сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-182

М.Н.Тентюков

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ГИЛЬБЕРТА И ПСЕВДОТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА

1988

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показано в работах[1,2], для определения импульсно-энергетических локальных характеристик гравитационного поля необходимо введение фоновой связности. Последовательный учет фоновой связности приводит к тому, что псевдотензоры становятся тензорами. Тензор, соответствующий псевдотензору Эйнштейна, при этом получается методом Лагранжа, а тензор Папапетру — методом Гильберта, если лагранжиан выбрать в виде

$$L = \sqrt{-g}\; g^{mn}\,(P^{a}_{mb}\, P^{b}_{an} - P^{a}_{sa}\, P^{s}_{mn}), \tag{1}$$

где

$$P^{m}_{kn} = \check{\Gamma}^{m}_{kn} - \Gamma^{m}_{kn} \tag{2}$$

— тензор аффинной деформации, $\check{\Gamma}^{m}_{kn}$ — коэффициенты фоновой связности, а Γ^{m}_{kn} — кристоффели для g_{ab}.

Заметим, что тензор Эйнштейна можно рассматривать на фоне произвольной аффинной связности, а тензор Папапетру требует введения фоновой метрики, фоновую же связность при этом следует считать кристоффелевой для фоновой метрики.

В 1940 году Розенфельд ([4], см. также [6]) установил соответствие между каноническим тензором энергии-импульса (тензором Лагранжа) и метрическим (тензором Гильберта), а также показал, что тензор Белинфанте[5] совпадает с тензором Гильберта, если метрику после выполнения вариации положить равной метрике Минковского

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}\{1;\ -1;\ -1;\ -1;\ \}. \tag{3}$$

Попытаемся установить аналогичные соотношения, связывающие канонический тензор Лагранжа с тензором праэнергии, определенным в работе[1] как вариационная производная

$$\theta^{mn}_{k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\;\frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^{k}_{mn}} \tag{4}$$

от функционала действия

$$S = \int L dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \tag{5}$$

по фоновой связности. В формуле (5)

$$L = L(g_{mn};\ \partial_k g_{mn};\ \check{\Gamma}^k_{mn}) \tag{6}$$

— скалярная плотность веса +1. Связность $\check{\Gamma}^k_{mn}$ считаем симметричной по нижним индексам, что означает отсутствие кручения.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для произвольного лагранжиана вида (6) введем следующие обозначения:

$$\Theta^{mn}_k = \frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}} = \sqrt{-g}\ \theta^{mn}_k; \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\Psi^{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \psi^{mn} = \frac{\delta S}{\delta g_{mn}}; \tag{8}$$

$$t^k_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,k}} \check{\nabla}_a g_{mn} - L\delta^k_a; \tag{9}$$

$$\sigma^{jk}_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} (g_{ma}\delta^k_n + g_{an}\delta^k_m), \tag{10}$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}};\quad \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial g_{mn}} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}}$$

— обычные эйлеровы производные, запятая перед индексом означает частную производную. $\check{\nabla}_a$ — это ковариантная производная относительно фоновой связности. Все введенные величины представляют собой тензорные плотности веса +1. t^k_a имеет смысл плотности канонического тензора энергии-импульса. В таком виде он встречается у Белинфанте [6].

Приравнивая к нулю $\delta_L S$ -вариацию действия (5) при произвольных инфинитезимальных преобразованиях координат, можно получить ряд полезных соотношений. Прежде всего

$$\sigma^{(mn)}_k = -\Theta^{mn}_k. \tag{11}$$

Это выражение позволяет доказать, что, если тензор g_{ik} невырожден, в лагранжиан (6) величины Γ^m_{kn} и $\check{\Gamma}^m_{kn}$ могут входить только в комбинации (2). Следовательно, требование инвариантности действия для лагранжиана (6) однозначно приводит к тому, что L имеет вид

$$L = L(g_{mn};\ P^k_{mn}), \tag{12}$$

где P^k_{mn} равно (2). Тогда

$$-\frac{\partial L}{\partial \Gamma^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}} = \Theta^{mn}_k; \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial g_{kn,m}} = -\frac{1}{2}(\bar{\Theta}^{kmn} + \bar{\Theta}^{nmk} - \bar{\Theta}^{mkn}), \tag{14}$$

где

$$\bar{\Theta}^{kmn} = g^{ka}\Theta^{mn}_a;$$

$$\sigma^{pk}_m = -\Theta^{pk}_m + g^{pa}g_{em}\Theta^{ek}_a - g^{ka}g_{em}\Theta^{ep}_a. \tag{15}$$

Рассматривая $\check{\nabla}_j L$, можно убедиться в справедливости тождества

$$-t^k_a = \check{\nabla}_j \sigma^{jk}_a + \Psi^{km} g_{ma}. \tag{16}$$

Учитывая (14) и определение (9), выражаем t^k_a через Θ^{mn}_a и L:

$$t^p_a = -\frac{1}{2}(\bar{\Theta}^{mpk} + \bar{\Theta}^{kpm} - \bar{\Theta}^{pmk})\check{\nabla}_a g_{mk} - \delta^p_a L. \tag{17}$$

Заметим, что формула (16) может быть получена непосредственно из вариационного метода. Из того же метода следует соотношение

$$-\check{\nabla}_k t^k_a = \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} + \frac{1}{2}\sigma^{mn}_k \check{R}^k_{mna} + \frac{1}{2}\Psi^{mn}\check{\nabla}_a g_{mn}, \tag{18}$$

где

$$\check{R}^k_{amn} = \partial_a \check{\Gamma}^k_{mn} - \partial_m \check{\Gamma}^k_{an} + \check{\Gamma}^k_{as}\check{\Gamma}^s_{mn} - \check{\Gamma}^k_{ms}\check{\Gamma}^s_{an}$$

— тензор кривизны фоновой связности.

Выражая из (16) $\check\nabla_k t^k_a$ и подставляя в (18), получаем:

$$\Theta^{mn}_k \check R^k_{amn} + \check\nabla_m \check\nabla_n \Theta^{mn}_a = \nabla_k (\Psi^{mk} g_{ma}). \tag{19}$$

Если в (19) перейти от плотностей к тензорам, получится следующее соотношение:

$$(\check\nabla_m - P_m)(\check\nabla_n - P_n)\,\theta^{mn}_a + \theta^{mn}_k \check R^k_{amn} = \nabla_k (\psi^{mk} g_{ma}), \tag{20}$$

где $P_m = P^s_{ms}$ — ковектор аффинной деформации.

Это тождество для лагранжиана (1) впервые было найдено в работе [1], а для произвольного лагранжиана вида (6) — в работе [2].

Заметим, что (19) можно получить из (5) значительно проще, так, как это и было сделано в [2], если ограничиться инфинитезимальными векторными полями, исчезающими на границе области интегрирования. Формулы же (11), (16) и (18) получаются в результате учета вариации области интегрирования.

Соотношения (11), (16), (18) и (19) остаются справедливыми независимо от предположения о невырожденности g_{mn}, если вместо (19) написать

$$\Theta^{mn}_k \check R^k_{amn} + \check\nabla_m \check\nabla_n \Theta^{mn}_a = \check\nabla_k (\Psi^{mk} g_{ma}) - \frac{1}{2}\Psi^{mn} \check\nabla_a g_{mn}.$$

Вводя фоновую метрику $\check g_{ik}$ и полагая коэффициенты фоновой связности равными кристоффелям для $\check g_{ik}$, определим следующие величины:

$$-\frac{\delta S}{\delta \check g_{mn}} = \frac{1}{2}\Theta^{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{-\check g}\;\theta^{mn}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \check g_{mn,j}} (\check g_{ma}\delta^t_n + \check g_{na}\delta^t_m) = \nu^{jt}_a; \tag{22}$$

$$S^{jk}_a = \nu^{jk}_a + \sigma^{jk}_a. \tag{23}$$

Снова, требуя $\delta_L S = 0$, получаем:

$$\Theta^{\cdot s}_p = t^s_p + \check\nabla_t S^{ts}_p + \Psi^{is} g_{ip}; \tag{24}$$

$$\check\nabla_k t^k_p = -\frac{1}{2}\Psi^{ik}\check\nabla_p g_{ik} - \frac{1}{2} S^{st}_a \check R^a_{stp}; \tag{25}$$

$$\check\nabla_s \Theta^{\cdot s}_p = \nabla_s (\Psi^{is} g_{ip}); \tag{26}$$

$$S^{\cdot st}_p = -S^{ts}_p, \tag{27}$$

где $\Theta^{\cdot s}_p = \check g_{ap}\Theta^{as}$.

Тензор θ^{mn} — не что иное, как метрический тензор энергии-импульса гравитационного поля (тензор Гильберта). Тождество (26) можно переписать в виде

$$\check\nabla_s \theta^{as} = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\check g}}\check g^{ap}\nabla_s(\psi^{is} g_{ip}),$$

что совпадает с формулой (87) работы [1], полученной там для лагранжиана (1). Соотношение (24) для произвольного (материального) поля на фоне римановой метрики впервые было найдено Розенфельдом [4].

Лагранжиан L можно выбрать в виде (1). Тензор θ^{mn}_a при таком выборе лагранжиана найден в [1] и равен

$$\theta^{mn}_a = (\check\nabla_a - P_a)\, g^{mn} - (\check\nabla_k - P_k)\, g^{k(m}\delta^{n)}_a.$$

Непосредственным вычислением t^a_b по формуле (17) можно убедиться, что $(1/\sqrt{-g})\,t^a_b$ совпадает с тензором

$$E^a_b = (P^a_{mn} - P^s_{ms}\delta^a_n)(\check\nabla_b - P^k_{bk})\, g^{mn} - \frac{1}{\sqrt{-g}} L\delta^a_b, \tag{28}$$

введенным в работе [2].

Определив из (1) t^k_a, фоновую связность $\check\Gamma^k_{mn}$ можно считать примитивной [3]. Тензор кривизны такой связности равен нулю, и величина $-(1/2)\,\psi^{is}$ в этом случае оказывается равной тензору Эйнштейна G^{is}:

$$-\frac{1}{2}\psi^{is} = G^{is} = R^{is} - \frac{1}{2} R g^{is}. \tag{29}$$

Если координатная карта выбрана так, что $\check\Gamma^k_{mn} = 0$, то тензор $(1/\sqrt{-g})\,t^a_b$, равный для лагранжиана (1) тензору (28), совпадает с псевдотензором Эйнштейна, введенным в [7].

Считая $\check\Gamma^k_{mn}$ кристоффелевой (не обязательно примитивной!), найдем из (1) θ^{mn}. Если после этого положить $\check g_{mn}$ равной (3), то, как показано в [1], θ^{mn} совпадает с тензором Папапетру [8]. Соотношение (29) при этом опять окажется справедливым.

Заметим, что следующее из (26) равенство

$$\check{\nabla}_s \theta_p^{\cdot s} = 0$$

в данном случае будет выполняться независимо от выполнения уравнений $\Psi^{is} = 0$, ввиду (26), (29) и свернутых тождеств Бианки — Падова

$$\nabla_s G^{is} = 0.$$

3. ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ ВТОРОГО РАНГА И СИММЕТРИЧНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Пусть лагранжиан имеет вид (6). Запишем вариацию действия общего вида:

$$\delta S = \int [\frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}} \delta \check{\Gamma}^k_{mn} + \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} \delta g_{mn} + \partial_j (\frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} \delta g_{mn} + \tag{30}$$

$$+ L \delta x^j)] dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .$$

Имея в виду инвариантность действия, потребуем обращения δS в нуль при вариациях Ли:

$$\delta x^j = \xi^j ;$$

$$\delta \check{\Gamma}^k_{mn} = -(\check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k + \check{R}^k_{amn} \xi^a); \tag{31}$$

$$\delta g_{mn} = -(g_{ms} \check{\nabla}_n \xi^s + g_{ns} \check{\nabla}_m \xi^s + \xi^s \check{\nabla}_s g_{mn}),$$

где ξ^a — произвольное инфинитезимальное векторное поле. Подставляя (31) в (30) и используя определения (7), (8), (9), (10), получаем

$$-\delta S = \int [\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k + \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} \xi^a + \frac{1}{2} \Psi^{mn} \check{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a +$$

$$+ \Psi^{mn} g_{ma} \check{\nabla}_n \xi^a + \partial_j (\sigma^{jk}_a \check{\nabla}_k \xi^a + t^j_a \xi^a)] dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .$$

Поскольку для любой векторной плотности веса +1 A^i имеет место соотношение $\partial_i A^i = \check{\nabla}_i A^i$, то отсюда следует

$$-\delta S = \int [\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k + \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} \xi^a + \Psi^{mn} g_{ma} \check{\nabla}_n \xi^a +$$

$$+ \frac{1}{2} \Psi^{mn} \check{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a + \sigma^{mn}_a \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^a + \check{\nabla}_k \xi^a \cdot \check{\nabla}_m \sigma^{mk}_a + \tag{32}$$

$$+ \check{\nabla}_k t^k_a \cdot \xi^a + t^k_a \check{\nabla}_k \xi^a] dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 .$$

Воспользуемся тем, что в силу произвольности области интегрирования подынтегральное выражение при $\delta S = 0$ должно обратиться в нуль. Произвольность вектора ξ^a означает, что локально в качестве ξ^a, $\partial_k \xi^a$, $\partial_m \partial_k \xi^a$ можно брать любые величины, только последняя должна быть симметрична по нижним индексам.

Рассмотрим член

$$(\Theta^{mn}_k + \sigma^{mn}_k) \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k = (\Theta^{mn}_k + \sigma^{mn}_k) \partial_m \partial_n \xi^k + A,$$

где A не содержит $\partial_m \partial_n \xi^k$. Из требования $\delta S = 0$ следует антисимметрия $(\Theta^{mn}_k + \sigma^{mn}_k)$ по m и n, а так как $\Theta^{mn}_k = \Theta^{nm}_k$, это означает, что имеет место (11). Используя антисимметрию $(\Theta^{mn}_k + \sigma^{mn}_k)$, можно показать, что от всего рассматриваемого слагаемого останется только

$$\frac{1}{2} \sigma^{mn}_k \check{R}^k_{mna} \xi^a. \tag{33}$$

Далее, группируя слагаемые, содержащие $\partial_k \xi^a$, получаем (16). Остается рассмотреть члены, содержащие множителем ξ^a. Из (32) с учетом (33) следует

$$\Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} + \check{\nabla}_k t^k_a + \frac{1}{2} \sigma^{mn}_k \check{R}^k_{mna} + \frac{1}{2} \Psi^{mn} \check{\nabla}_a g_{mn} + \check{\Gamma}^k_{na} (\Psi^{mn} g_{mk} + \check{\nabla}_j \sigma^{jn}_k + t^n_k) = 0.$$

Отсюда в силу (16) имеем (18).

Нетрудно проверить, что для любой тензорной плотности веса +1 A^{mn}_a, антисимметричной по m и n, справедливо равенство

$$\check{\nabla}_n \check{\nabla}_m A^{mn}_a = \frac{1}{2} \check{R}^p_{mna} A^{mn}_p .$$

Пользуясь этой формулой, можно выразить из (16) $\check{\nabla}_k t^k_a$ и подставить в (18). Проделав это, получим (19). Чтобы преобразовать (19) к виду (20), следует воспользоваться легко проверяемым соотношением, справедливым для тензорного поля T любой валентности

$$\check{\nabla}_n (\sqrt{-g}\, T) = \sqrt{-g}\, (\check{\nabla}_n - P_n) T .$$

4. УЧЕТ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ g_{mn}

Если $\det(g_{mn}) \neq 0$, существует g^{mn} такой, что $g^{ma} g_{an} = \delta^m_n$.

Вернемся к (11). Имеем: $\sigma_k^{mn} = -\Theta_k^{mn} + \sigma_k^{[mn]}$. Рассмотрим выражение $\sigma^{kmn} = g^{ak}\sigma_a^{mn}$. Из определения (10) находим

$$\sigma^{kmn} = \frac{\partial L}{\partial g_{kn,m}} + \frac{\partial L}{\partial g_{nk,m}}, \tag{34}$$

то есть σ^{kmn} симметрична по k и n. Можно показать, что тогда $\sigma^{k[mn]}$ выражается через $\sigma^{k(mn)} = -\bar{\Theta}^{kmn}$:

$$\sigma^{e[pk]} = \bar{\Theta}^{epk} - \bar{\Theta}^{kep}.$$

Отсюда сразу следует (14) и (15), а с учетом (9) получаем (17).

Докажем, что из (11) следует, что лагранжиан имеет вид (12). Пусть

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma^k_{mn}} = \Pi_k^{mn}; \quad g^{kb}\,\Pi_k^{mn} = \Pi^{bmn}.$$

Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial g_{mn,a}} = \Pi_k^{ij}\,\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial g_{mn,a}}.$$

Так как

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{kb}\, g_{mn,a}\,(\delta^m_b\delta^n_j\delta^a_i + \delta^m_i\delta^n_b\delta^a_j - \delta^m_i\delta^n_j\delta^a_b),$$

находим

$$\frac{\partial L}{\partial g_{mn,a}} = \frac{1}{2}\,(\Pi^{man} + \Pi^{nma} - \Pi^{amn}). \tag{35}$$

Сравнивая (35) с (14), заключаем, что

$$\Pi_k^{mn} = -\Theta_k^{mn}. \tag{36}$$

Ничто не изменится, если в лагранжиане (6) выразить все $g_{mn,a}$ через Γ^k_{mn} и g^{ij}. Сделаем замену переменных

$$(g_{mn};\ \Gamma^k_{mn};\ \check{\Gamma}^k_{mn}) \to (g_{mn};\ \frac{1}{2}P^k_{mn};\ Q^k_{mn}),$$

где

$$(1/2)\,P^k_{mn} = (1/2)(\check{\Gamma}^k_{mn} - \Gamma^k_{mn});$$

$$Q^k_{mn} = (1/2)\,(\check{\Gamma}^k_{mn} + \Gamma^k_{mn}). \tag{37}$$

Имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial(1/2P^i_{ab})}\cdot\frac{\partial(1/2\,P^i_{ab})}{\partial\Gamma^k_{mn}} + \frac{\partial L}{\partial Q^i_{ab}}\cdot\frac{\partial Q^i_{ab}}{\partial\Gamma^k_{mn}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial(1/2\,P^i_{ab})}\cdot\frac{\partial(1/2\,P^i_{ab})}{\partial\check{\Gamma}^k_{mn}} + \frac{\partial L}{\partial Q^i_{ab}}\cdot\frac{\partial Q^i_{ab}}{\partial\check{\Gamma}^k_{mn}}.$$

Отсюда и из (37)

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma^k_{mn}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial L}{\partial(1/2P^k_{mn})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial L}{\partial Q^k_{mn}}; \tag{38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial L}{\partial(1/2P^k_{mn})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial L}{\partial Q^k_{mn}}. \tag{39}$$

Складывая (38) с (39) и учитывая (36), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial Q^k_{mn}} = 0,$$

то есть лагранжиан L не зависит от Q^k_{mn}. Таким образом, лагранжиан должен иметь вид (12).

5. ВВЕДЕНИЕ ФОНОВОЙ МЕТРИКИ

Частным случаем аффинной связности является кристоффелева связность

$$\check{\Gamma}^k_{mn} = \frac{1}{2}\,\check{g}^{ka}\,(\partial_m\check{g}_{an} + \partial_n\check{g}_{am} - \partial_a\check{g}_{mn}),$$

где $\check{g}_{mn}$ — риманова метрика. Можно показать /1/, что

$$\Theta_a^{mn}\,\delta\check{\Gamma}^a_{mn} = \frac{1}{2}\,T^{mkn}\check{\nabla}_k\delta\,\check{g}_{mn}, \tag{40}$$

где

$$T^{mkn} = \Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn}, \qquad \text{а } \Theta^{mkn} = \check{g}^{ma}\Theta_a^{kn}. \tag{41}$$

Вариация Ли для g_{mn} имеет вид

$$\delta \breve{g}_{mn} = -(\breve{g}_{ma}\breve{\nabla}_n \xi^a + \breve{g}_{na}\breve{\nabla}_m \xi^a). \tag{42}$$

Подставляя (40) в (30), получаем

$$\delta S = \int [\frac{1}{2} T^{mkn} \breve{\nabla}_k \delta \breve{g}_{mn} - \Psi^{mn} g_{ma} \breve{\nabla}_n \xi^a - \frac{1}{2} \Psi^{mn} \breve{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a +$$
$$+ \breve{\nabla}_j (-\sigma_a^{jk} \breve{\nabla}_k \xi^a - t_a^j \xi^a)]\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$$

или

$$\delta S = \int [-\breve{\nabla}_k (\frac{1}{2} T^{mkn}) \delta \breve{g}_{mn} - \Psi^{mn} g_{ma} \breve{\nabla}_n \xi^a - \frac{1}{2} \Psi^{mn} \breve{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a +$$
$$+ \breve{\nabla}_j (\frac{1}{2} T^{mjn} \delta \breve{g}_{mn} - \sigma_a^{jk} \breve{\nabla}_k \xi^a - t_a^j \xi^a)]\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \tag{43}$$

С другой стороны,

$$\delta S = \int [\frac{\delta S}{\delta \breve{g}_{mn}} \delta \breve{g}_{mn} + \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} \delta g_{mn} + \partial_j (\frac{\delta L}{\partial \breve{g}_{mn,j}} \delta \breve{g}_{mn} +$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} \delta g_{mn} + L \xi^j)]\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \tag{44}$$

Сравнивая (44) с (43), заключаем, что

$$-\breve{\nabla}_k (\frac{1}{2} T^{mkn}) = \frac{\delta S}{\delta \breve{g}_{mn}};$$

$$\Theta^{mn} = \breve{\nabla}_k T^{mkn};$$

$$\nu_a^{jt} = \frac{1}{2} T^{mjn} (\breve{g}_{ma} \delta_n^t + \breve{g}_{na} \delta_m^t);$$

$$\Theta_n^{\cdot m} = \breve{\nabla}_a \nu_n^{am}.$$

Проводя с (43) действия, аналогичные тем, что были проведены с (32), получим (24), (25), (27). Из (24) с учетом (25) следует (26).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе /2/ показано, что, если ограничиться инфинитезимальными преобразованиями координат, исчезающими на границе области интегрирования, из вариационного метода Гильберта следуют соотношения (20) и (26), связывающие уравнения движения для главного объекта на фоне симметричной аффинной связности, тензор праэнергии и метрический тензор Гильберта (если введена фоновая метрика). В данной работе предположение о неподвижности границы области интегрирования не делалось. В результате в вариацию действия вошел канонический тензор энергии-импульса, что позволило установить ряд соотношений, связывающих этот тензор с тензором праэнергии и, если введена фоновая метрика, — с тензором Гильберта. Доказана теорема, утверждающая, что лагранжиан скалярного действия, зависящий от g_{mn}, $\breve{\Gamma}^k_{mn}$ и $\partial_k g_{mn}$, имеет вид

$$L = L(g_{mn};\, P^k_{mn}).$$

В заключение хочу выразить глубокую признательность проф. Н.А.Черникову за постоянное внимание и большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черников Н.А. Сообщения ОИЯИ Р2-87-683, Дубна, 1987.*
2. *Черников Н.А. Препринт ОИЯИ Р2-88-27, Дубна, 1988.*
3. *Черников Н.А. – В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 17, М.: Энергоатомиздат, 1986, с.24-33.*
4. *Rosenfeld L. Mem.Acad.Roy.Belg., 1940, t.18, p.3-30.*
5. *Belinfante F. – Physica, 1939, vol.6, p.887-898.*
6. *Belinfante F. – Physica, 1940, vol. 7, p.449-474.*
7. *Эйнштейн А., Громмер Я. – В кн.: Эйнштейн А. Собр.научн.трудов. т.2, М.: Наука, 1966, с.198-222.*
8. *Papapetrou A. Proc.Roy.Irish.Acad., 1948, A52, p.11-23.*

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1988 года