

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

3-757  
P2-88-21

В.П.Зрелов, Я.Ружичка

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ТАММА  
ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА  
ПРИ ЕГО РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ  
НА КОНЕЧНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Направлено в журнал "Nuclear Instruments  
and Methods in Physics Research"

1988

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что электрический заряд при равномерном и прямолинейном движении в вакууме не испускает электромагнитное излучение. Этого требует, кроме прочего, и теория относительности, поскольку в обратном случае можно было бы выбрать такую инерциальную систему координат, в которой заряд покоится и излучает\*.

Однако из этого правила имеется интересное исключение. В случае, когда заряд движется равномерно и прямолинейно в среде с показателем преломления  $n$ , со скоростью, превышающей фазовую скорость света, генерируется излучение Вавилова-Черенкова (ИВЧ). Теория ИВЧ в настоящее время широко известна, подтверждена на практике в многочисленных экспериментах, и это излучение благодаря своим уникальным свойствам нашло широкое применение в физике высоких энергий.

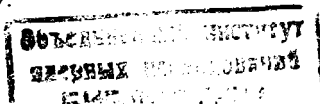
В реальном случае прямолинейность и равномерность движения заряда через радиатор можно проверить лишь определением его вектора скорости при влете и вылете из радиатора. В идеальном случае при сохранении вектора скорости по модулю и направлению движение заряда в среде считается прямолинейным и равномерным. Однако неизменности вектора скорости при вылете из радиатора можно достичь и иным способом: двукратными, одинаковыми, противоположными изменениями скорости по модулю и по направлению, когда суммарное отклонение в одну сторону равно суммарному отклонению в противоположную сторону и суммарное изменение величины скорости равно нулю.

В этой работе рассматривается генерация излучения именно с этой точки зрения — при двукратных, одинаковых и противоположных изменениях скорости заряженной частицы.

## 2. АНАЛИЗ ФОРМУЛЫ ТАММА

Формулу для излучения заряда, движущегося в прозрачной среде с коэффициентом преломления  $n$ , по закону, приведенному на рис. 1 (двукратное изменение скорости), впервые получил Тамм<sup>1/</sup>:

\* см. работу<sup>1/3/</sup>, с.227.



$$W = \frac{2e^2\beta^2}{\pi c} \int n J(\omega) d\omega, \quad (1)$$

где

$$J(\omega) = \int_0^\pi q^2(\omega) \sin^3 \theta d\theta, \quad q(\omega) = \frac{\sin \{\omega t_0 (1 - \beta n \cos \theta)\}}{1 - \beta n \cos \theta},$$

$W$  — полная энергия излучения на пути  $2vt_0$ .

Как было показано в работе <sup>/2/</sup>, формулу (1) можно привести к виду для числа фотонов  $N$ :

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{\alpha n \ell^2}{\lambda^3} \sin^2 \theta \left( \frac{\sin X}{X} \right)^2, \quad (2)$$

где  $X = \frac{\pi \ell (1 - \beta n \cos \theta)}{\beta \lambda}$ ,  $\ell$  — длина пути частицы в среде,  $\beta = \frac{v}{c}$  —

скорость частицы,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ,  $\theta$  — угол наблюдения излучения относительно направления движения заряда.

### 2.1. Излучение в вакууме

Интересно, что в частном случае  $n = 1$  формула (1) позволяет рассмотреть и свойства излучения, возникающего при движении заряда по закону (см. рис. 1) в вакууме. Из формулы (2) для этого случая получаем

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{\alpha \ell^2}{\lambda^3} \sin^2 \theta \left( \frac{\sin X}{X} \right)^2, \quad (3)$$

где  $X = \frac{\pi \ell}{\beta \lambda} (1 - \beta \cos \theta)$ .

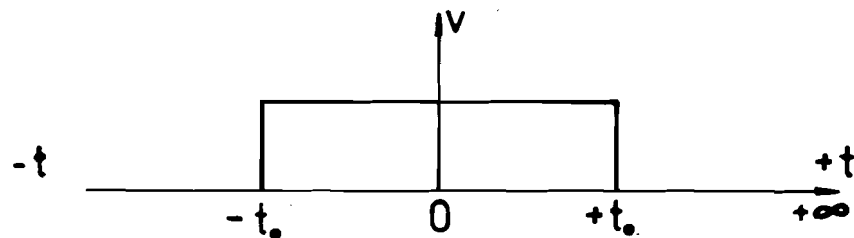


Рис. 1. Закон движения заряда в бесконечной однородной среде.

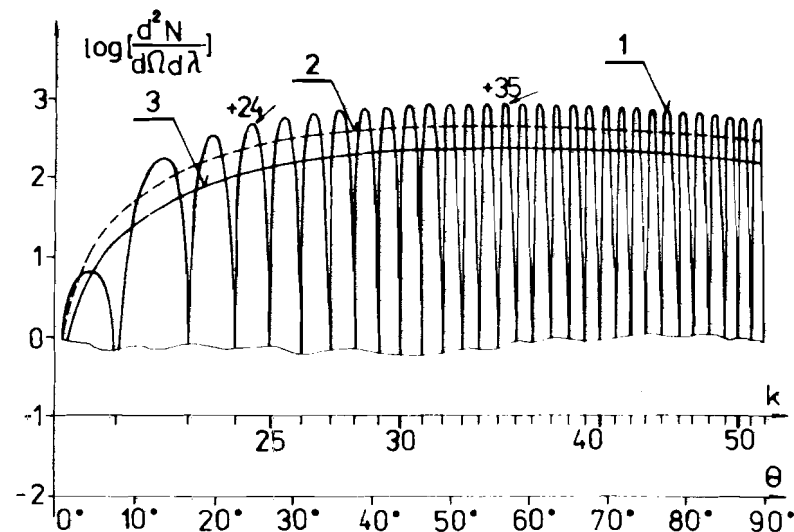


Рис. 2а. Угловое распределение излучения, рассчитанное по формуле Тамма (3) для случая движения заряда в вакууме (кривая 1). Длина волны излучения  $\lambda = 400$  нм, скорость заряда  $\beta = v/c = 0,58$ , длина пути  $\ell = 30\lambda$ . Кривая 2 — угловое распределение излучения в случае  $\ell \rightarrow \infty$ . Расчет выполнен по формуле (4). Кривая 3 — угловое распределение тормозного излучения. Расчет выполнен по формуле (6).

Угловые распределения, рассчитанные по формуле (3), приведены на рис. 2а, кривая 1.

При вычислении интеграла по всем углам, в случае больших  $X$  ( $X \gg 1$ ), сильноосциллирующую функцию  $\sin^2 X$  в формуле (3) обычно заменяют ее средним значением  $1/2$ . Угловое распределение тогда принимает вид

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{\alpha \beta^2}{2\pi^2 \lambda} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}. \quad (4)$$

С другой стороны, как следует, например, из <sup>/3/</sup>, тормозное излучение, испускаемое заряженной частицей в вакууме при ее мгновенном ускорении от скорости  $v = 0$  до скорости  $v$ , определяется формулой

$$dW_{n=1}^{\text{Торм}} = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (5)$$

которую для сравнения с формулой Тамма (4) представим в виде

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{a\beta^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 \lambda (1 - \beta \cos \theta)^2}. \quad (6)$$

Мы видим, что формула Тамма (4) является суммой двух формул для тормозного излучения (6):

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = 2 \frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda}. \quad (7)$$

Угловые распределения, рассчитанные по формулам (4) и (6), приведены на рис. 2а, кривые 2 и 3 соответственно.

Полученный нами результат является естественным, поскольку задача Тамма предполагает мгновенное ускорение заряда в момент времени  $-t_0$  от нулевой скорости до скорости  $v$  и его мгновенную остановку в момент времени  $+t_0$ . Из (7) можно поэтому заключить, что излучение, описанное формулой Тамма (4), обязано своим происхождением ускорению и замедлению заряда в моменты времени  $\pm t_0$ , а не его движению с постоянной скоростью. Напомним, что в рассматриваемом нами случае частица движется в вакууме и ее излучение при движении с постоянной скоростью запрещено законами электродинамики.

Проведя интегрирование формулы (4) по всем углам, получаем

$$dW_{n=1}^{\text{Тамм}} = \frac{4e^2}{\pi c} \left[ \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right] d\omega. \quad (8)$$

В случае тормозного излучения (6) (см.<sup>3/</sup>)

$$dW_{n=1}^{\text{Торм}} = \frac{2e^2}{\pi c} \left[ \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right] d\omega. \quad (9)$$

Видим, что опять имеем

$$\frac{dW_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\omega} = 2 \frac{dW_{n=1}^{\text{Торм}}}{d\omega}. \quad (10)$$

Простое сложение интенсивностей тормозного излучения, испущенного зарядом в моменты  $\pm t_0$ , является следствием того, что  $X \gg 1$ , то есть длина пути частицы  $l \gg l_\phi$ , где  $l_\phi = \beta\lambda/2(1 - \beta \cos \theta)$  есть так называемая зона формирования излучения, а  $X = \pi l/2l_\phi$ .

В случае, когда это условие не выполняется, на интенсивность результирующего излучения оказывает существенное влияние интерференция. В согласии с правилами интерференции волн от двух когерентных источников, см.<sup>4/</sup>, формулу для результирующей интенсивности излучения можно представить в виде

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = 4 \left( \frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda} \right) \cos^2 \left( X + \frac{\phi}{2} \right). \quad (11)$$

Здесь  $\phi$  — начальная разность фаз интерферирующих излучений,  $X$  — разность фаз, вызванная разностью хода обоих излучений. В нашем случае  $X = (\pi l/\beta\lambda)(1 - \beta \cos \theta)$ . Вследствие разного знака величины ускорения в моменты времени  $\pm t_0$  амплитуды тормозных излучений различаются знаком и, следовательно, начальная разность фаз обоих излучений  $\phi = \pi$ . Поэтому формула (11) принимает вид

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = 4 \left[ - \frac{a\beta^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2 \lambda (1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \sin^2 X, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda}.$$

Сравнение (12) с (6) показывает, что интерференция сильно изменяет свойства первоначального тормозного излучения. Рассмотрим более подробно эти изменения.

Как следует из (12), свойства результирующего излучения существенно образом зависят от разности фаз  $X$  интерферирующих тормозных излучений. В зависимости от значения разности фаз можно различать три характерных случая: а)  $|X| \gg \pi$ ; б)  $|X| \ll \pi$ ; в) промежуточный случай.

а) Если разность фаз в пределах всего углового распределения излучения большая ( $|X| \gg \pi$ ), угловое распределение можно описать формулой (7), а результирующее излучение тогда по всем своим свойствам совпадает с тормозным излучением (с точностью до коэффициента 2). Характерными для этого случая являются независимость интенсивности излучения от длины пути частицы  $l$  и спектральное распределение энергии вида  $dW/d\Omega \sim d\omega$ . Полная интенсивность излучения в этом случае определяется формулой (8).

б) Если разность фаз в пределах всего углового распределения мала ( $|X| \ll \pi$ ), формула Тамма (12) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{a\lambda^2}{\lambda^3} \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Проинтегрировав (13) по углам  $\phi$  и  $\theta$ , получаем

$$\frac{dN_{n=1}^{\text{инт. эр}}}{d\lambda} = - \frac{a\ell^2}{\lambda^3} \left( \frac{8\pi}{3} \right). \quad (14)$$

Характерными для этого случая являются независимость углового распределения от скорости частицы  $\beta$ , квадратичная зависимость от длины пути частицы  $\ell$  и спектральное распределение энергии типа  $dW/d\Omega \sim \omega^2 d\omega$ .

в) В случае промежуточных значений разности фаз  $X$  угловые распределения результирующего излучения и его свойства необходимо определять по точной формуле Тамма (3), осуществляющей плавный переход между указанными выше двумя предельными случаями.

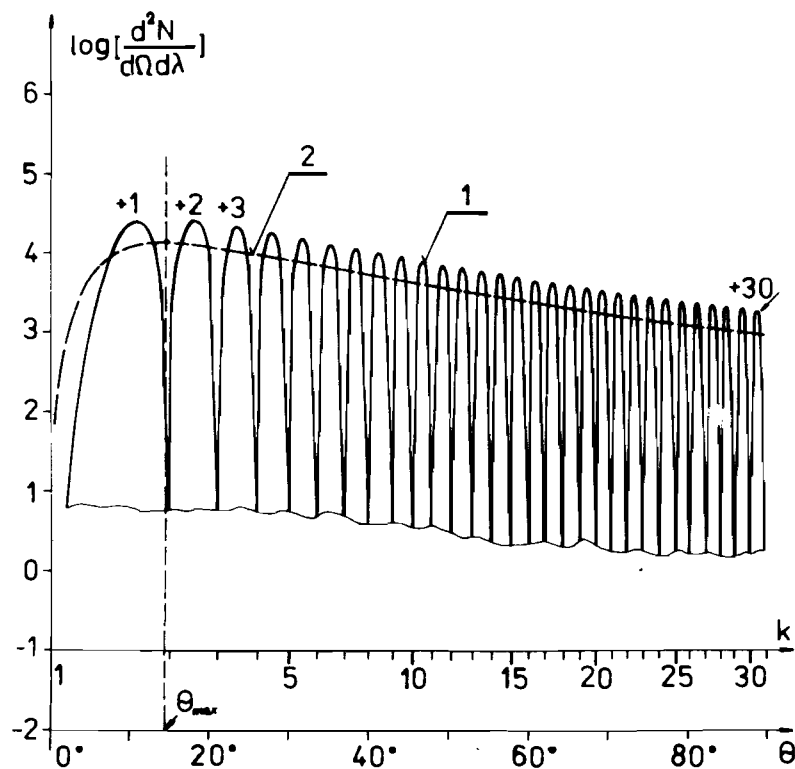


Рис. 26. Кривая 1 – то же, что и на рис. 2а, но для скорости заряда  $\beta=0,9677419$ . Видны первые 30 интерференционных максимумов высших порядков. Кривая 2 – угловое распределение излучения для случая  $\ell \rightarrow \infty$ . Широкий максимум на этой кривой находится при  $\theta_{\max} = 1/\gamma = 14,5^\circ$ .

На рис. 26,в приведены угловые распределения излучения, возникающего при движении заряда в вакууме, рассчитанные по точной формуле Тамма (3) для тех же параметров, что и на рис. 2а, но для разных скоростей  $\beta$ . На всех угловых распределениях видны интерференционные пики, свидетельствующие о кратности разных фаз числу  $\pi (X = k\pi)$ . Порядок интерференционного максимума определяется величиной

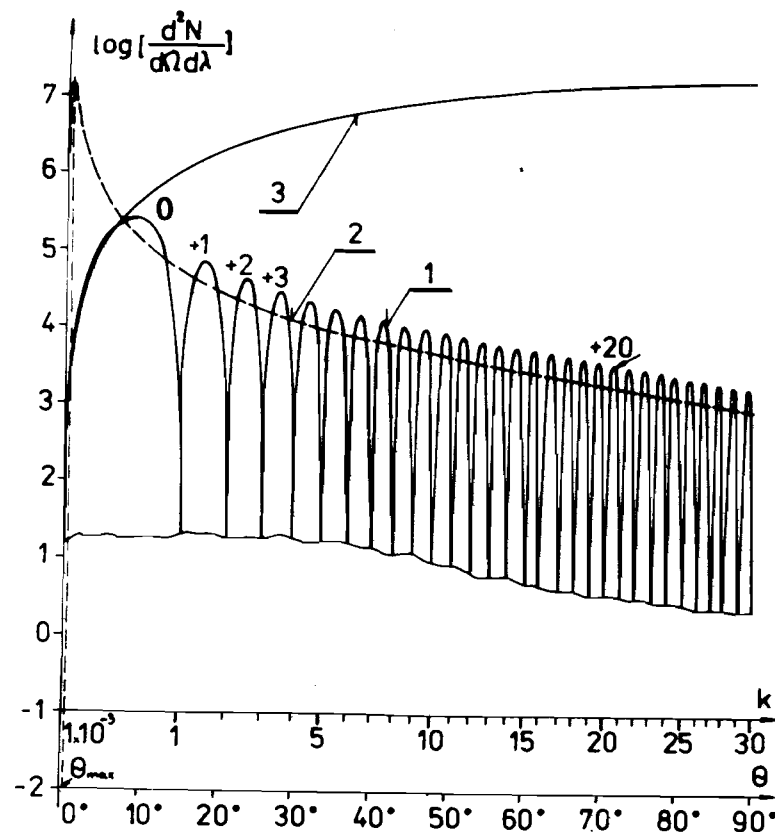


Рис. 2в. То же, что и на рис. 2а, но для скорости  $\beta=0,9999666$ , близкой к пороговой скорости  $\beta=1$ . Кривая 1 – расчет по формуле (3). В угловом распределении кроме максимумов высших порядков ( $k = 1 \div 29$ ) присутствует почти половина главного интерференционного максимума ( $k = 0,001 \div 1$ ). Кривая 2 – расчет для случая  $\ell \rightarrow \infty$  по формуле (4). Максимум – при  $\theta_{\max} = 1/\gamma$ . Кривая 2 лишь на постоянный множитель 2 отличается от углового распределения для тормозного излучения (на рис. не приведено). Кривая 3 – расчет углового распределения излучения по формуле (13),  $\ell = 30\lambda$ .

$$k = \text{Integer} \left\{ \frac{\ell(1 - \beta \cos \theta)}{\beta \lambda} \right\}, \quad (15)$$

позволяющей легко ориентироваться в угловых распределениях излучения.

Например, на рис. 2а, б, в (кривые 1) видно, что с нарастанием  $\beta$  в угловых распределениях со стороны малых углов  $\theta$  появляются интерференционные максимумы все более низких порядков (разность фаз  $X$  уменьшается), причем интерференционные максимумы наивысших порядков исчезают (при угле  $\theta = 180^\circ$ ). Все угловое распределение с увеличением  $\beta$  как бы сдвигается в сторону больших углов  $\theta$ , следуя закону

$$\cos \theta^k = \frac{1}{\beta} - \frac{k\lambda}{\ell}. \quad (16)$$

Пик наинизшего порядка находится при угле  $\theta = 0^\circ$  ( $k^0 = \text{Int} \{ \ell(1 - \beta) / \beta \lambda \}$ ), а наивысшего порядка — при  $\theta = 180^\circ$  ( $k^{180} = \text{Int} \{ \ell(1 + \beta) / \beta \lambda \}$ ). Главный интерференционный максимум в угловых распределениях на рис. 2а, б отсутствует. Он начинает появляться при  $\beta = 1/(1 + \lambda/\ell)$ , см. рис. 2в. Однако при движении частицы в вакууме он полностью появиться никогда не может. Для этого было бы необходимо увеличить  $\beta$  до значения  $\beta = 1/(1 - \lambda/\ell) > 1$ , что невозможно. В пределе  $\beta \rightarrow 1$  в угловом распределении может появиться лишь половина главного интерференционного максимума ( $k = 0 \div 1$ ).

Угловые распределения, рассчитанные по точной формуле Тамма (3), осциллируют около плавной кривой для предельного значения  $X \rightarrow \infty$  (кривые 2 на рис. 2а, б, в), достигая максимальных значений в отдельных пиках:

$$\left( \frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} \right) = 4 \left( \frac{d^2 N_{n=1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda} \right). \quad (17)$$

Следовательно, в случае достаточно больших значений разности фаз, имеющих место, например, при движении нерелятивистской частицы в вакууме, тормозное излучение хорошо аппроксимирует свойства результирующего излучения. Однако в пределах одного углового распределения разности фаз  $X$  могут принимать не только большие, но и малые значения вплоть до  $X = 0$ , например в случае релятивистской частицы, и тогда характеристики результирующего излучения в данной области углов  $\theta$  будут существенно отличаться от характеристик интерферирующих тормозных излучений. Малая разность фаз всегда имеет место в области главного интерференционного максимума, см. рис. 2в (область малых углов  $\theta$ ). Кривая 3 на этом рисунке представляет

результат расчета по формуле (13), откуда видно, что в области малых углов  $\theta$  она хорошо описывает ход углового распределения результирующего излучения, тогда как расчет по формуле (7) в этой области углов дает неправильные результаты.

Интересно также отметить, что ход плавного максимума на кривой 2 (рис. 2б, в), находящегося вблизи угла  $\theta_{\text{max}} \sim 1/\gamma$ , в сторону малых углов  $\theta$  при увеличении  $\beta$  вызван образованием вблизи  $\theta = 0^\circ$  интерференционных максимумов все более низких порядков и более высокой интенсивности, ход которых с нарастанием  $\beta$  в действительности является обратным (в сторону больших углов  $\theta$ ), см. (16).

Аналогичный анализ формулы Тамма приведем теперь для случая движения частицы в прозрачной среде.

## 2.2. Излучение в среде

Учет влияния диэлектрических свойств среды на испускание мягких квантов тормозного излучения при движении заряда по закону, приведенному на рис. 3, провели Газазян и др.<sup>15/</sup>. Полученная ими формула для углового распределения излучения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_{\epsilon \neq 1}^{\Gamma \text{аз.}}}{d\omega d\Omega} &= \frac{\sqrt{\epsilon} \mu^{3/2} e^2 T^2}{4\hbar c^3 \pi^2} \omega \left\{ |\vec{n}, \vec{v}_1|^2 \frac{\text{Sin}^2 \frac{(\omega - \vec{k} \vec{v}_1) T}{2}}{\left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_1}{2} \right)^2 T^2} + \right. \\ &+ |\vec{n}, \vec{v}_2|^2 \frac{\text{Sin}^2 \frac{(\omega - \vec{k} \vec{v}_2) T}{2}}{\left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_2}{2} \right)^2 T^2} + \\ &+ 2 |\vec{n}, \vec{v}_1| |\vec{n}, \vec{v}_2| \left. \frac{\text{Sin} \left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_1}{2} \right) T \text{Sin} \left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_2}{2} \right) T}{\left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_1}{2} \right) T \left( \frac{\omega - \vec{k} \vec{v}_2}{2} \right) T} \cdot \text{Cos} \frac{[(\omega - \vec{k} \vec{v}_1) + (\omega - \vec{k} \vec{v}_2)] T}{2} \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\vec{k} = (\omega/c) \sqrt{\epsilon} \vec{n}$  и  $2T$  — время пролета частицы в среде.

Формулу (18), как показано в<sup>15/</sup>, для случая  $\beta n < 1$  и  $T \rightarrow \infty$  можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \mu \sqrt{\epsilon \mu} \omega}{\hbar c 4\pi^2 c^2} \left( \frac{[\vec{n}, \vec{v}_1]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_1} - \frac{[\vec{n}, \vec{v}_2]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_2} \right)^2 + \frac{e^2 \mu \sqrt{\epsilon \mu} \omega}{\hbar c 4\pi^2 c^2} \left( \frac{[\vec{n}, \vec{v}_1]^2}{(\omega - \vec{k} \vec{v}_1)^2} + \frac{[\vec{n}, \vec{v}_2]^2}{(\omega - \vec{k} \vec{v}_2)^2} \right). \quad (19)$$

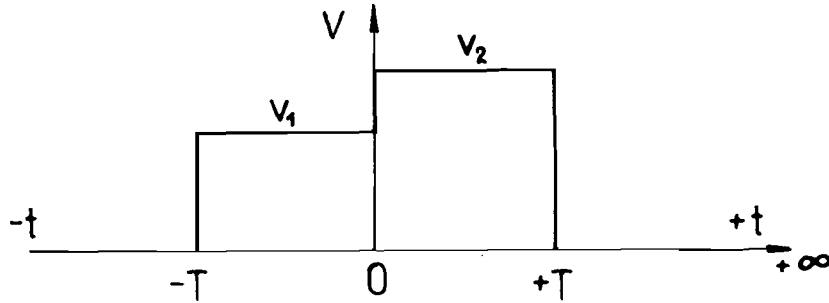


Рис. 3. Закон движения, использованный при выводе формулы для тормозного излучения заряда в среде.

Первая часть формулы (19) представляет собой выражение для тормозного излучения частицы в среде. В случае  $\sqrt{\epsilon} = n$  и  $\mu = 1$  мы имеем

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Торм}}}{d\omega d\Omega} = \frac{an\omega}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{[\vec{n}, \vec{v}_1]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_1} - \frac{[\vec{n}, \vec{v}_2]}{\omega - \vec{k} \vec{v}_2} \right)^2. \quad (20)$$

В частном случае  $v_1 = 0$  и  $v_2 = v$  формула (20) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Торм}}}{d\lambda d\Omega} = \frac{an\beta^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 \lambda (1 - \beta n \cos \theta)^2}. \quad (21)$$

Формула (21) дает угловое распределение мягких квантов тормозного излучения, испускаемых зарядом в прозрачной среде с коэффициентом преломления  $n$  при его мгновенном ускорении с нулевой скорости до скорости  $v$ . Аналогичное угловое распределение получается при мгновенной остановке заряда в среде.

Для  $n = 1$  формула (21) совпадает с формулой (6), определяющей угловое распределение квантов тормозного излучения при мгновенном скачке скорости заряда в вакууме.

Формулу Тамма (2) для сравнения с (21) запишем в виде

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{an\beta^2 \sin^2 \theta}{2\pi^2 \lambda (1 - \beta n \cos \theta)^2}. \quad (22)$$

Сравнивая (22) и (21), видим, что и в среде, так же как это было в случае движения частицы в вакууме, формула Тамма (2) (для случая больших  $X$  и  $\beta n < 1$ ) представляет собой сумму двух формул тормозного излучения (21):

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = 2 \frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda}.$$

Следовательно, и в среде при  $\beta n < 1$  и больших  $X$  излучение, определенное в задаче Тамма, представляет собой результат простого сложения двух тормозных излучений, возникших в первоначальный момент  $-t_0$  при мгновенном ускорении заряда и в конечный момент  $+t_0$  при его мгновенной остановке. Движение заряда с постоянной скоростью между этими двумя моментами времени в процессе испускания квантов излучения никакой роли не играет.

В случае интерференции двух когерентных тормозных излучений для числа фотонов результирующего излучения, по аналогии с (11), получаем

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = 4 \left[ \frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Торм}}}{d\Omega d\lambda} \right] \cos^2 \left( X + \frac{\phi}{2} \right). \quad (23)$$

Как и в случае вакуума, разность начальных фаз  $\phi = \pi$ . Подставляя в (23) выражение для тормозного излучения в среде (21), получаем

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{an\beta^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 \lambda (1 - \beta n \cos \theta)^2} \sin^2 X, \quad (24)$$

где  $X = (\pi l / \beta \lambda)(1 - \beta n \cos \theta)$  представляет собой разность фаз, вызванную разностью хода интерферирующих тормозных излучений в среде с коэффициентом преломления  $n$ .

Мы видим, что формула (24) полностью совпадает с точной формулой Тамма (2):

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Интер}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda}. \quad (25)$$

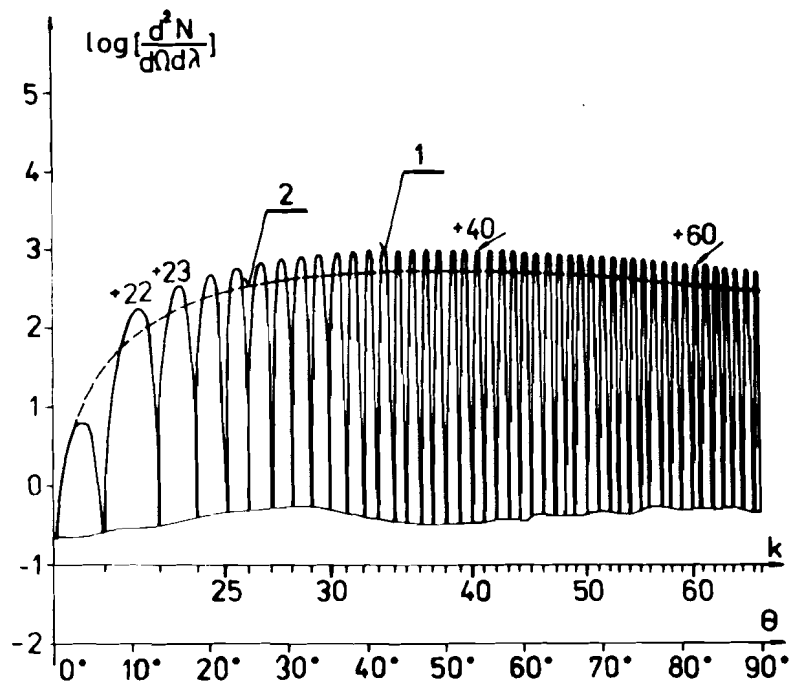


Рис. 4а. Угловое распределение излучения, испускаемого зарядом, движущимся по закону, приведенному на рис. 1, в прозрачной среде с коэффициентом преломления  $n = 1,5$  (кривая 1). Длина волны излучения  $\lambda = 400$  нм,  $\ell = 30 \lambda$ ,  $\beta = 0,4496124$ . В угловом распределении на рисунке присутствуют интерференционные максимумы порядков  $k = 21 \div 66$ . Кривая 2 – угловое распределение излучения при тех же параметрах, что и кривая 1, но для  $\ell \rightarrow \infty$ . Расчет выполнен по формуле (22).

Расчет по формуле (2) и по ее предельному случаю для  $X \rightarrow \infty$  приведен на рис. 4а, где введена нумерация интерференционных пиков в соответствии с разностью фаз  $X = k\pi$  для излучения в среде,  $k = \text{Int} \{ \ell (1 - \beta n \cos \theta) / \beta \lambda \}$ .

Из рисунка видно, что точное решение Тамма (кривая 1), как и в случае вакуума (рис. 2а), осциллирует около предельного значения  $d^2N/d\Omega d\lambda$  для  $X \rightarrow \infty$  (кривая 2). В угловом распределении, представленном на рис. 4а, присутствуют интерференционные пики порядков от  $k = 21$  до  $k = 66$ .

На рис. 4б,в приведены расчеты по формуле Тамма (2) для тех же  $\lambda$ ,  $\ell$  и  $n$ , что и на рис. 4а, но для двух других скоростей частицы  $\beta$  ( $\beta n < 1$  – рис. 4б и  $\beta n = 1$  – рис. 4в). Из рис. 4а,б,в видно, что с приближением скорости  $\beta$  к пороговой скорости  $\beta_{\text{пор}} = 1/n$  в угло-

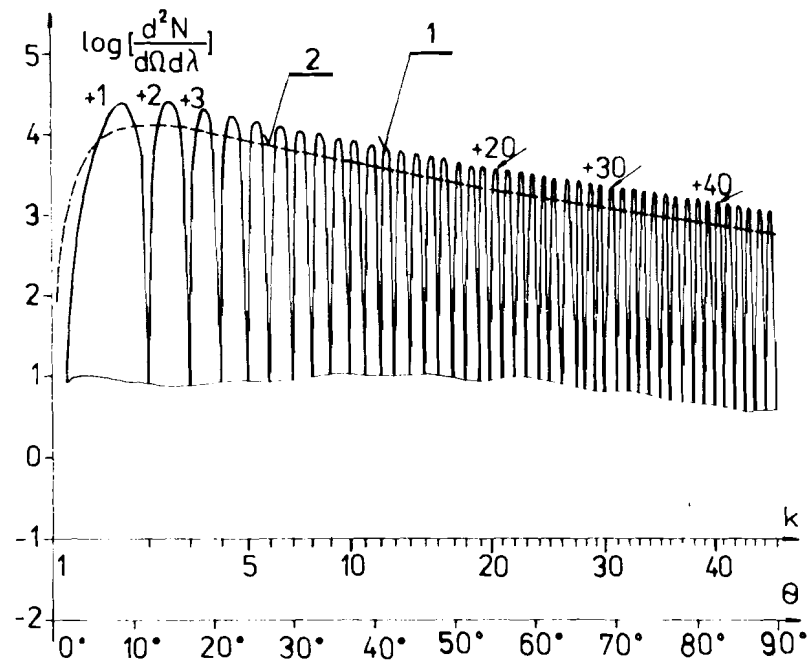


Рис. 4б. Кривая 1 – то же, что и на рис. 4а, но для скорости заряда  $\beta = 0,6521739$ . В угловом распределении присутствуют первые 45 максимумов высших порядков. Кривая 2 – расчет по формуле (22) для случая  $\ell \rightarrow \infty$ .

вом распределении появляются пики все более низких порядков и более высокой интенсивности. Все угловое распределение с нарастанием  $\beta$  как бы сдвигается в сторону больших углов  $\theta$ , следуя закону

$$\cos \theta^k = \frac{1}{\beta n} - \frac{k \lambda}{n \ell} \quad (26)$$

При  $\beta n = 1$  в угловом распределении присутствует уже половина главного интерференционного максимума, центр которого в этом случае находится при  $\theta = 0^\circ$ , см. рис. 4в. Ход центра главного максимума можно в соответствии с (26) выразить как

$$\cos \theta^0 = \frac{1}{\beta n} \quad (27)$$

На рис. 4г представлен расчет формулы Тамма (2) для случая  $\beta n > 1$ . Мы видим, что кроме главного максимума ( $k = 0$ ), центр



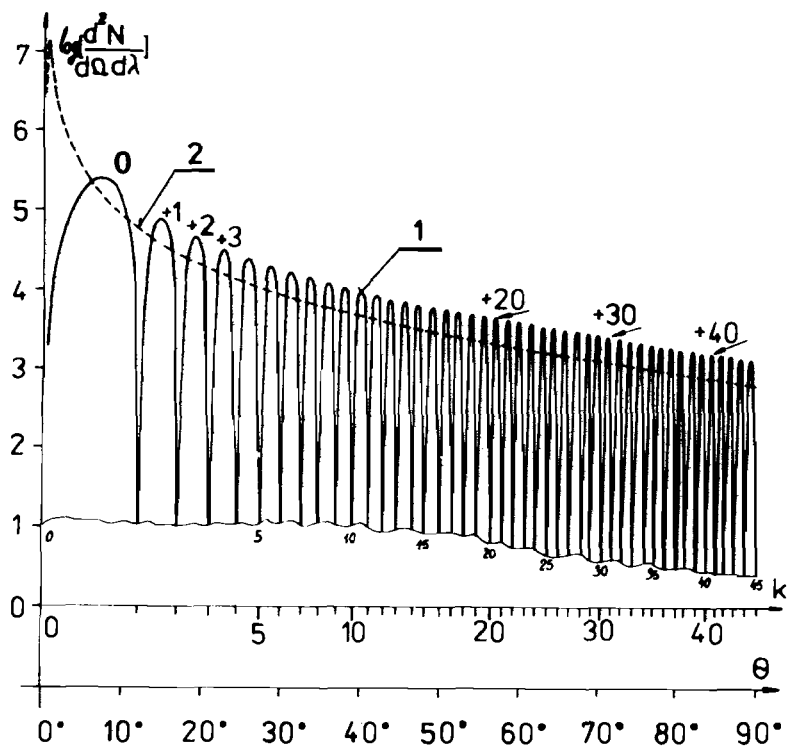


Рис. 4в. Кривая 1 – пороговый случай. Угловое распределение излучения, рассчитанное по формуле Тамма (2) для тех же параметров, что и на рис. 4а, но для  $\beta = 1/n = 0,6666$ . В угловом распределении кроме максимумов высших порядков присутствует половина главного интерференционного максимума, центр которого находится при  $\theta = 0^\circ$ . Кривая 2 – расчет по формуле (22) для случая  $l \rightarrow \infty$ .

которого находится на черенковском угле  $\theta_{\text{чер}} = \arccos(1/\beta n)$ , справа и слева от него, в угловом распределении присутствуют интерференционные пики высших порядков ( $\pm k$ ), соответствующие положительной и отрицательной разности фаз  $X$ .

Как мы видели в разделе 2.1 в случае вакуума, свойства полного числа фотонов результирующего излучения существенным образом зависят от разности фаз  $X$  двух интерферирующих тормозных излучений. Для  $X \gg \pi$ , то есть вдали от главного интерференционного максимума, как это следует из (22), результирующее излучение совпадает по своим характеристикам с тормозным излучением. Для  $X \ll \pi$ , что осуществляется только вблизи центра главного интерференционного максимума, угловое распределение результирующего излучения можно описать формулой

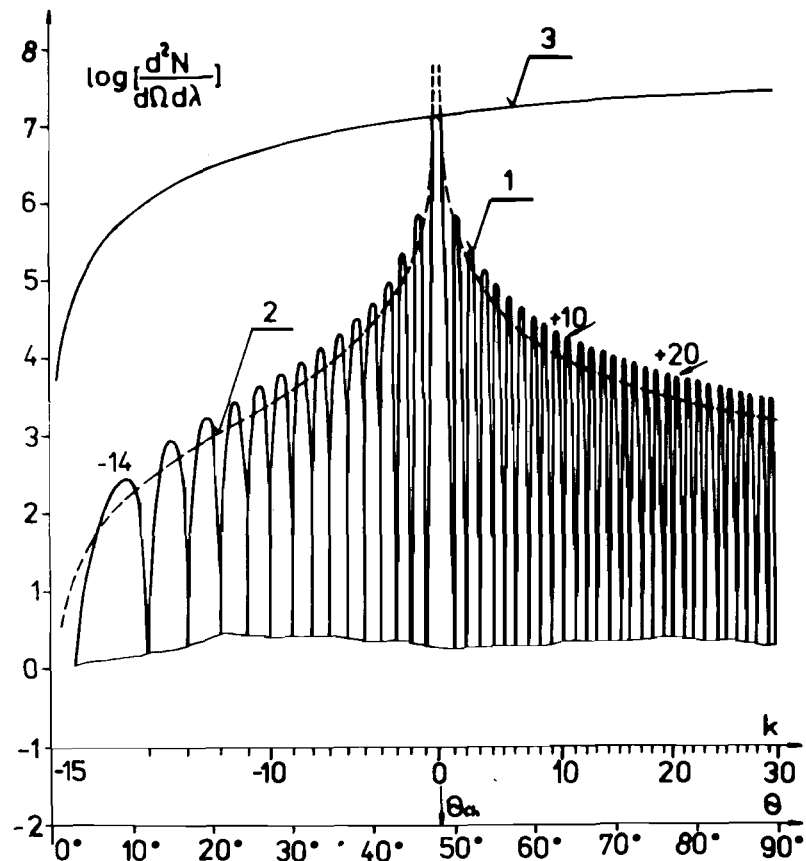


Рис. 4г. Кривая 1 – то же, что и на рис. 4а, но для  $\beta n > 1$  ( $\beta = 0,9999666\dots$ ). Центр главного интерференционного максимума находится при черенковском угле  $\theta_{\text{чер}} = \arccos 1/\beta n$ . Кривая 2 – расчет по формуле (22) для случая  $l \rightarrow \infty$ . Кривая 3 – расчет по формуле (28). Видно, что она хорошо аппроксимирует кривую углового распределения излучения лишь в области главного интерференционного максимума.

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Тамма}}}{d\Omega d\lambda} = \frac{\alpha n l^2}{\lambda^3} \sin^2 \theta \quad (28)$$

и полное число фотонов выразить как

$$\frac{dN_{n \neq 1}^{\text{Тамма}}}{d\lambda} = \frac{\alpha n l^2}{\lambda^3} \left( \frac{8\pi}{3} \right) \quad (29)$$

Результат расчета (28) представлен на рис. 4г, кривая 3.

### 2.3. К выводу Таммом формулы для излучения Вавилова-Черенкова

Проинтегрировав угловое распределение (2) по всем углам, пренебрегая быстроосциллирующими членами, Тамм<sup>1/</sup> получил выражение для полной интенсивности излучения в виде

$$dW = \frac{2e^2 \beta^2 n}{\pi c} (J_1 + J_0) d\omega, \quad \beta n > 1, \quad (30)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\beta^3 n^3} \left( \ln \frac{1 + \beta n}{|1 - \beta n|} - 2\beta n \right) \quad \text{и} \quad J_0 = \frac{\pi \omega t_0}{\beta n} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right),$$

при двух условиях:

$$\omega t_0 |1 - \beta n| \gg 1 \quad (31)$$

и

$$\omega t_0 \gg 1. \quad (32)$$

Как видно из (30), Тамм разбил излучение на две части. Одна из них соответствует  $J_1$  и обязана своим происхождением ускорению электрона в моменты времени  $t = \pm t_0$ . Вторую часть представляет член  $J_0$ . Оставив лишь  $J_0$  в выражении для полной интенсивности излучения (30) и разделив результат на длину пути  $2vt_0$ , Тамм получил несколько иным способом, чем раньше, известную формулу Тамма и Франка для излучения Вавилова-Черенкова:

$$\frac{dW}{d\ell} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \omega d\omega. \quad (33)$$

Нам кажется, что Тамм разделил излучение на две части для того, чтобы иметь возможность проинтегрировать (1) по углу  $\theta$ . Действительно, формулу Тамма (1) можно написать в виде

$$\frac{dN_{n \neq 1}^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = - \frac{2\alpha \ell}{\lambda^2} \int_{-|k^{0^\circ}|}^{+|k^{0^\circ}|} \left\{ 1 - \left[ \frac{\pi \ell - \lambda \beta k \pi}{\beta n \ell \pi} \right]^2 \right\} \frac{\text{Sin}^2(k\pi)}{(k\pi)^2} d(k\pi) -$$

$$- \frac{2\alpha \ell}{\lambda^2} \int_{+|k^{0^\circ}|}^{k^{180^\circ}} \left\{ 1 - \left[ \frac{\pi \ell - \lambda \beta k \pi}{\beta n \ell \pi} \right]^2 \right\} \frac{\text{Sin}^2(k\pi)}{(k\pi)^2} d(k\pi), \quad (34)$$

где

$$|k^{0^\circ}| = \ell |1 - \beta n| / \beta \lambda \quad \text{и} \quad k^{180^\circ} = \ell (1 + \beta n) / \beta \lambda.$$

В случае, когда  $|k^{0^\circ}| \gg 1$ , и  $k^{180^\circ} \gg 1$ . Тогда сильноосциллирующую функцию  $\text{Sin}^2(k\pi)$  во втором интеграле (34) можно заменить ее средним значением  $1/2$ , и вычисление этого интеграла не представляет труда. Получаем

$$\frac{dN_1^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = - \frac{2\alpha \beta^2 n}{\lambda \pi} \left\{ \frac{1}{\beta^3 n^3} \left[ \ln \frac{1 + \beta n}{|1 - \beta n|} - 2\beta n \right] \right\} - \frac{2\alpha \beta^2 n}{\lambda \pi} J_1. \quad (35)$$

Выражение первого интеграла в формуле (34) можно разделить на три слагаемых:

$$\frac{dN_0^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = - \frac{2\alpha \ell}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \int_{-|k^{0^\circ}|}^{+|k^{0^\circ}|} \frac{\text{Sin}^2(k\pi)}{(k\pi)^2} d(k\pi) -$$

$$- \frac{4\alpha}{\lambda n^2 \beta \pi} \int_{-|k^{0^\circ}|}^{+|k^{0^\circ}|} \frac{\text{Sin}^2(k\pi)}{(k\pi)} d(k\pi) + \frac{2\alpha}{n^2 \ell \pi^2} \int_{-|k^{0^\circ}|}^{+|k^{0^\circ}|} \text{Sin}^2(k\pi) d(k\pi). \quad (36)$$

Второй член (36) вследствие симметрии относительно  $k = 0$  равен нулю. Третий член при выполнении условия (32) по сравнению с первым членом пренебрежимо мал\*. В результате получаем

$$\frac{dN_0^{\text{Тамм}}}{d\lambda} \approx - \frac{2\alpha \ell}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \pi = - \frac{2\alpha \beta^2 n}{\lambda \pi} J_0. \quad (37)$$

Подставив (36) и (37) в (34), получаем результат Тамма (30).

На рис. 5 представлено угловое распределение излучения, рассчитанного по точной формуле Тамма (2) для параметров, удовлетворяющих условиям (31) и (32). Вертикальной линией при  $k = |k^{0^\circ}| = \ell |1 - \beta n| / (\beta \lambda) = 100$  отмечена граница разделения углового распределения на две части, интеграл от которых по всем углам соответствует значениям

$$\frac{dN_0^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = - \frac{2\alpha \beta^2 n}{\lambda \pi} J_0, \quad \frac{dN_1^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = - \frac{2\alpha \beta^2 n}{\lambda \pi} J_1,$$

полученным Таммом.

Как видно из рис. 5, угловое распределение, описанное точной формулой Тамма (2), является непрерывной функцией типа  $\text{Sin}^2 X / X^2$  без каких-либо особых точек. Даже на "черенковском" угле функция имеет конечное значение:

\* См. приложение настоящей работы, формула (1) при  $\ell / \lambda \gg 1$ .

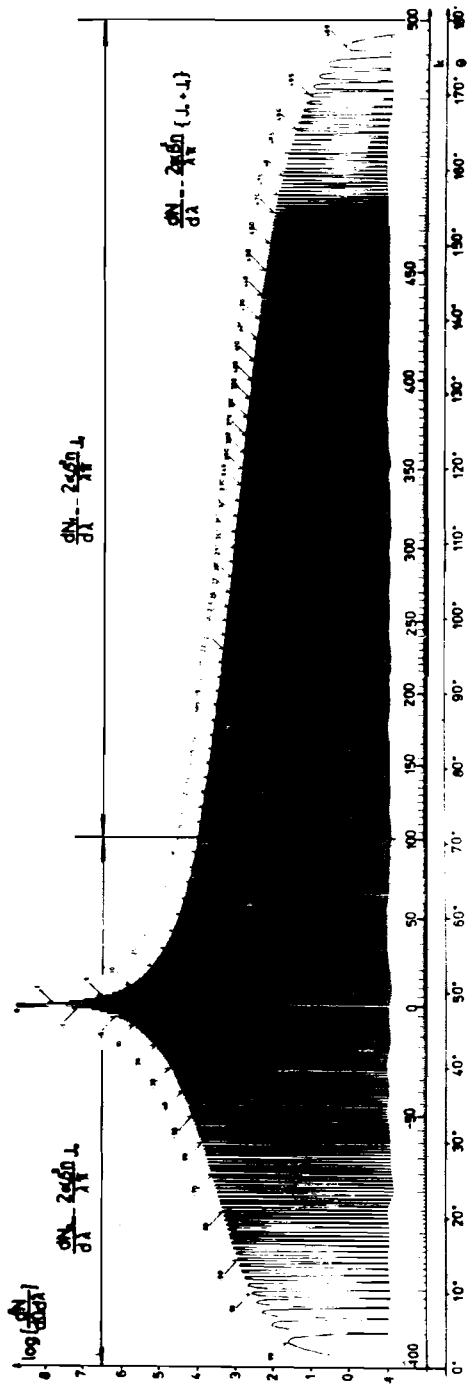


Рис. 5. Результат расчета углового распределения излучения по точной формуле Тамма (2) для параметров, удовлетворяющих условиям Тамма (31) и (32). Длина волны излучения  $\lambda = 400$  нм, скорость заряда  $\beta = 0,9999666\dots$ , коэффициент преломления среды  $n = 1,5$ , длина пути  $\ell = 200$  л. Вертикальной линией при  $k = 100$  обозначено разделение Таммом функции углового распределения на две части. Интегрированием первой части по всем углам и делением результата на длину пути  $\ell$  Тамм получил основную формулу теории ИВЧ Тамма-Франка (33).

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}^{\text{Тамм}}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{a \ell^2 n}{\lambda^3} \text{Sin}^2 \theta_{\text{чер}} .$$

Поэтому, если причиной возникновения излучения  $J_1$ , представленного в правой части углового распределения, как это отмечает Тамм в своей работе [1], является тормозное излучение, естественно, такого же происхождения должно быть и излучение  $J_0$ , представленное левой частью этого же углового распределения. Разделение углового распределения на две части не может изменить первопричину возникновения этого излучения.

По нашему мнению, угловое распределение, описываемое формулой Тамма (2), есть результат интерференции двух тормозных излучений, испущенных в среде в моменты времени  $\pm t_0$  при мгновенном ускорении и торможении заряда. Парадоксально, но в таком случае мы вынуждены сделать вывод о том, что движение заряда с постоянной скоростью между этими моментами времени влияет лишь на результат интерференции, но не является причиной возникновения излучения.

При  $\beta n > 1$  возникают условия для образования главного интерференционного максимума и прилегающих к нему максимумов низких порядков, что существенным образом отражается на всех свойствах результирующего излучения.

#### 2.4. Полная интенсивность излучения

Как видно из формулы (23), интерференция двух тормозных излучений, амплитуды которых в начальный момент находятся в противофазе, приводит к своеобразной зависимости свойств полной интенсивности результирующего излучения от разности фаз  $X$ , возникающей вследствие разного хода обоих излучений. Изменение свойств излучения, возникшего в результате такой интерференции, удобно проследить с помощью формулы (2), по зависимости его полной интенсивности от длины пути  $\ell$ , пройденного частицей, от которой зависит разность фаз  $X$  (см. рис. 6).

При  $\ell = 0$  ( $X = 0$ ), как это видно из (2), излучения не будет. Оба тормозных излучения, возникших при мгновенном ускорении и последовательном мгновенном торможении заряда, полностью гасят друг друга, и результирующее излучение имеет нулевую интенсивность. Однако уже при небольшой разности фаз ( $X \ll \pi$ ), возникшей, например, при удалении точек испускания излучения на расстояние  $\ell \ll \lambda$ , гашение тормозных излучений будет неполное, и возникает своеобразное результирующее излучение с угловым распределением вида

$$\frac{d^2 N_{n \neq 1}}{d\Omega d\lambda} = - \frac{a n \ell^2}{\lambda^3} \text{Sin}^2 \theta . \quad (38)$$

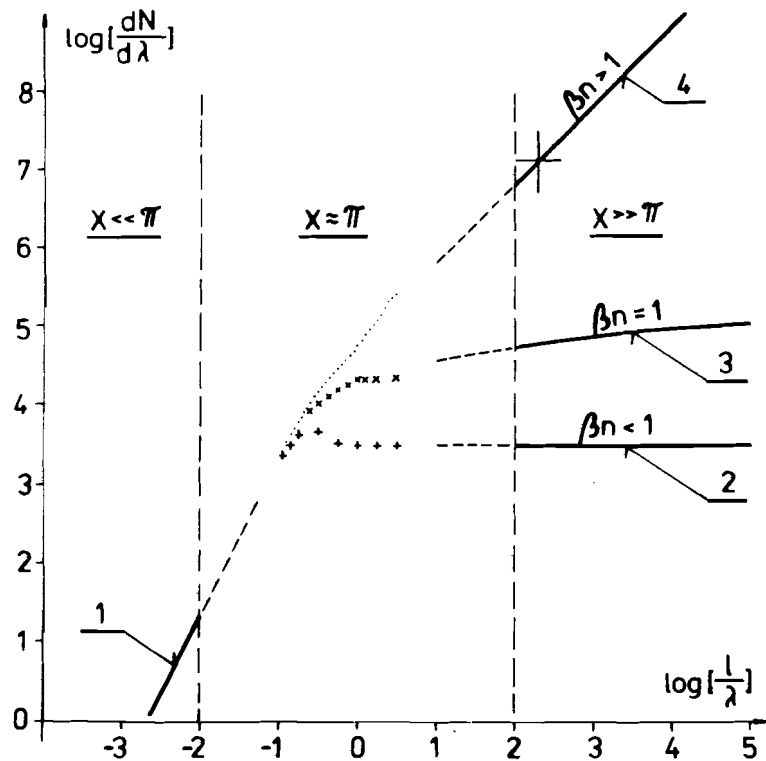


Рис. 6. Зависимости полных интегралов углового распределения излучения  $dN/d\lambda$  от длины пути заряда в среде. Расчет выполнен по точной формуле Тамма (2) — кривые 2, 3, 4 в области  $l/\lambda \approx 1$  ( $X \approx \pi$ ) и по ее асимптотическим приближениям (38), (35), (39), (37) — кривые 1, 2, 3, 4 в области  $l/\lambda \ll 1$  и  $l/\lambda \gg 1$ . Кривая 2 — допороговый случай  $\beta n < 1$  ( $\beta = 0,4496124\dots$ ). Кривая 3 — заряд имеет пороговую скорость  $\beta n = 1$  ( $\beta = 0,666518\dots$ ). Кривая 4 — скорость заряда в среде выше порога возникновения ИВЧ  $\beta n > 1$  ( $\beta = 0,9999666\dots$ ). Крестиком на этой кривой обозначен результат численного интегрирования углового распределения, приведенного на рис. 5.

Сравнивая (38) с (21), видим, что свойства тормозного излучения, являющегося первопричиной возникновения этого нового когерентного излучения, сильно изменены. Результирующее излучение (38) такого "элементарного источника" не зависит от  $\beta$ , квадратично зависит от  $l$ , имеет спектр типа  $d\lambda/\lambda^3$  и в целом имеет другой вид углового распределения, чем тормозное излучение.

В области значений разности фаз  $X$ , сравнимых с  $\pi$  ( $X \approx \pi$ ), результирующее излучение сильно меняет свои свойства и отличается

от свойств излучения "элементарного излучателя" (38). В его угловом распределении появляются интерференционные максимумы и нулевые интерференционные минимумы (см. рис. 4г), вследствие чего и полная интенсивность осциллирует (с убывающей амплитудой осцилляций). С дальнейшим увеличением  $X$  амплитуда осцилляций становится пренебрежимо малой и кривая полной интенсивности излучения плавно выходит на свои предельные значения (асимптотики) для  $l \rightarrow \infty$ . Эти предельные значения существенным образом зависят от величины  $\beta n$ . При  $\beta n < 1$  полная интенсивность не зависит от  $l$  и результирующее излучение по своим характеристикам совпадает с тормозным излучением. При  $\beta n > 1$  результирующее излучение в пределе  $l \rightarrow \infty$  совпадает с излучением Вавилова-Черенкова. В пороговом случае  $\beta n = 1$  имеем промежуточный случай и полную интенсивность, как это показал еще Тамм<sup>1/1</sup>, можно выразить как

$$\frac{dN_{\beta n=1}^{\text{Тамм}}}{d\lambda} = \frac{2\alpha\beta^2 n}{\lambda\pi} J_{\text{пор}} \quad (39)$$

где  $J_{\text{пор}} = \ln(4\gamma\ell\pi/\beta\lambda)$ ,  $\gamma = \exp(C) = 1,781\dots$ ,  $C = 0,5772\dots$  — постоянная Эйлера-Маскерони.

На рис. 6 в области  $l/\lambda \approx 1$  кривые 2, 3, 4 рассчитаны по точной формуле Тамма (2), в остальных случаях ( $l/\lambda \ll 1$  и  $l/\lambda \gg 1$ ) — по предельным выражениям (38), (35), (39), (37), кривые 1, 2, 3, 4 соответственно. Крестиком на рис. 6 при  $l/\lambda = 200$  отмечено значение полной интенсивности излучения, полученное численным интегрированием углового распределения, приведенного на рис. 5. Насколько результаты вычислений полной интенсивности излучения по асимптотическим формулам (30), (33), (35), (37) отличаются от вычислений по точной формуле Тамма (2) для этого же случая ( $l/\lambda = 200$ ), можно проследить по табл. 1÷4 (см. приложение).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируя результаты этой работы, можно сказать, что излучение заряда при его движении с постоянной скоростью на ограниченном участке пути (задача Тамма) представляет собой результат интерференции двух тормозных излучений, возникших в начале и в конце движения. Это утверждение особенно наглядно для случая движения заряда в вакууме (см. раздел 2.1), когда излучение заряда, движущегося с постоянной скоростью, запрещено законами электродинамики.

В постановке задачи Тамма движение заряда с постоянной скоростью на расстоянии  $l$  между моментами ускорения и торможения заряда, в начале и в конце его пути, влияет лишь на результат интерференции, не служит причиной возникновения излучения.

Как было показано еще Таммом <sup>1/</sup>, а также как это следует из нашей работы, излучение, испущенное зарядом при его движении с постоянной скоростью на конечном участке траектории  $l$  (в пределе  $l \rightarrow \infty$ ), имеет те же характеристики, что и ИВЧ, следующее из теории Тамма и Франка <sup>6/</sup>. Поскольку теория Тамма и Франка является предельным случаем теории Тамма, можно считать, что вышеприведенный вывод относится и к ней.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору Б.М.Болотовскому за ценные обсуждения и замечания, А.П.Кобзеву за обсуждения, инициировавшие данную работу.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

к	Расчет по точной формуле Тамма (2)	Расчет по приближенной формуле (30)
$dN/d\lambda$	$-100 \div +500$	$-1,2731896 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$

Таблица 2

к	Расчет по точной формуле Тамма (2)	Расчет по приближенной формуле (37) (совпадает с (33))
$dN_0/d\lambda$	$-100 \div +100$	$-1,2723496 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$

Таблица 3

к	Расчет по точной формуле Тамма (2)	Расчет по приближенной формуле (35)
$dN_1/d\lambda$	$+100 \div +500$	$-8,41392 \times 10^3 \text{ м}^{-1}$

Таблица 4

к	Расчет по точной формуле Тамма (2) (главный максимум)*	Расчет по формуле Тамма и Франка (33)
$dN/d\lambda$	$-1 \div +1$	$-1,1500996 \times 10^7 \text{ м}^{-1}$

\* Интегрирование углового распределения (2) в пределах углов только главного максимума ( $k = 0$ ), как это было показано в работе <sup>2/</sup>, дает

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{2\alpha l}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) I + \frac{2\alpha}{\pi n^2 l}, \quad (1)$$

где

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin^2 X}{X^2} dX = 2,836303148.$$

Для случая, приведенного на рис. 5, следовательно, имеем

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{2\alpha l}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \cdot 2,836303148 = -\frac{0,041395 l}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = (2) = -1,1500996 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. – *J. Phys.*, 1939, 1, 439.
2. Зрелов В.П. и др. Препринт ОИЯИ Р1-82-784, Дубна, 1982; *NIM*, 1983, v.215, p.141.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973, с.224.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976, с.66.
5. Газазян А.Д. и др. – *Изв. АН Арм.ССР*, 1963, XVI, №2, с.69-78.
6. Тамм И.Е., Франк И.М. – *Докл. АН СССР*, 1937, 14, с.107.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 января 1988 года.