ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2-88-232

В.К.Мельников

ЗАХВАТ И УДЕРЖАНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал
"Communications in Mathematical Physics"

1988

Настоящая работа посвящена проблеме захвата и удержания солитонов в нелинейных интегрируемых системах. Говоря точнее, речь идет о следующем явлении. У рассматриваемых ниже нелинейных интегрируемых систем найдены решения, описывающие солитон, который приходит из бесконечности, а затем захватывается в условно-периодический колебательный режим и находится в этом состоянии во все последующие моменты времени. У этих систем существуют также решения, описывающие солитон, который совершал условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и солитон уходит в бесконечность. Далее, найдены решения, описывающие солитон, который приходит из бесконечности, затем происходит распад этого солитона на два солитона, один из которых захватывается в условно-периодический колебательный режим, а второй солитон уходит в бесконечность. Совершая в этих решениях обращение времени, мы получаем новые решения, описывающие приходящий из бесконечности солитон, который сталкивается с другим солитоном, находившимся в режиме условно-периодического колебательного движения; в результате столкновения происходит слияние этих двух солитонов в один солитон, а затем образовавшийся после слияния солитон уходит в бесконечность.

Для начала мы будем исходить из следующей системы уравнений:

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial v}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial x'}\left(3v^2+\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}+8\varkappa|\psi|^2\right)\right]=0, \qquad (I)$$

$$ic_0\frac{\partial\psi}{\partial t'}+ic_1\frac{\partial\psi}{\partial x'}+i\frac{\partial\psi}{\partial y'}=v\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}+c_2\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}+c_3|\psi|^2\psi,$$

описывающей взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x', y' под углом друг к другу. Здесь v – амплитуда длинной волны, ψ – комплексная огибающая пакета коротких волн, параметры $c_0 \neq 0$, c_1, c_2, c_3 принимают произвольные вещественные значения, а $\varkappa^2 = 1$. Будем искать решение этой системы в следующем виде:

$$v(x',y',t')=\varepsilon^2 u(\varepsilon x',\varepsilon^2 y',\varepsilon^3 t'), \qquad (2)$$

$$\psi(x',y',t')=\varepsilon^2\varphi(\varepsilon x',\varepsilon^2 y',\varepsilon^3 t')\exp[i\sigma(x'-\tau t')],$$

где

$$\sigma=\frac{c_1}{2},\quad \tau=\frac{c_1}{2c_0}.$$

Подставляя эти выражения в систему (I), немедленно получаем уравнения вида

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varkappa|\varphi|^2\right)\right]=0, \qquad (3)$$

$$i\varepsilon c_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\varepsilon^2 c_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\varepsilon^2 c_3|\varphi|^2\varphi,$$

где $x=\varepsilon x'$, $y=\varepsilon^2 y'$, $t=\varepsilon^3 t'$. Естественно ожидать, что при малых $\varepsilon \neq 0$ к исследованию системы (3) могут быть применены идеи теории возмущений. Это замечание объясняет важность исследования решений системы

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varkappa|\varphi|^2\right)\right]=0, \qquad (4)$$

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

получающейся из (3) при $\varepsilon=0$.

Как известно[1,2], для исследования системы (4) применим метод обратной задачи рассеяния, с помощью которого удалось обнаружить чрезвычайно богатую динамику солитонных решений этой системы[3]. Ниже будут приведены новые результаты, полученные в этом направлении.

Прежде всего, система (4) обладает солитонными решениями вида

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)]}, \qquad (5)$$

$$\varphi=A\,\frac{\exp[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y]}{ch[\mu(x+2\nu y-\tau t)]}\exp(i\sigma t),$$

где вещественные параметры μ, ν, τ и комплексная величина A удовлетворяют единственному условию

$$\tau = 4(\mu^2 - 3\nu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2), \tag{6}$$

а параметр σ принимает произвольные вещественные значения. При $A = 0$ солитон (5) вырождается в хорошо известное односолитонное решение /4/

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu x + 2\mu\nu y - 4(\mu^2 - 3\nu^2)\mu t]}, \quad \varphi = 0 \tag{7}$$

уравнения Кадомцева-Петвиашвили /5/. Далее, при $A \neq 0$ и $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa > 0$ согласно (6) имеем $\varkappa\tau > 0$, т.е. в этом случае солитоны (5) могут распространяться только в одном направлении при любом значении величины A и фиксированных значениях параметров μ, ν. Однако если $A \neq 0$, а $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa < 0$, то фазовая скорость τ солитона (5) может принимать значения обоих знаков. Таким образом, в этом случае в зависимости от значения величины A солитоны (5) могут распространяться в двух прямо противоположных направлениях. Более того, при $|A| = [-\varkappa\mu^2(\mu^2 - 3\nu^2)]^{1/2}$ имеем $\tau = 0$, т.е. солитон (5) покоится. Ниже мы рассмотрим взаимодействие $N > 1$ солитонов (5), у которых параметры μ и ν взяты одинаковыми, а параметры $\tau = \tau_m$ все разные, $m = 1, \dots, N$. Оказывается, что в этом случае полученное с помощью метода обратной задачи рассеяния N-солитонное решение системы (4) описывает эволюцию солитона (5) с наибольшим значением величины $\mu\tau_m$ в солитон с наименьшим значением этой величины. При этом в случае $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa > 0$ направление движения исходного солитона обязательно совпадает с направлением движения конечного солитона. Однако при $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa < 0$ направление движения исходного солитона может быть прямо противоположным направлению движения конечного солитона. Таким образом, в этом случае указанное выше решение может описывать отражение солитона (5). Далее, мы покажем, что $N > 1$ солитонов (5) с одинаковыми значениями параметров μ, ν, τ, но с разными значениями параметров $\sigma = \sigma_m$, образуют уединенную волну вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\nu y - \tau t - f)]}, \tag{8}$$

$$\varphi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y]}{ch[\mu(x + 2\nu y - \tau t - f)]}\exp(i\sigma t),$$

где f и A — 2π-периодические функции переменных $\theta_{m,n} = (\sigma_m - \sigma_n)t$, $m, n = 1, \dots, N$, удовлетворяющие единственному условию

$$\frac{df}{dt} + \tau = 4(\mu^2 - 3\nu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2), \tag{9}$$

а частота σ равна одной из величин σ_m. Отсюда следует, что величина τ в этом случае удовлетворяет условию

$$\tau = 4(\mu^2 - 3\nu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A_0|^2), \tag{10}$$

где

$$|A_0|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |A(t)|^2\,dt. \tag{11}$$

Таким образом, движение волны (8) слагается из равномерного поступательного движения и условно-периодического колебательного движения. При этом u-волна сохраняет свою форму, а амплитуда φ-волны меняется со временем как некоторая условно-периодическая функция t. При $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa < 0$ возможен случай с $\tau = 0$. В этой ситуации решение (8) описывает волну, которая как целое совершает условно-периодическое колебательное движение. Согласно (9)-(11) в этом случае должны выполняться соотношения $|A_0| = [-\varkappa\mu^2(\mu^2 - 3\nu^2)]^{1/2}$, $|A(t)| \not\equiv |A_0|$. Нами найдены решения системы (4), которые описывают эволюцию солитона (5) в уединенную волну (8), или наоборот — эволюцию уединенной волны (8) в солитон (5). В частном случае эти решения описывают либо солитон (5), который приходит из бесконечности, а затем захватывается в условно-периодический колебательный режим, либо волну (8), которая совершала условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв, и волна уходит в бесконечность в виде солитона (5).

Наконец, отметим, что при $\varkappa = 1$ система (4) допускает решение вида

$$u = \frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\nu y - \tau t)]}, \tag{12}$$

$$\varphi = A\,\frac{sh[\mu(x + 2\nu y - \tau t)]}{ch^2[\mu(x + 2\nu y - \tau t)]}\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y + i\sigma t],$$

где вещественные параметры μ, ν, τ и комплексная величина A удовлетворяют условиям

$$\tau = 16\mu^2 - 12\nu^2, \quad |A| = 3\mu^2,$$

а при $\varkappa = -1$ система (4) обладает решением

$$u = \frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y - \tau t)]}, \tag{I3}$$

$$\varphi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(4\mu^2-\nu^2)y]}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)]}\exp(i\sigma t),$$

где вещественные параметры μ, ν, τ и комплексная величина A удовлетворяют условиям

$$\tau = 4(\mu^2 - 3\nu^2), \quad |A| = 3\mu^2.$$

Нами найдены решения системы (4), описывающие распады волн (I2) и (I3) на солитон (7) и волну (8), а также решения, описывающие слияние солитона (7) и волны (8) в одну волну (I2) или (I3). При этом в случае $(\mu^2 - 3\nu^2)\varkappa < 0$ участвующая в этих процессах волна (8) может иметь $\tau = 0$, т.е. находиться в условно-периодическом колебательном режиме.

§I. Специальный случай многосолитонного решения системы (4)

Пусть N – произвольное целое число, удовлетворяющее условию $N > 1$. Возьмем вектор-столбец λ с $N+1$ компонентами λ_m вида

$$\lambda_m = \begin{cases} a_m \exp[\omega_1 x - i\omega_1^2 y - 4(\omega_1^3 + \bar\rho_m^3)t], & \text{если } m = 1,\dots,N, \\ a_m \exp[\omega_2 x - i\omega_2^2 y - 4(\omega_2^3 + \bar\rho_m^3)t], & \text{если } m = N+1, \end{cases} \tag{I.I}$$

где $a_m \neq 0$ и ρ_m – комплексные параметры, а величины ω_1 и ω_2 допускают представление

$$\omega_1 = \mu_1 + i\nu, \quad \omega_2 = \mu_2 + i\nu \tag{I.2}$$

с вещественными μ_1, μ_2 и ν. Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Пусть, далее, P и Q – квадратные матрицы порядка $N+1$ соответственно с элементами

$$P_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu_1}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m,n = 1,\dots,N, \\ \dfrac{1}{\mu_1+\mu_2}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m = N+1, \text{ а } n = 1,\dots,N, \\ & \text{или } m = 1,\dots,N, \text{ а } n = N+1, \\ \dfrac{1}{2\mu_2}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m = n = N+1, \end{cases} \tag{I.3}$$

$$Q_{m,n} = \frac{\varkappa}{\rho_m^3 + \bar\rho_n^3}, \quad m,n = 1,\dots,N+1.$$

Положим

$$D = \det\begin{vmatrix} 1 & -Q \\ P & 1 \end{vmatrix}, \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde e \\ 0 & 1 & -Q \\ \lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \tag{I.4}$$

где 1 – единичная матрица порядка $N+1$, а e – вектор-столбец с $N+1$ компонентами e_m, равными единице. Здесь и всюду в дальнейшем знак "$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Согласно результатам работы [2] функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \tag{I.5}$$

удовлетворяют системе (4), т.е. являются ее решением.

Полученные выражения для многосолитонного решения системы (4) могут быть существенно упрощены. Прежде всего в силу (I.4) справедливы равенства

$$D = \det(1 + PQ), \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde e \\ \lambda & 1 + PQ \end{vmatrix}. \tag{I.6}$$

Возьмем теперь диагональную матрицу $\Lambda = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_{N+1})$. С учетом (I.3) получаем

$$\Lambda e = \lambda, \quad \Lambda^{-1} P \bar\Lambda^{-1} = \frac{1}{2\mu_1}U, \quad \bar\Lambda Q \Lambda = 2\mu_1 R, \tag{I.7}$$

где U и R – квадратные матрицы порядка $N+1$ соответственно с элементами

$$U_{m,n}=\begin{cases} 1, \text{если} \quad m,n=1,\dots,N, \\ \dfrac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}, \text{если} \quad m=N+1, \text{ а } \quad n=1,\dots,N, \\ \qquad \text{или} \quad m=1,\dots,N, \text{ а } n=N+1, \\ \mu_1\mu_2^{-1}, \text{ если} \quad m=n=N+1, \end{cases}$$

$$R_{m,n}=\frac{\varkappa\bar{\lambda}_m\lambda_n}{2(\rho_m^3+\bar{\rho}_n^3)\mu_1}, \quad m,n=1,\dots,N+1. \tag{I.8}$$

На основе (I.6) и (I.7) отсюда вытекают равенства

$$D=\det(1+UR), \quad \Phi=\det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{\lambda} \\ e & 1+UR \end{vmatrix}. \tag{I.9}$$

Пусть теперь H_0 – ортогональная матрица порядка N с элементами $H_{m,n}$, такими, что $H_{N,n}=N^{-1/2}$, $n=1,\dots,N$. Очевидно, что остальные элементы этой матрицы удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{N} H_{m,n}=0, \quad \text{если} \quad 1\le m<N. \tag{I.10}$$

Положим

$$H=\begin{vmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{I.11}$$

Далее, пусть $V_{m,n}$ и $S_{m,n}$ – элементы матриц

$$V=HU\tilde{H}, \quad S=HR\tilde{H}$$

соответственно. С помощью (I.8), (I.10) и (I.11) нетрудно убедиться, что все элементы матрицы V равны нулю, кроме элементов

$$V_{N,N}=N, \quad V_{N,N+1}=V_{N+1,N}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}N^{1/2}, \quad V_{N+1,N+1}=\frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{I.12}$$

а аналогичные элементы матрицы S равны

$$S_{N,N}=N^{-1}\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}, \quad S_{N,N+1}=N^{-1/2}\sum_{m=1}^{N}R_{m,N+1}, \tag{I.13}$$

$$S_{N+1,N}=N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}R_{N+1,n}, \quad S_{N+1,N+1}=R_{N+1,N+1}:$$

В соответствии с (I.9) имеем

$$D=\det(1+VS), \quad \Phi=\det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{h} \\ He & 1+VS \end{vmatrix}, \tag{I.14}$$

где $h=H\lambda$ – вектор-столбец с компонентами $h_1,\dots,h_{N+1}$, причем

$$h_N=N^{-1/2}\sum_{m=1}^{N}\lambda_m, \quad h_{N+1}=\lambda_{N+1}, \tag{I.15}$$

а компоненты вектора He соответственно равны $0,\dots,0,N^{1/2},1$. Отсюда согласно (I.12)-(I.15) следуют равенства

$$D=\det\begin{vmatrix} 1+W_{1,1} & W_{1,2} \\ W_{2,1} & 1+W_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Phi=\det\begin{vmatrix} 0 & h_N & h_{N+1} \\ N^{1/2} & 1+W_{1,1} & W_{1,2} \\ 1 & W_{2,1} & 1+W_{2,2} \end{vmatrix},$$

где

$$W_{1,1}=\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}+\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{n=1}^{N}R_{N+1,n},$$

$$W_{1,2}=N^{1/2}\sum_{m=1}^{N}R_{m,N+1}+\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}N^{1/2}R_{N+1,N+1},$$

$$W_{2,1}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}N^{-1/2}\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}+\frac{\mu_1}{\mu_2}N^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}R_{N+1,n},$$

$$W_{2,2}=\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{m=1}^{N}R_{m,N+1}+\frac{\mu_1}{\mu_2}R_{N+1,N+1}.$$

На их основе получаем

$$D=1+\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}+\frac{\mu_1}{\mu_2}R_{N+1,N+1}+$$

$$+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2} R_{N+1,N+1}\sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} +$$

$$+\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\left(\sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1}+\sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n}\right) - \qquad (I.16)$$

$$-\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2}\sum_{m,n=1}^{N} R_{m,N+1}R_{N+1,n},$$

$$\Phi=-\left\{1-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n}-\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}\sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n}\right\}\lambda_{N+1}-$$

$$-\left\{1+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1}+\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}R_{N+1,N+1}\right\}\sum_{m=1}^{N}\lambda_m . \qquad (I.17)$$

Положим теперь

$$\rho_m^3=\begin{cases}-\bar\omega_1^3+\frac{1}{4}(\mu_1\tau_m+i\sigma_m), \text{если} & m=1,\dots,N,\\ -\bar\omega_2^3+\frac{1}{4}(\mu_2\tau_m+i\sigma_m) \text{ если} & m=N+1,\end{cases} \qquad (I.18)$$

где σ_m и τ_m – вещественные параметры. В результате компоненты λ_m вектора-столбца λ допускают представление

$$\lambda_m=\begin{cases}\zeta_m\exp[\mu_1(x+2\nu y-\tau_m t)], \text{ если} & m=1,\dots,N,\\ \zeta_m\exp[\mu_2(x+2\nu y-\tau_m t)], \text{ если} & m=N+1,\end{cases} \qquad (I.19)$$

где согласно (I.I), (I.2) и (I.I8) компоненты ζ_m вектора-столбца ζ имеют вид

$$\zeta_m=\begin{cases}a_m\exp[i\nu x-i(\mu_1^2-\nu^2)y+i\sigma_m t], \text{ если} & m=1,\dots,N,\\ a_m\exp[i\nu x-i(\mu_2^2-\nu^2)y+i\sigma_m t], \text{ если} & m=N+1.\end{cases} \qquad (I.20)$$

Далее, на основе (I.8), (I.I8) и (I.I9) находим, что при $m=1,\dots,N$ справедливы равенства

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar\zeta_m\zeta_n\exp[2\mu_1(x+2\nu y)-(\tau_m+\tau_n)\mu_1 t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu_1^2+24\nu^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}, \qquad (I.21)$$

$$R_{m,N+1}=\frac{2\varkappa\bar\zeta_m\zeta_{N+1}\exp[(\mu_1+\mu_2)(x+2\nu y)-(\mu_1\tau_m+\mu_2\tau_{N+1})t]}{[(\tau_m-4\mu_1^2+12\nu^2)\mu_1^2+(\tau_{N+1}-4\mu_2^2+12\nu^2)\mu_1\mu_2+i\gamma_m]}, \qquad (I.22)$$

$$R_{N+1,n}=\frac{2\varkappa\zeta_n\bar\zeta_{N+1}\exp[(\mu_1+\mu_2)(x+2\nu y)-(\mu_1\tau_n+\mu_2\tau_{N+1})t]}{[(\tau_n-4\mu_1^2+12\nu^2)\mu_1^2+(\tau_{N+1}-4\mu_2^2+12\nu^2)\mu_1\mu_2-i\gamma_n]},$$

где

$$\gamma_m=(\sigma_m-\sigma_{N+1})\mu_1+12(\mu_1^2-\mu_2^2)\mu_1\nu, \quad m=1,\dots,N, \qquad (I.23)$$

а при $m=n=N+1$ имеем

$$R_{N+1,N+1}=\frac{\varkappa|\zeta_{N+1}|^2\exp[2\mu_2(x+2\nu y-\tau_{N+1}t)]}{(\tau_{N+1}-4\mu_2^2+12\nu^2)\mu_1\mu_2}. \qquad (I.24)$$

§2. Захват и удержание солитонов в системе (4)

Прежде всего рассмотрим случай с $\mu_1=\mu_2=\mu$. В силу (I.16) и (I.I7) получаем, что в этом случае справедливы равенства

$$D=1+\sum_{m,n=1}^{N+1} R_{m,n}, \quad \Phi=-\sum_{m=1}^{N+1}\lambda_m, \qquad (2.1)$$

где согласно (I.I9)-(I.24) при $m,n=1,\dots,N+1$ имеем

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n\exp[2\mu(x+2\nu y)-(\tau_m+\tau_n)\mu t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2+24\nu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]}, \qquad (2.2)$$

$$\lambda_m=\eta_m\exp[\mu(x+2\nu y-\tau_m t)]\exp[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y],$$

$$\eta_m=a_m\exp(i\sigma_m t).$$

Выясним, каково поведение решения (I.5) системы (4) при таком выборе функций D и ϕ. С этой целью предположим, что величины $\alpha_m = \mu\tau_m + i\sigma_m$ все разные, $m=1,\dots,N+1$. Предположим далее, что при $m=1,\dots,N+1$ выполняется неравенство

$$(\tau_m - 4\mu^2 + 12\nu^2)\varkappa > 0 . \tag{2.3}$$

Очевидно, что функции D и ϕ допускают представление

$$D = 1 + K \exp[2\mu(x+2\nu y)], \tag{2.4}$$

$$\phi = L \exp[\mu(x+2\nu y)] \exp[i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y],$$

где в соответствии с (2.I) и (2.2) имеем

$$K = 2\varkappa \sum_{m,n=1}^{N+1} \frac{\bar{a}_m a_n \exp[-(\mu\tau_m+i\sigma_m)t]\exp[-(\mu\tau_n-i\sigma_n)t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2+24\nu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]}, \tag{2.5}$$

$$L = -\sum_{m=1}^{N+1} a_m \exp[-(\mu\tau_m - i\sigma_m)t],$$

и, следовательно, функции K и L зависят только от t. С учетом сделанных выше предположений получаем, что квадратичная форма K положительно определена. Это значит, что $K>0$ при любом вещественном значении t. С помощью (I.5) и (2.4) получаем, что интересующее нас решение имеет вид

$$u = \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x+2\nu y - f)]}, \tag{2.6}$$

$$\varphi = A\,\frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y]}{\mathrm{ch}[\mu(x+2\nu y - f)]},$$

где

$$f = -\frac{1}{2\mu}\ln K, \quad A = \frac{1}{2} L K^{-1/2}. \tag{2.7}$$

На основании (2.5) нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\mu\frac{dK}{dt} + 8(\mu^2-3\nu^2)\mu^2 K + 2\varkappa|L|^2 = 0 .$$

Отсюда следует, что определенные посредством (2.7) функции f и A удовлетворяют соотношению

$$\frac{df}{dt} = 4(\mu^2 - 3\nu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2). \tag{2.8}$$

Здесь необходимо отметить, что функции u и φ вида (2.6) всегда удовлетворяют системе (4), если входящие в (2.6) функции f и A удовлетворяют соотношению (2.8). Таким образом, беря произвольную комплексную функцию $A(t)$ и полагая

$$f = f_0 + 4\int_{t_0}^{t}(\mu^2 - 3\nu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A(\tau)|^2)\,d\tau ,$$

мы всегда получим решение системы (4) в виде (2.6). Однако не при любом выборе функции $A(t)$ это решение может быть получено из многосолитонного решения системы (4).

Выясним теперь, какова динамика решения (2.6) при указанном выше выборе функций f и A. С этой целью возьмем целые числа N_- и N_+, такие, что $1 \le N_- < N_+ \le N+1$, и предположим, что $\tau_1 = \dots = \tau_{N_-}$, а $\tau_{N_+} = \dots = \tau_{N+1}$. Предположим далее, что при $m = N_-+1,\dots,N+1$ справедливо неравенство

$$(\tau_1 - \tau_m)\mu > 0, \quad m = N_-+1,\dots,N+1, \tag{2.9}$$

а при $m=1,\dots,N_+-1$ справедливо неравенство

$$(\tau_m - \tau_{N+1})\mu > 0, \quad m=1,\dots,N_+-1. \tag{2.10}$$

Положим теперь

$$K_- = \sum_{m,n=1}^{N_-} \frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_n}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2+24\nu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]},$$

$$K_+ = \sum_{m,n=N_+}^{N+1} \frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_n}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2+24\nu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]}, \tag{2.11}$$

$$L_- = -\sum_{m=1}^{N_-}\eta_m, \quad L_+ = -\sum_{m=N_+}^{N+1}\eta_m, \quad \eta_m = a_m\exp(i\sigma_m t).$$

С помощью (2.9) и (2.10) нетрудно убедиться, что в этой ситуации интересующее нас решение (2.6) системы (4) при $t\to-\infty$ имеет асимптотику

$$u \sim \frac{2\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x+2\nu y - \tau_1 t - q_-)]}, \tag{2.12}$$

$$\varphi \sim A_- \frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y]}{ch[\mu(x+2\nu y-\tau_1 t - q_-)]},$$

где

$$q_- = -\frac{1}{2\mu}\ln K_- , \quad A_- = \frac{1}{2} L_- K_-^{-1/2}, \tag{2.13}$$

а при $t \to \infty$ это решение обладает асимптотикой

$$u \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau_{N+1} t - q_+)]}, \tag{2.14}$$

$$\varphi \sim A_+ \frac{\exp[i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y]}{ch[\mu(x+2\nu y-\tau_{N+1} t - q_+)]},$$

где

$$q_+ = -\frac{1}{2\mu}\ln K_+ , \quad A_+ = \frac{1}{2} L_+ K_+^{-1/2}. \tag{2.15}$$

Таким образом, полученное нами решение системы (4) описывает эволюцию волны (2.12) в волну (2.14). В общей картине этого явления необходимо выделить несколько важных частных случаев. Прежде всего при $N_- > 1$ и $N_+ < N+1$ решение (2.6) согласно (2.11)-(2.15) описывает эволюцию волны вида (8) в волну этого же вида. Далее, при $N_- = 1$ и $N_+ < N+1$ наше решение описывает эволюцию солитона (5) в волну вида (8), а при $N_- > 1$ и $N_+ = N+1$ это решение описывает эволюцию волны вида (8) в солитон (5). Наконец, при $N_- = 1$ и $N_+ = N+1$ найденное нами решение описывает эволюцию солитона (5) с наибольшим значением фазовой скорости в солитон с наименьшим значением фазовой скорости. Кроме того, заслуживает отдельного упоминания, что при $(\mu^2-3\nu^2)\varkappa < 0$ в соответствии с (2.3) возможны случаи как с $\tau_1 = 0$, так и с $\tau_{N+1} = 0$. В этой ситуации при $N_- = 1$, $N_+ < N+1$ и $\tau_{N+1} = 0$ интересующее нас решение системы (4) описывает захват солитона (5) в колебательный режим. Наоборот, если $\tau_1 = 0$, то при $N_- > 1$ и $N_+ = N+1$ рассматриваемое нами решение описывает волну вида (8), которая совершала колебательное движение, а затем произошел срыв, и волна уходит в бесконечность в виде солитона (5).

§3. Распад и слияние солитонов в системе (4)

Теперь мы в состоянии получить решения системы (4), описывающие распады волн (12) и (13) на солитон (7) и волну (8), а также решения, описывающие слияние солитона (7) и волны (8) в одну волну (12) или (13). С этой целью положим в равенствах (1.18)-(1.24)

$$a_{N+1} = \varepsilon a, \quad \tau_N = \tau_{N+1} = 4\mu_2^2 - 12\nu^2 + \varepsilon^2 \varkappa c \tag{3.1}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим, что при $m, n = 1, \dots, N-1$ справедливы равенства

$$R_{m,n} = \frac{2\varkappa \bar{\eta}_m \eta_n \exp[2\mu_1(x+2\nu y) - (\tau_m+\tau_n)\mu_1 t]}{[(\tau_m+\tau_n - 8\mu_1^2 + 24\nu^2)\mu_1^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu_1]}, \tag{3.2}$$

$$R_{m,N} = \frac{2\varkappa \bar{\eta}_m \eta_N \exp[2\mu_1(x+2\nu y) - (\tau_m + 4\mu_2^2 - 12\nu^2)\mu_1 t]}{[(\tau_m + 4\mu_2^2 - 8\mu_1^2 + 12\nu^2)\mu_1^2 + i(\sigma_m - \sigma_N)\mu_1]}, \tag{3.3}$$

$$R_{N,n} = \frac{2\varkappa \eta_n \bar{\eta}_N \exp[2\mu_1(x+2\nu y) - (\tau_n + 4\mu_2^2 - 12\nu^2)\mu_1 t]}{[(\tau_n + 4\mu_2^2 - 8\mu_1^2 + 12\nu^2)\mu_1^2 - i(\sigma_n - \sigma_N)\mu_1]},$$

где при $m = 1, \dots, N$ имеем

$$\eta_m = a_m \exp(i\sigma_m t). \tag{3.4}$$

Далее, справедливы равенства

$$R_{N,N} = \frac{\varkappa |a_N|^2 \exp[2\mu_1(x+2\nu y) - 2\mu_1(4\mu_2^2 - 12\nu^2)t]}{4(\mu_2^2 - \mu_1^2)\mu_1^2}, \tag{3.5}$$

$$R_{N+1,N+1} = \frac{|a|^2}{c\mu_1\mu_2} \exp[2\mu_2(x+2\nu y) - 2\mu_2(4\mu_2^2 - 12\nu^2)t].$$

Наконец, в силу (3.1) имеем $\lambda_{N+1} = 0$ и, следовательно, при любых $m, n = 1, \dots, N$ получаем $R_{m,N+1} = R_{N+1,n} = 0$.

С учетом этих равенств выражения (1.16) и (1.17) принимают вид

$$D = 1 + \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} + \frac{\mu_1}{\mu_2} R_{N+1,N+1} + \frac{(\mu_1-\mu_2)^2 \mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2 \mu_2} R_{N+1,N+1} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n}, \tag{3.6}$$

$$\Phi = -\left\{1 + \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2} R_{N+1,N+1}\right\} \exp[i\nu x - i(\mu_1^2-\nu^2)y] \sum_{m=1}^{N} \eta_m \exp[\mu_1(x+2\nu y-\tau_m t)]. \tag{3.7}$$

Выясним теперь, каково поведение решения (1.5) системы (4) при таком выборе функций D и Φ. Для этого предположим, что при $m=1,\dots,N$ справедливо неравенство

$$(\tau_m - 4\mu_1^2 + 12\nu^2)\varkappa > 0, \quad \tau_N = \tau_{N+1} = 4\mu_2^2 - 12\nu^2. \tag{3.8}$$

Предположим, далее, что выполняются условия

$$\mu_1\mu_2 > 0 \quad , \quad c > 0. \tag{3.9}$$

На основе этих неравенств в соответствии с (3.2)-(3.6) получаем, что при любых вещественных значениях координат x, y, t справедливо неравенство $D \geqslant 1$. Отсюда следует, что определенное посредством (I.5) решение системы (4) в этой ситуации не имеет особенностей при любых вещественных значениях независимых переменных x, y, t. Предположим, наконец, что при $m = 1, \ldots, N-1$ справедливо неравенство

$$(4\mu_2^2 - 12\nu^2 - \tau_m)\mu_1 > 0. \tag{3.10}$$

Возьмем теперь произвольное $\tau \in (-\infty, \infty)$ и положим $z = x + 2\nu y - \tau t$. Согласно (3.2), (3.3) и (3.5) выражения для ненулевых элементов $R_{m,n}$ матрицы R принимают вид

$$R_{m,n} = \frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n \exp[(2\tau - \tau_m - \tau_n)\mu_1 t]\exp(2\mu_1 z)}{[(\tau_m + \tau_n - 8\mu_1^2 + 24\nu^2)\mu_1^2 + i(\sigma_m - \sigma_n)\mu_1]}, \tag{3.11}$$

$$R_{m,N} = \frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_N \exp[(2\tau - \tau_m - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)\mu_1 t]}{[(\tau_m + 4\mu_2^2 - 8\mu_1^2 + 12\nu^2)\mu_1^2 + i(\sigma_m - \sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1 z),$$

$$R_{N,n} = \frac{2\varkappa\eta_n\bar\eta_N \exp[(2\tau - \tau_n - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)\mu_1 t]}{[(\tau_n + 4\mu_2^2 - 8\mu_1^2 + 12\nu^2)\mu_1^2 - i(\sigma_n - \sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1 z), \tag{3.12}$$

если $m, n = 1, \ldots, N-1$, а

$$R_{N,N} = \frac{\varkappa|a_N|^2\exp(2\mu_1 z)}{4(\mu_2^2 - \mu_1^2)\mu_1^2}\exp[2\mu_1(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)t],$$

$$R_{N+1,N+1} = \frac{|a|^2}{c\mu_1\mu_2}\exp(2\mu_2 z)\exp[2\mu_2(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)t]. \tag{3.13}$$

Предположим сначала, что величина τ выбрана так, что выполняется неравенство

$$(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)\mu_1 > 0. \tag{3.14}$$

Из этого неравенства на основании (3.10) вытекает неравенство $(\tau - \tau_m)\mu_1 > 0$, $m = 1, \ldots, N$. В силу (3.6), (3.7) и (3.11)-(3.13) отсюда следует, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ справедливы асимптотики $D \to 1$, $\phi \to 0$. С учетом (I.5) это значит, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ имеем $u \to 0$, $\varphi \to 0$. Таким образом, интересующее нас решение системы (4) при $t \to -\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей условию (3.14). Предположим, далее, что величина τ выбрана так, что выполняется неравенство

$$(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)\mu_1 < 0. \tag{3.15}$$

Тогда в соответствии с (3.6), (3.7) и (3.9)-(3.13) при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ выполняются асимптотики

$$D\exp[-2(\mu_1 + \mu_2)(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)t] \sim$$

$$\sim -\frac{\varkappa|a|^2|a_N|^2}{4c\,\mu_1^2\mu_2^2}\frac{\mu_1 - \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^3}\exp[2(\mu_1 + \mu_2)z],$$

$$\phi\exp[-2(\mu_1 + \mu_2)(\tau - 4\mu_2^2 + 12\nu^2)t] \to 0.$$

На основе (I.5) отсюда следует, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ имеют место соотношения $u \to 0$, $\varphi \to 0$. Таким образом, согласно (3.14) и (3.15) получаем, что рассматриваемое нами решение системы (4) при $t \to -\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью $\tau \neq 4\mu_2^2 - 12\nu^2$. Предположим, наконец, что $\tau = 4\mu_2^2 - 12\nu^2$. В этом случае на основании (3.6), (3.7) и (3.10)-(3.13) находим, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ справедливы асимптотики

$$D \sim 1 + R_{N,N} + \frac{\mu_1}{\mu_2}R_{N+1,N+1} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)^2\mu_2}R_{N,N}R_{N+1,N+1}, \tag{3.16}$$

$$\phi \sim -\left\{1 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_1}{(\mu_1 + \mu_2)\mu_2}R_{N+1,N+1}\right\}\exp[i\nu x - i(\mu_1^2 - \nu^2)y]\,\eta_N\exp(\mu_1 z),$$

причем

$$R_{N,N} = \frac{\varkappa|a_N|^2\exp(2\mu_1 z)}{4(\mu_2^2 - \mu_1^2)\mu_1^2}, \tag{3.17}$$

$$R_{N+1,N+1} = \frac{|a|^2}{c\mu_1\mu_2}\exp(2\mu_2 z).$$

Пусть $\varkappa = 1$. Положим $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 2\mu$. Тогда в силу (3.16) и (3.17) получаем, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ выполняются асимптотики

$$D \sim 1 + \alpha_1\exp(2\mu z) + \alpha_2\exp(4\mu z) + \alpha_3\exp(6\mu z), \tag{3.18}$$

$$\phi \sim -[1 - \tfrac{1}{3}\alpha_2\exp(4\mu z)]\,\eta_N\exp(\mu z)\exp[i\nu x - i(\mu^2 - \nu^2)y],$$

где

$$\alpha_1 = \frac{|a_N|^2}{12\mu^4}, \quad \alpha_2 = \frac{|a|^2}{4c\mu^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2. \tag{3.19}$$

Положим теперь

$$c = 108\,|a|^2\,|a_N|^{-4}\,\mu^6, \qquad (3.20)$$

т.е. выберем c так, чтобы выполнялось условие $3\alpha_2=\alpha_1^2$. В соответствии с (3.I8) и (3.I9) в этом случае при любом фиксированном z и $t\to-\infty$ имеют место асимптотики

$$D \sim \left[1+\tfrac{1}{3}\alpha_1\exp(2\mu z)\right]^3,$$

$$\phi \sim -\left[1-\tfrac{1}{9}\alpha_1^2\exp(4\mu z)\right]\eta_N\exp(\mu z)\exp\left[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y\right].$$

С учетом (I.5) отсюда следует, что при $\varkappa=1$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится единственная бегущая волна

$$u=\frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_-]}, \qquad (3.2I)$$

$$\varphi = A\,\frac{sh[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_-]}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_-]}\exp\left[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\sigma t\right],$$

где

$$\tau=16\mu^2-12\nu^2,\quad \delta_-=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1}{3}\right),\quad A=-\frac{a_N}{2}\exp(-\delta_-),\quad \sigma=\sigma_N .$$

На основе (3.I9) отсюда вытекает соотношение

$$|A|=3\mu^2. \qquad (3.22)$$

Рассмотрим теперь случай $\varkappa=-1$. Пусть $\mu_1=2\mu$, $\mu_2=\mu$. С помощью (3.I6) и (3.I7) получаем, что в этом случае при любом фиксированном z и $t\to-\infty$ справедливы асимптотики

$$D\sim 1+\alpha_1\exp(2\mu z)+\alpha_2\exp(4\mu z)+\alpha_3\exp(6\mu z), \qquad (3.23)$$

$$\phi\sim-\left[1+\tfrac{1}{3}\alpha_1\exp(2\mu z)\right]\eta_N\exp(2\mu z)\exp\left[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y\right],$$

где

$$\alpha_1=\frac{|a|^2}{c\mu^2},\quad \alpha_2=\frac{|a_N|^2}{48\mu^4},\quad \alpha_3=\frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2. \qquad (3.24)$$

Положим

$$c=4\,|a|^2\,|a_N|^{-1}, \qquad (3.25)$$

т.е. выберем c так, чтобы удовлетворить условию $\alpha_1=(3\alpha_2)^{1/2}$. Согласно (3.23) и (3.24) в этом случае при любом фиксированном z и $t\to-\infty$ имеют место асимптотики

$$D\sim\left[1+\left(\tfrac{1}{3}\alpha_2\right)^{1/2}\exp(2\mu z)\right]^3,$$

$$\phi\sim-\left[1+\left(\tfrac{1}{3}\alpha_2\right)^{1/2}\exp(2\mu z)\right]\eta_N\exp(2\mu z)\exp\left[i\nu x-i(4\mu^2-\nu^2)y\right].$$

На основании (I.5) отсюда следует, что при $\varkappa=-1$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится единственная бегущая волна

$$u=\frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_-]}, \qquad (3.26)$$

$$\varphi=A\,\frac{\exp[i\nu x-i(4\mu^2-\nu^2)y]}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_-]}\exp(i\sigma t),$$

где

$$\tau=4\mu^2-12\nu^2,\quad \delta_-=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_2}{3}\right),\quad A=-\frac{a_N}{4}\exp(-2\delta_-),\quad \sigma=\sigma_N .$$

В силу (3.24) отсюда вытекает справедливость соотношения (3.22).

Выясним теперь, какова динамика рассматриваемого здесь решения при $t\to\infty$. Мы будем считать для определенности, что существует целое число N_0, удовлетворяющее условию $0<N_0<N$, такое, что $\tau_1=\ldots=\tau_{N_0}$, а при $m=N_0+1,\ldots,N$ справедливо неравенство

$$(\tau_1-\tau_m)\mu_1<0,\quad m=N_0+1,\ldots,N. \qquad (3.27)$$

Пусть сначала величина τ выбрана так, что выполняется неравенство

$$(\tau-\tau_1)\mu_1<0. \qquad (3.28)$$

Из этого неравенства в соответствии с (3.27) следует неравенство $(\tau-\tau_m)\mu_1<0$, $m=1,\ldots,N$. На этой основе с помощью (3.6), (3.7) и (3.II)-(3.I3) получаем, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ справедливы асимптотики $D\to1$, $\phi\to0$. С учетом (I.5) это значит, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ выполняются асимптотики $u\to0$, $\varphi\to0$, т.е. интересующее нас решение системы (4) при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей неравенству (3.28). Далее, предположим снова, что величина τ выбрана с соблюдением условия (3.I4). Согласно (3.6), (3.7), (3.9)-(3.I3) и (3.27) получаем, что в этом случае при любом фиксированном z и $t\to\infty$ имеют место асимптотики

$$D\exp[-2(\mu_1+\mu_2)(\tau-4\mu_2^2+12\nu^2)t]\exp[-2\mu_1(4\mu_2^2-12\nu^2-\tau_1)t]\sim$$

$$\sim\frac{|a|^2(\mu_1-\mu_2)^2}{c\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)^2}K_0\exp[2(\mu_1+\mu_2)z],$$

$$\phi\exp[-2(\mu_1+\mu_2)(\tau-4\mu_2^2+12\nu^2)t]\exp[-2\mu_1(4\mu_2^2-12\nu^2-\tau_1)t]\to0,$$

где

$$K_0=\sum_{m,n=1}^{N_0}\frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n}{[2(\tau_1-4\mu_1^2+12\nu^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}. \qquad (3.29)$$

На основании этих асимптотик и равенств (I.5) легко находим, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ выполняются соотношения $u\to0$, $\varphi\to0$. Это значит, что рассматриваемое решение системы (4) при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью τ, удовлетворяющей неравенству (3.I4). Предположим, наконец, что величина τ выбрана так, что одновременно выполняются неравенства

$$(\tau-4\mu_2^2+12\nu^2)\mu_1<0,\quad(\tau-\tau_1)\mu_1>0. \qquad (3.30)$$

Тогда в силу (3.6), (3.7), (3.II)-(3.I3) и (3.27) получаем, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ имеем

$$D\exp[-2(\tau-\tau_1)\mu_1 t] \sim K_0 \exp(2\mu_1 z),$$
$$\Phi\exp[-2(\tau-\tau_1)\mu_1 t] \to 0,$$

где величина K_0 определена посредством равенства (3.29). Отсюда в соответствии с (I.5) следует, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ справедливы соотношения $u\to 0$, $\varphi\to 0$. Таким образом, на основе (3.I4), (3.28) и (3.30) убеждаемся, что рассматриваемое здесь решение системы (4) при $t\to\infty$ не содержит бегущих волн с фазовой скоростью, удовлетворяющей условию

$$(\tau-\tau_1)(\tau-4\mu_2^2+12\nu^2)\neq 0. \tag{3.3I}$$

С другой стороны, при $\tau=4\mu_2^2-12\nu^2$ с помощью равенств (3.II)-(3.I3) получаем представление

$$\sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} = K\exp(2\mu_1 z),$$

где величина K зависит только от t, и согласно (3.I0) имеем $K\to\infty$ при $t\to\infty$. Отсюда на основании (3.6) и (3.7) следует, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ имеем

$$DK^{-1}\exp(-2\mu_1 z) \sim 1+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2} R_{N+1,N+1},$$
$$\Phi K^{-1}\exp(-2\mu_1 z)\to 0.$$

Таким образом, полагая $\varkappa=1$, $\mu_1=\mu$, $\mu_2=2\mu$, с учетом (3.I3), (3.I9) и (3.20) легко находим, что при $t\to\infty$ в нашем решении присутствует бегущая волна вида

$$u=\frac{8\mu^2}{ch^2[2\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_+]},\quad \varphi=0, \tag{3.32}$$

где

$$\tau=16\mu^2-12\nu^2,\quad \delta_+=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1^2}{27}\right).$$

Далее, полагая $\varkappa=-1$, $\mu_1=2\mu$, $\mu_2=\mu$, в силу (3.I3), (3.24) и (3.25) получаем, что при $t\to\infty$ интересующее нас решение содержит бегущую волну вида

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta_+]},\quad \varphi=0, \tag{3.33}$$

где

$$\tau=4\mu^2-12\nu^2,\quad \delta_+=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_2}{27}\right).$$

Рассмотрим, наконец, случай $\tau=\tau_1$. На основе равенств (3.6), (3.7), (3.II)-(3.I3) и неравенства (3.27) получаем, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$D\sim 1+\sum_{m,n=1}^{N_0} R_{m,n}$$
$$\Phi\sim -\exp[i\nu x-i(\mu_1^2-\nu^2)y]\sum_{m=1}^{N_0}\eta_m\exp(\mu_1 z),$$

т.е.

$$D\sim 1+K_0\exp(2\mu_1 z),$$
$$\Phi\sim L_0\exp(\mu_1 z)\exp[i\nu x-i(\mu_1^2-\nu^2)y],$$

где величина K_0 определена посредством равенства (3.29), а

$$L_0=-\sum_{m=1}^{N_0}\eta_m. \tag{3.34}$$

Из равенств (3.29) и (3.34) следует, что функции K_0 и L_0 зависят только от t. Полагая $\varkappa=1$, $\mu_1=\mu$, с помощью (I.5) легко находим, что при $t\to\infty$ в рассматриваемом нами решении содержится вторая бегущая волна

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau_1 t-q_0)]},\quad \varphi=A_0\frac{\exp[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y]}{ch[\mu(x+2\nu y-\tau_1 t-q_0)]}, \tag{3.35}$$

где

$$q_0=-\frac{1}{2\mu}\ln K_0,\quad A_0=\frac{1}{2}L_0K_0^{-1/2}. \tag{3.36}$$

Согласно (3.29), (3.34) и (3.36) справедливо соотношение

$$\frac{dq_0}{dt}+\tau_1=4(\mu^2-3\nu^2+\varkappa\mu^{-2}|A_0|^2). \tag{3.37}$$

Далее, полагая $\varkappa=-1$, $\mu_1=2\mu$, в соответствии с (I.5) получаем, что при $t\to\infty$ в нашем решении присутствует вторая бегущая волна

$$u=\frac{8\mu^2}{ch^2[2\mu(x+2\nu y-\tau_1 t-q_0)]}, \tag{3.38}$$
$$\varphi=A_0\frac{\exp[i\nu x-i(4\mu^2-\nu^2)y]}{ch[2\mu(x+2\nu y-\tau_1 t-q_0)]},$$

где

$$q_0=-\frac{1}{4\mu}\ln K_0,\quad A_0=\frac{1}{2}L_0K_0^{-1/2}. \tag{3.39}$$

В силу (3.29), (3.34) и (3.39) имеем

$$\frac{dq_0}{dt}+\tau_1=16\mu^2-12\nu^2+\varkappa\mu^{-2}|A_0|^2. \tag{3.40}$$

С учетом условия (3.3I) убеждаемся, что нами получены все бегущие волны, содержащиеся в рассматриваемом здесь решении системы (4) при $t\to\infty$.

Таким образом, при $\varkappa=1$ наше решение описывает распад волны (3.2I) на солитон (3.32) и волну (3.35). Согласно (3.8) имеем $\tau_N=16\mu^2-12\nu^2$, а в силу (3.I0) выполняется неравенство $(16\mu^2-12\nu^2-\tau_1)\mu>0$. Наконец, с помощью (3.37) получаем, что $\tau_1>4\mu^2-12\nu^2$. Из этих неравенств следует, что при $\mu>0$ должно выполняться условие $4\mu^2-12\nu^2<\tau_1<16\mu^2-12\nu^2$, а при $\mu<0$ выполняется условие $\tau_1>16\mu^2-12\nu^2$. Если теперь в этом решении заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученное новое решение системы (4), очевидно, описывает слияние солитона (3.32) и волны (3.35) в одну волну (3.2I). Аналогичным образом при $\varkappa=-1$ найденное нами решение описывает распад волны (3.26) на солитон (3.33) и волну (3.38). В соответствии с (3.8) в этом случае имеем $\tau_{\varkappa}=4\mu^2-12\nu^2$, а в силу (3.10) должно выполняться неравенство $(4\mu^2-12\nu^2-\tau_1)\mu>0$. Наконец, на основе (3.40) получаем неравенство $\tau_1<16\mu^2-12\nu^2$. Отсюда следует, что при $\mu>0$ выполняется условие $\tau_1<4\mu^2-12\nu^2$, а при $\mu<0$ должно выполняться условие $4\mu^2-12\nu^2<\tau_1<16\mu^2-12\nu^2$. Если теперь в этом решении заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученное новое решение системы (4) описывает слияние солитона (3.33) и волны (3.38) в одну волну (3.26). Нелишне отметить, что при $\varkappa=1$ и $\mu^2-3\nu^2<0$ возможно равенство $\tau_1=0$. Следовательно, волна (3.35) совершает в этом случае колебательное движение в ограниченных пределах. Аналогичное явление возможно и при $\varkappa=-1$, если $4\mu^2-3\nu^2>0$.

В заключение необходимо отметить, что, полагая во всех формулах этой работы $\nu=0$, мы получим такие решения системы (4), что функция u не зависит от y , а функция φ допускает представление $\varphi=$ $=w\exp(-iEy)$, где функция w также не зависит от y, а E – некоторая константа. Отсюда следует, что функции u, w удовлетворяют системе уравнений /6/

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+8\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|w|^2=0, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+uw=Ew.$$

Таким образом, все сделанные выше утверждения относительно полученных здесь решений системы (4) с очевидными оговорками переносятся на решения системы (*).

Литература

1. Mel'nikov V.K. - Lett. Math.Phys., 1983, v. 7, N 2, p. 129-136.
2. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1987, v. 112, N 4, p. 639-652.
3. Mel'nikov V.K. - J.Math.Phys., 1987, v. 28, N 11, p. 2603-2609.
4. Satsuma Y. - J.Phys.Soc. Japan, 1976, v. 40, N 1, p. 286-290.
5. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. – ДАН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753-756.
6. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. - Physica D, 1986, v. 18D, N 1, p. 455-463.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 апреля 1988 года.