объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-217

В.И.Иноземцев

ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ЧАСТИЦ, ФАКТОРИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ИХ КВАНТОВЫХ АНАЛОГОВ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1988

Наиболее известным примером соответствия между классическими и квантовыми динамическими системами является правило Бора - Зоммерфельда для одномерного квазиклассического движения. Оно позволяет найти характеристики состояний с большими квантовыми числами без исследования решений уравнения Шредингера. Однако свойства основного состояния в общем случае нельзя определить по аналогии с классической механикой.

Для интегрируемых систем взаимодействующих частиц связь между классической и квантовой динамикой должна быть более глубокой в силу общей для них симметрии гамильтониана, имеющей теоретико-групповую основу. Основная цель данной работы - продемонстрировать существование подобной связи для найденных мной /1/ интегрируемых случаев одномерного движения произвольного числа частиц N, взаимодействующих между собой с потенциалом $V(\xi)$ и с внешним полем, определяемым потенциалом $W(\xi)$,

$$V(\xi) = g^2(\operatorname{sh}\xi)^{-2}, W(\xi) = 8g^2(2A^2\operatorname{ch}4\xi + B\operatorname{ch}2\xi + C\operatorname{sh}2\xi). \quad (\mathrm{I})$$

Параметры A,B,C в (I) в общем случае произвольны, как и постоянная $g > 0$. Случай $A = B = C = 0$ соответствует хорошо известным системам Сазерленда /2/.

В работе /3/ мы показали, что при условии

$$B = -Ag^{-1}(1 + \alpha(N-1)), \quad \alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{g^2 + 1/4} \quad (2)$$

волновая функция основного состояния квантовых систем (I) обладает свойством факторизации

$$\Psi(q_1, \dots q_N) \simeq \prod_{j>k}^{N} |\operatorname{sh}(q_j - q_k)|^{\alpha} \prod_{j=1}^{N} \exp\{-g(4A\operatorname{ch}(2q_j) + \frac{C}{A} q_j)\}. \quad (3)$$

Для энергии основного состояния было найдено простое выражение

$$\mathcal{E}_q = -\frac{N}{2}\left[\frac{\alpha^2}{3}(N^2 - 1) + \frac{C^2}{A^2}g^2 - 32A^2g^2\right] \quad (4)$$

(мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, по сравнению с /3/ для удобства несколько изменены обозначения параметров потенциалов взаимодействия). Если условие (2) не выполнено, факторизация не имеет места и энергия основного состояния зависит от A,B,C гораздо более сложным образом. Общее решение квантовой задачи в этом случае никем не найдено.

Какие свойства классических систем соответствуют (2)-(4)? Естественно предположить, что они также проявляются для состояний с минимальной энергией, т.е. классических точек равновесия, допускающих при условии, подобном (2), сравнительно простое описание. Ниже будет показано, что подобное соответствие действительно имеет место.

Хорошо известно, что существует связь между координатами частиц некоторых более простых, чем (I), систем в состоянии равновесия и нулями классических ортогональных полиномов, открытая Стилтьесом в прошлом веке. Она использовалась для получения многочисленных "правил сумм" для нулей полиномов Эрмита, Якоби, Лагерра и функций Бесселя /4-5/. Для систем (I) она была установлена в той предельной ситуации, когда $W(\xi)$ совпадает с потенциалом Морса $8g^2A^2(e^{4\xi} - e^{2\xi})$ /6/. Покажем, что упрощение уравнений равновесия может происходить и в общем случае потенциалов (I). Эти уравнения имеют вид

$$-\sum_{k\neq j}^{N} \frac{\operatorname{ch}(q_j - q_k)}{\operatorname{sh}^3(q_j - q_k)} + 8\left[4A^2\operatorname{sh}4q_j + B\operatorname{sh}2q_j + C\operatorname{ch}2q_j\right] = 0. \quad (5)$$

Вводя для удобства параметры $z_j = \exp(2q_j)$, представим (5) в форме

$$-\sum_{k\neq j}^{N} \frac{z_k(z_j + z_k)}{(z_j - z_k)^3} + 4A^2(z_j - z_j^{-3}) + B + C - (B-C)z_j^{-2} = 0. \quad (6)$$

Для преобразования системы (6) к более простому виду воспользуемся следующим приемом /5/. Пусть $\{z_k\}$ — решение (6). Построим полином $P_N(z) = \prod_{j=1}^{N}(z - z_j)$ и рассмотрим интеграл по достаточно удаленному замкнутому контуру от функции $F_j(z) = \frac{z(z+z_j)}{(z-z_j)^3}\frac{P_N'(z)}{P_N(z)}$. Так как при $z \to \infty$ $F_j(z) \sim 1/z^2$, этот интеграл и, следовательно, сумма вычетов в полюсах $F_j(z)$ равны нулю. Вычеты в полюсах первого порядка z_k, $k \neq j$ равны $\frac{z_k(z_k + z_j)}{(z_k - z_j)^3}$, и система (6) записывается в виде

$$4A^2(z_j - z_j^{-3}) + B + C - (B-C)z_j^{-2} = -\operatorname{res} F_j(z)|_{z=z_j}. \quad (7)$$

Полюс $F_j(z)$ в точке $z = z_j$ имеет порядок 4, и правая часть (7) вычисляется по формуле

$$-\operatorname{res} F_j(z)\Big/_{z=z_j} = -\frac{1}{6}\frac{d^3}{d\xi^3}\left\{\xi(z_j+\xi)(2z_j+\xi)\frac{P_N'(\xi+z_j)}{P_N(\xi+z_j)}\right\}\Big/_{\xi=0} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left[2a + z_j(4b-3a^2) + z_j^2(a^3-2ab+c)\right], \tag{8}$$

где

$$a = P_N''(z_j)\big/P_N'(z_j), \quad b = P_N'''(z_j)\big/P_N'(z_j), \quad c = P^{(4)}(z_j)\big/P_N'(z_j) . \tag{9}$$

Если предположить, что $P_N(z)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\widetilde{A}(z)P_N''(z) + \widetilde{B}(z)P_N'(z) + \lambda(z)P_N(z) = 0 \tag{I0}$$

(функции $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \lambda$ могут зависеть от N), то величина (9) и вычет (8) могут быть выражены через $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \lambda$ и их производные. Нашей целью является такой выбор $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \lambda$, который обеспечивает превращение уравнений (7) в тождества и одновременно гарантирует существование полиномиальных решений (I0). Можно показать, что удовлетворить эти требования можно лишь при условии $\widetilde{A}(z) = z^2$. При этом вычет (8) сравнительно просто выражается через B, λ :

$$\operatorname{res} F_j(z)\Big/_{z=z_j} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\widetilde{B}^2}{z_j^3} + \frac{\widetilde{B}\widetilde{B}'}{z_j^2} - \widetilde{B}'' - 2\lambda'\right). \tag{II}$$

Выполнение равенств (7) достигается, если

$$\widetilde{B}(z) = pz^2 + qz + r, \quad \lambda(z) = uz + v . \tag{I2}$$

Постоянные p, q, r, u определяются из (7):

$$p = -4A = -r, \quad pq - 2(p+u) = 4(B+C), \quad qr = 4(B-C). \tag{I3}$$

Согласно (I2) полином степени N может быть решением (I0) лишь при условии $pN + u = 0$, что окончательно дает

$$B = -A(N-1), \tag{I4}$$

$$q = -\frac{C}{A} - N + 1 . \tag{I5}$$

Мы видим, что решения системы (6) определяются корнями полинома $P_N(z)$, удовлетворяющего уравнению второго порядка (I0), только при выполнении равенства (I4)- коэффициент B не может быть произвольным. Уравнение (I0) с коэффициентами (I2) не принадлежит семейству гипергеометрических - в нуле и на бесконечности оно имеет иррегулярные особые точки и является уравнением Хилла. Параметр v , входящий в (I2), должен быть определен из условия совместности системы рекуррентных уравнений для коэффициентов полинома

$$P_N(z) = \sum_{\ell=0}^{N-1} d_{N-\ell}\, z^\ell + z^N, \tag{I6}$$

получающейся при подстановке (I6) в (I0). Оно представляет собой алгебраическое уравнение порядка $(N+1)$, решение для v должно быть выбрано так, чтобы все корни $P_N(z)$ были вещественными и положительными. Я не могу указать явную зависимость v от A и C. Оказывается, что для вычисления энергии равновесного состояния в ней нет необходимости.

Это вычисление может быть произведено следующим образом. Запишем выражения для энергии в виде

$$\mathcal{E}_{cl} = 4g^2\left(S + 2A^2(S_2 + S_{-2}) + (B+C)S_1 + (B-C)S_{-1}\right), \tag{I7}$$

где $$S = \sum_{k<j} \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2}, \quad S_\alpha = \sum_{j=1}^{N} z_j^\alpha .$$

Сумма вычетов функции $\psi(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{z z_j}{(z-z_j)^2}\,\frac{P_N'(z)}{P_N(z)}$ во всех ее полюсах равна нулю. Вычисляя их с учетом равенств типа (8)-(9) и уравнения (I0) с коэффициентами (I2)-(I5), можно выразить двойную сумму S через S_α :

$$S = -\frac{p^2}{24}(S_2 + S_{-2}) - \frac{S_1}{12}(pq - 3p - 2u) - \frac{S_{-1}}{12} r(q+1) - \frac{N}{12}\left(2pr + (q-1)^2 + 1 - 4v\right). \tag{I8}$$

Все суммы S_α выражаются через p, q, r, u, v путем использования (I0), (I6). Из (I6) следует, что $S_1 = -d_1$, $S_1^2 - S_2 = 2d_2$, $S_{-1} = -\frac{d_{N-1}}{d_N}$, $S_{-1}^2 - S_{-2} = 2\frac{d_{N-2}}{d_N}$; подстановка (I6) в (I0) приводит к простым выражениям для всех величин, стоящих в правых частях равенств. Дальнейшая их подстановка в (I7) и (I8) после очень длинных вычислений приводит к очень простому результату:

$$\mathcal{E}_{cl} = -\frac{Ng^2}{2}\left[\frac{N^2-1}{3} + \frac{C^2}{A^2} - 32A^2\right]. \tag{I9}$$

Все ненулевые степени параметра v, возникающие на промежуточных этапах вычислений, сокращаются, и ответ (I9) не требует определения v.

Покажем, наконец, что уравнение (I0) с коэффициентами (I2) может рассматриваться как одночастичное уравнение Шредингера. Действительно, после замены переменной $z = \exp(2q)$ и подстановки $P_N(e^{2q}) = \psi(q)\exp\{4A\,\mathrm{ch}\,2q + (\frac{C}{A}+N)q\}$ получим из (I0) уравнение вида

$$-\frac{\psi''}{2} + \tilde{W}(q)\psi = \mathcal{E}\psi, \qquad (20)$$

где $\tilde{W}(q) = 8(2A^2\mathrm{ch}\,4q + A(N+1)\,\mathrm{ch}\,2q + C\,\mathrm{sh}\,2q)$, $\mathcal{E} = 16A^2 + 2v - \frac{1}{2}(\frac{C}{A}+N)^2$.

Таким образом, мы установили, что при условии (I4) координаты частиц классической системы (I) в равновесии совпадают с узлами волновой функции N-го уровня одной частицы - решения одномерного уравнения Шредингера (20) с потенциалом $\tilde{W}(z)$. Само условие (I4) полностью аналогично условию факторизации волновой функции основного состояния в квантовой задаче (2) и совпадает с ним в пределе больших констант взаимодействия g (т.е. при $\hbar \to 0$). При этом совпадают также минимальные классические и квантовые энергии (4), (I9) (переход к обычной системе единиц соответствует замене в (2-4) $g \to \frac{g}{\hbar}$, $\mathcal{E}_q(g) \to \hbar^2\mathcal{E}_q(\frac{g}{\hbar})$).

Зависимости энергий (4) и (I9) от параметров внешнего поля идентичны. По-видимому, этот факт не является случайным. Тем не менее его теоретико-групповая интерпретация мне неизвестна. Возможно, что она будет найдена, если удастся включить (I) в схему геометрического квантования Кириллова-Костанта /7/, которая, однако, до настоящего времени была использована лишь для исследования значительно более простых динамических систем.

Литература

1. Inozemtsev V.I. Phys.Lett., 1983, 98A, p.316.
2. Sutherland B. Phys.Rev., 1971, A4, p.2019.
3. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. Phys.Lett., 1984, 106A, p.I05.
4. Calogero F. Lett.Nuovo Cim., 1977, 19, p.505.
5. Ahmed S. Lett.Nuovo Cim., 1979, 26, p.285.
6. Inosemtsev V.I. JINR Preprint, 1988, P2-88-180.
7. Kostant B. Quantization and representation theory. Proc. of Symposium of Representations of Lie groups, Oxford, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I марта I988 года.

Иноземцев В.И. P2-88-217
Точки равновесия классических интегрируемых систем частиц, факторизация волновых функций их квантовых аналогов и полиномиальные решения уравнения Хилла

Найдена связь между характеристиками равновесных конфигураций классических интегрируемых систем взаимодействующих частиц и свойствами основного состояния их квантовых аналогов. Установлено, что при выполнении условий, обеспечивающих факторизацию волновой функции квантовых систем, координаты классических частиц в положении равновесия являются нулями полиномиального решения линейного уравнения второго порядка. При этом классические и квантовые выражения для минимально возможной энергии имеют одну и ту же зависимость от параметров потенциала взаимодействия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Inozemtsev V.I. P2-88-217
Equilibrium Points of Classical Integrable Particle Systems, Factorization of Wave Functions of Their Quantum Analogs and Polynomial Solutions of the Hill Equation

A relation is found between the characteristics of equilibrium configurations of classical integrable systems of interacting particles and the properties of the ground state of their quantum analogs. It is shown that under the condition of factorization of the wave function of quantum systems, the coordinates of classical particles in equilibrium are zeros of the polynomial solution to a second-order linear equation; the dependence of the classical and quantum minimal energies on the interaction potential parameters is the same.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988