сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

С 844

Р2-88-209

В.Н.Стрельцов, Е.А.Строковский

# ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ 4-СКОРОСТЕЙ

1988

1. Понятие 4-скорости (или ковариантной скорости) впервые ввел, по-видимому, Пуанкаре (см., например,[1]). По определению

$$u^i = dx^i/d\tau, \quad i = 0,1,2,3, \tag{1}$$

где $\tau$ — инвариантное собственное время. Из этого определения следует, что величина $u^i$ является 4-вектором единичной длины, а именно

$$u^i u_i = (u^o)^2 - (\vec{u})^2 = 1. \tag{2}$$

(Здесь и далее используем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$). Вектор энергии-импульса связан с 4-скоростью известным соотношением

$$p^i = mu^i, \tag{3}$$

где $m$ — масса покоя частицы.

В литературе, в том числе учебной, обсуждение свойств 4-скорости ограничивается, как правило, ее определением, указанием на свойство (2) и упоминанием, что закон преобразования 4-скорости из одной системы отсчета в другую такой же, как у координатного вектора $x^i$. Хотя иногда приводятся формулы для нахождения компонент 4-скорости при частных преобразованиях Лоренца (см., например,[2]), обычно затем обсуждают закон преобразования обычной (трехмерной) скорости при общих преобразованиях Лоренца. Соответствующие формулы называют законом (или теоремой) сложения скоростей.

2. Цель данной заметки состоит в нахождении аналогичного закона для компонент 4-скорости. По сути дела, такой закон позволяет найти относительную 4-скорость двух частиц, т.е. компоненты 4-скорости частицы 1 в системе покоя частицы 2, если известны 4-скорости этих частиц в произвольной системе отсчета $S$. Ясно, что для этого нужно выполнить лоренцево преобразование из системы $S$ в систему $S'$, где частица 2 покоится (т.е. ее 4-скорость $u_2' = (1,0)$). Как известно (см., например,[3]), при таком преобразовании компоненты 4-вектора энергии-импульса частицы 1 в системе $S'$ есть

$$\begin{cases} E' = \gamma_2 (E_1 - \vec{\beta}_2 \vec{p}_1), \\ \vec{p}_1{}' = \vec{p}_1 + \gamma_2 \vec{\beta}_2 \left( \dfrac{\gamma_2 \vec{\beta}_2 \vec{p}_1}{1 + \gamma_2} - E_1 \right), \end{cases} \tag{4}$$

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

где $\gamma_2$ и $\vec\beta_2$ — гамма-фактор частицы 2 и ее 3-скорость, взятые в системе S. Поскольку

$$u_1^\circ = E_1/m_1 = \gamma_1, \quad \vec u_1 = \vec p_1/m_1 = \gamma_1\vec\beta_1,$$
$$u_2^\circ = E_2/m_2 = \gamma_2, \quad \vec u_2 = \vec p_2/m_2 = \gamma_2\vec\beta_2 \tag{5}$$

(см. (3)), то отсюда немедленно получаем, что

$$\begin{cases} u_1^{\circ\prime} = u_2^\circ u_1^\circ - \vec u_2 \vec u_1 = u_1^i u_{2i} = (u_1\cdot u_2), \\ \vec u_1^{\,\prime} = \vec u_1 + \vec u_2\left(\dfrac{\vec u_2\cdot\vec u_1}{1+u_2^\circ} - u_1^\circ\right), \end{cases} \tag{6$'$}$$

где $(u_1\cdot u_2)$ — скалярное произведение 4-векторов $u_1$, $u_2$. По существу (6′) и есть *правило сложения для компонент 4-скоростей* $u_1$ и $u_2$, а величины $u_1^{\circ\prime}$ и $\vec u_1^{\,\prime}$ есть компоненты относительной 4-скорости, т.е. 4-скорости частицы 1 в системе покоя частицы 2. Поэтому в дальнейшем вместо $u_1^{\circ\prime}$ и $\vec u_1^{\,\prime}$ будем использовать обозначения $u_{12}^\circ$ и $\vec u_{12}$. Удобнее записать (6′) в более симметричном виде:

$$\begin{cases} u_{12}^\circ = (u_1\cdot u_2), & (6а) \\ \vec u_{12} = \vec u_1 - \vec u_2\cdot\dfrac{(u_1\cdot u_2)+u_1^\circ}{1+u_2^\circ} & (6б) \end{cases}$$

(легко убедиться, что условие (2) для относительной 4-скорости $u_{12}$ действительно выполняется).

Формулы (6) являются, в сущности, другой (по сравнению с общепринятой) формой записи общего лоренцева преобразования компонент произвольного 4-вектора A из системы отсчета S в систему S′, движущуюся относительно S с 4-скоростью $u = (u^\circ, \vec u) = (\gamma, \gamma\vec\beta)$ :

$$\begin{cases} A^{\circ\prime} = (u\cdot A), \\ \vec A^{\prime} = \vec A - \vec u\cdot\dfrac{(uA)+A^\circ}{1+u^\circ} = \vec A - \vec u\cdot\dfrac{A^\circ + A^{\circ\prime}}{u^\circ+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Такая форма записи общего лоренцева преобразования представляется нам гораздо более удобной для практических целей, чем общепринятая.

Как видно из (6), величина временной компоненты относительной 4-скорости равна скалярному произведению 4-скоростей $u_1$ и $u_2$. Этот же инвариант определяет и абсолютную величину пространственной части относительной 4-скорости, поскольку

$$(\vec u_{12})^2 = (u_{12}^\circ)^2 - 1. \tag{8}$$



(Однако $\vec u_{12} \neq -\vec u_{21}$ в общем случае). Отметим, что величина $(\vec u_{12})^2$ является релятивистским инвариантом, связанным с тензором

$$u_{1k} = \epsilon_{1k\ell m} u_1^\ell u_2^m,$$

(где $\epsilon_{1k\ell m}$ — символ Леви-Чивита), а именно:

$$\begin{cases} (\vec u_{12})^2 = -\dfrac{1}{2} u^{1k} u_{1k} = \vec E^2 - \vec H^2, \\ \vec E = \vec u_1 u_2^\circ - \vec u_2 u_1^\circ, \\ \vec H = \vec u_1 \times \vec u_2. \end{cases} \tag{9}$$

(Второй инвариант, связанный с тензором $u_{1k}$ и пропорциональный $\vec E\cdot\vec H$, тождественно равен нулю). Формулы (6а), (8) или (9) представляются особенно удобными для практических приложений.

3. Понятие относительной 4-скорости позволяет непосредственно обобщить известное нерелятивистское выражение

$$d\nu = \sigma\cdot v_{отн.}\cdot n_1\cdot n_2\cdot dVdt \tag{10}$$

для числа столкновений $d\nu$, происходящих в объеме dV за время dt (см., например,[4]), на релятивистский случай. (Здесь $\sigma$ — сечение взаимодействия, $n_1$ и $n_2$ — плотности частиц). Релятивистское обобщение формулы (10) выглядит следующим образом:

$$d\nu = \sigma\cdot|\vec u_{12}|\cdot n_1^{(o)}\cdot n_2^{(o)}\cdot dVdt, \tag{11}$$

где $n_1^{(o)}$ и $n_2^{(o)}$ — плотности пучков частиц, взятые в их системах покоя. Эта формула гораздо нагляднее общепринятой записи[4] с использованием так называемого мёллеровского потока.

Пользуясь (6а), легко связать величину временной компоненты относительной 4-скорости и модуль ее пространственной части с переменной $b_{1k} = -(u_1 - u_k)^2$, используемой в релятивистской ядерной физике[5]:

$$\begin{cases} u_{12}^\circ = 1 + \dfrac{1}{2} b_{12}, \\ (\vec u_{12})^2 = b_{12}\left(1 + \dfrac{1}{2} b_{12}\right) \end{cases} \tag{12}$$

(заметим, что 4-вектор $(u_1 - u_2)$, вообще говоря, не может быть 4-скоростью, т.к. он не обладает свойством (2)).

Наконец, в случае равных (и ненулевых) масс частиц 1 и 2 временная компонента относительной 4-скорости определяет также компоненты 4-скоростей частиц 1 и 2 в системе их центра масс (с.ц.м.). В самом деле, можно показать, что в этом случае 4-скорость системы центра масс есть

$$u_c^\circ = \frac{u_1^\circ + u_2^\circ}{\sqrt{2[(u_1 \cdot u_2)+1]}} = \frac{u_1^\circ + u_2^\circ}{\sqrt{2(u_{12}^\circ + 1)}}, \quad \vec{u}_c = \frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{\sqrt{2[(u_1 \cdot u_2)+1]}} = \frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{\sqrt{2(u_{12}^\circ + 1)}}, \tag{13}$$

а компоненты 4-скоростей частиц 1 и 2 после перехода в с.ц.м. есть

$$\begin{cases} u_{1c}^\circ = u_{2c}^\circ = \sqrt{\dfrac{u_{12}^\circ + 1}{2}}, \\ |\vec{u}_{1c}| = |\vec{u}_{2c}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(u_{12}^\circ - 1)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b_{12}}. \end{cases} \tag{14}$$

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *Логунов А.А. К работам Анри Пуанкаре "О динамике электрона" М.: изд-во МГУ, 1984, с.91.*
2. *Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983, с.110.*
3. *Бюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц. М.: Мир, 1975, с.25.*
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967, с.53.*
5. *Балдин А.М. – ДАН СССР, 1975, 222, с.1064.*



Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1988 года.





Стрельцов В.Н., Строковский Е.А. Р2-88-209


**Правило сложения 4-скоростей**


Получено правило сложения 4-скоростей. Показано, что временная компонента относительной 4-скорости двух частиц определяется релятивистским инвариантом — скалярным произведением 4-скоростей этих частиц. При этом квадрат модуля пространственной части относительной 4-скорости $|\vec{u}_{12}|^2$ представляет собой скалярное произведение (двухкратную свертку) соответствующих косых произведений исходных 4-скоростей. С помощью $|\vec{u}_{12}|$ выражение для числа столкновений частиц представлено в явном лоренц-инвариантном виде.



Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Л.Н.Барабаш



Strel'tsov V.N., Strokovsky E.A. P2-88-209


**The Addition Rule for 4-velocities**


The addition rule for 4-velocities is obtained. It is stressed that the time component of the relative 4-velocity of two particles is defined by a relativistic invariant quantity, namely, by the scalar product of their 4-velocities. The modulus squared of the spatial component of the relative 4-velocity, i-e $|\vec{u}_{12}|^2$, is just the scalar product (double contraction) of the corresponding skew products of the initial 4-velocities. Using the $|\vec{u}_{12}|$, the relation for the number of collisions is presented in explicitly Lorenz-invariant form.



The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988