См./3/ , с.762-796.

8. Эйнштейн А., Кауфман Б. Новая форма уравнений поля в общей теории относительности. См.[3], с.835-848.
9. Черников Н.А. Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру. Сообщения ОИЯИ Р2-87-683, Дубна, 1987.
10. Черников Н.А. Трудные вопросы теории относительности. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1987, т.18, вып. 5, с. 1000-1034.



Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1988 года.





Черников Н.А. Р2-88-27
Погружение гравитационного поля
в пространство аффинной связности без кручения

Выяснен точный математический смысл псевдотензора энергии-импульса в общей теории относительности: этот геометрический объект является тензорным функционалом фоновой связности. В таком качестве аффинная связность впервые была рассмотрена в 1940 году Н.Розеном, погрузившим гравитационное поле в мир Минковского. Фоновая связность тогда выступала, таким образом, в примитивном виде: она не имела ни кривизны, ни кручения. Теперь же фоновая связность принимает произвольную кривизну, так что гравитационное поле погружается в произвольное пространство аффинной связности без кручения. От функции действия берется вариационная производная как по главному метрическому тензору, так и по фоновой связности. В результате получается новое тождество, простым частным случаем которого является известное тождество для тензора Эйнштейна. Если теперь фоновую связность считать кристоффелевой, то в обобщенном виде получаются известные результаты Папапетру. Приравнивая нулю вариационную производную по главному тензору, узнаем, как выглядят уравнения гравитационного поля на фоне аффинной связности без кручения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988


Перевод Т.Ю.Думбрайс


Chernikov N.A. P2-88-27
Imbedding of the Gravitational Field into the Space
of Affine Connection without Torsion

Mathematical meaning of the energy-momentum pseudotensor is exactly determined in the general relativity: this geometrical object is a tensor functional of the background connection. Affine connection of that type was first considered in 1940 by Rosen who imbedded the gravitational field into the Minkowski world. The background connection then appeared in a primitive form: it had neither curvature, nor torsion. In our case the background connection acquires an arbitrary curvature so that the gravitational field is imbedded into an arbitrary space of the affine connection without torsion. Variational derivative of the action function is taken both with respect to the basic metric tensor and the background connection. The result is a new identity whose particular case is the known identity for the Einstein tensor. If the backgorund connection is considered Christoffel, the known Papapetrou results follow in a generalized form. If now we equate the variational derivative with respect to the basic tensor, to zero, we obtain the form of equations for the gravitational field on the background of affine connection without torsion.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988