объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-180

В.И.Иноземцев

КЛАССИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ САЗЕРЛЕНДА В ПОТЕНЦИАЛЕ МОРСА

Направлено в журнал "Physica Scripta"

1988

I. ВВЕДЕНИЕ

В работах [I,2] мною была доказана интегрируемость классических динамических систем с N степенями свободы, определяемых гамильтонианом

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_j^2}{2} + W(q_j) \right) + \sum_{j>k}^{N} U(q_j - q_k), \qquad \text{(I)}$$

где

$$U(\xi) = \frac{g^2}{sh^2 \xi}, \quad W(\xi) = \alpha\, ch\, 4\xi + \beta\, ch(2\xi + \gamma), \qquad (2)$$

а постоянные g, α, β, γ совершенно произвольны. Гамильтониан (I) описывает одномерное движение N взаимодействующих частиц во внешнем поле $W(\xi)$. В частном случае $W(\xi) = 0$ такие системы впервые были рассмотрены Сазерлендом [3] в квантовой механике. Интегрируемость классических систем Сазерленда была доказана лишь спустя несколько лет, причем сравнительно быстро были найдены явные решения уравнений движения [4].

Для потенциала $W(\xi) = exp(2\xi)$, получающегося из (2) путем бесконечного сдвига координат при $\alpha = 0$, полное рассмотрение классической задачи было проведено Адлером [5], показавшим, что уравнения движения в этом случае могут быть сведены к матричному уравнению Риккати и решены для произвольных начальных условий. Возможны лишь процессы рассеяния, причем значения энергий каждой из частиц при $t \to \pm\infty$ совпадают, т.е. рассеяние тривиально. В аналогичной квантовой задаче (до сих пор никем не рассмотренной) это соответствовало бы отсутствию дифракции падающей многомерной волны и тривиальной S-матрице. Случай $W(\xi) = exp(4\xi)$ был исследован Войцеховским [6] методом Адлера.

В работах [II] мы рассмотрели квантово-механические системы (I) в другой предельной ситуации, когда потенциал (2) имеет вид

$$W(\xi) = 8g^2\tau^2 \left(e^{4\xi} - e^{2\xi} \right), \qquad (3)$$

то есть системы Сазерленда в потенциале Морса (по сравнению с [II] для удобства несколько изменены обозначения: постоянная A в уравнении (3б) в [II] заменена на $2g\tau$ в (3), τ -произвольное положительное число).

Мы смогли найти явные выражения для дискретного спектра гамильтониана и сформулировать условия его существования. Ясно, что имеется также и непрерывный спектр, который, по-видимому, соответствует рассеянию без дифракции. Однако алгоритм построения волновых функций непрерывного спектра и S - матрицы не найден.

Целью данной работы является исследование классических систем Сазерленда во внешнем поле с потенциалом (3) и сравнение полученных результатов с квантово-механическими. Представлен способ нахождения явных решений нелинейных уравнений движения, основанный на использовании представления Лакса, указанного в [I]. Найдены условия существования равновесных N - частичных конфигураций, различные характеристики равновесных состояний, их сравнительно простая связь с дискретным спектром квантовых систем и положениями нулей обобщенных полиномов Лагерра. Доказано, что в общем случае финитное движение не является периодическим. Обсуждаются также некоторые проблемы, требующие дальнейшего рассмотрения.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Представление Лакса для систем (I-3), найденное в [I], имеет вид

$$\frac{dL}{dt} = [L, M], \quad L = \begin{pmatrix} \ell & \psi \\ +\psi & -\ell \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & \psi'/2 \\ -\psi'/2 & m \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где ℓ, m, ψ, ψ' - матрицы размером $N \times N$ со следующей структурой:

$$\begin{aligned} \ell_{jk} &= p_j \delta_{jk} + (1-\delta_{jk})\, ig\, [sh(q_j - q_k)]^{-1} \\ m_{jk} &= -i(1-\delta_{jk})\, ch(q_j - q_k)\, [sh(q_j - q_k)]^{-2} g - i\delta_{jk}\, g \sum_{s \neq j} [sh(q_j - q_s)]^{-2} \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{jk} &= \delta_{jk} \cdot 4\tau g \left(e^{2q_j} - 1/2\right), \quad \psi'_{jk} = \frac{\partial \psi_{jk}}{\partial q_j} = \delta_{jk}\, 8g\tau e^{2q_j} = \\ &= 2\psi_{jk} + 4\tau g\, \delta_{jk}, \quad 1 \le j, k \le N. \end{aligned} \qquad (6)$$

Легко убедиться, что матричное равенство (4) эквивалентно гамильтоновым уравнениям движения $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, $\dot{q}_j = p_j$, которые вследствие (4) обладают N интегралами движения $I_k = tr(L^{2k}),\ k=1,\dots N$.

Для явного интегрирования уравнений движения этого, однако, недостаточно, и необходимо построить еще N переменных типа "угла", канонически сопряженных $\{I_k\}$. В рассмотренном в /3/ случае Адлер нашел более простой способ решения, позволяющий привести уравнения движения к уравнению Риккати. Для потенциала (3) метод Адлера не приводит к цели, но эффективным оказывается другой прием, напоминающий использованный ранее для интегрирования систем Сазерленда при $W=0$ /4/.

Рассмотрим $2N \times 2N$ матрицу ранга N

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x_{jk} = x(q_j)\delta_{jk}. \tag{7}$$

Вычисляя коммутатор матриц $[X, M]$ и антикоммутатор $\{X, L\}$, найдем:

$$Y = -\frac{dX}{dt} + [X,M] + \{X,L\} = \begin{pmatrix} 0 & x(\psi - \psi'/2) \\ x(\psi - \psi'/2) & -\frac{dx}{dt} + [x,m] - \{x,l\} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В работе /I/ мною было показано, что матричное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = [y,m] + \{l, \frac{y'}{2}\} \tag{9}$$

выполняется лишь в том случае, когда матрицы l и m имеют вид (5), а y - диагональная матрица:

$$y_{jk} = y(q_j)\delta_{jk}, \quad y(q_j) = c_1 \exp(2q_j) + c_2 \exp(-2q_j) + c_3,$$

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные. При $c_1 = c_3 = 0$ имеем, очевидно, $y'/2 = -y$; подставляя это равенство в (9) и сравнивая с (8), найдем, что правый нижний блок матрицы Y обращается в нуль, если положить

$$x(q_j) = \exp(-2q_j). \tag{I0}$$

Далее, согласно (6), матрица $\psi - \psi'/2 = -2\tau g E$, E - единичная $N \times N$ матрица. Следовательно, для функций (I0) выполняется равенство

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -2g\tau x \\ -2g\tau x & 0 \end{pmatrix} = -2g\tau[C,X], \quad C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{II}$$

и зависимость матрицы X от времени определяется уравнением

$$\frac{dX}{dt} = [X,M] + \{X,L\} - 2g\tau[C,X]. \tag{I2}$$

Перейдем в уравнениях (4),(I2) к унитарно эквивалентным матрицам $\tilde{L} = \Omega^{-1} L \Omega$, $\tilde{X} = \Omega^{-1} X \Omega$, $\Omega(0) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $\frac{d\Omega}{dt}\Omega^{-1} = M$. Поскольку $[C,M]=0$, C является инвариантом преобразования, задаваемого матрицей Ω: $\tilde{C} = C$. Уравнения (4),(I2) для $\tilde{L}$, $\tilde{X}$ уже не содержат M:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = 0, \quad \frac{d\tilde{X}}{dt} = \{\tilde{X}, \tilde{L}\} - 2g\tau[C,\tilde{X}]. \tag{I3}$$

Решение (I3) очевидно: из первого уравнения следует $\tilde{L} = const = L(0)$. При этом второе является линейным уравнением с постоянными коэффициентами и общим решением

$$\tilde{X} = \exp(\Lambda t) X(0) \exp(\Lambda^+ t), \tag{I4}$$

где, согласно (6), (I3),

$$\Lambda = \begin{pmatrix} l(0) & \chi(0) - 4g\tau E \\ \chi(0) & -l(0) \end{pmatrix}, \quad \chi_{jk}(0) = 4g\tau\delta_{jk}\exp(2q_j(0)), \tag{I5}$$

Λ^+ - матрица, эрмитово сопряженная Λ. Тем самым задача об интегрировании уравнений движения систем Сазерленда в потенциале Морса решена: координаты частиц определяются выражениями

$$q_j = -\frac{1}{2}\log(\tilde{x}_j(t)),$$

$\tilde{x}_j(t)$ - ненулевые собственные значения $\tilde{X}(t)$ (I4) или собственные значения матрицы $v(t) = x(0)\tilde{v}(t)$, $\tilde{v}$ - правый нижний блок $(2N \times 2N)$ - матрицы $\exp(\Lambda^+ t)\exp(\Lambda t)$. Согласно (I5), Λ полностью определяется начальными скоростями и положениями частиц.

Перейдем к качественному рассмотрению траекторий. Существует $(N+1)$ различных по структуре асимптотических состояний, в которых

n частиц с течением времени уходят на бесконечность, а остальные ($N-n$) совершают финитное движение в потенциале внешнего поля, $0 \le n \le N$.

Вопрос о том, в какое из них перейдет N - частичная система, в принципе можно решить, изучая структуру матрицы Λ. Очевидно, что в случае, когда все собственные значения Λ вещественны, квазипериодическое движение невозможно, и при удалении некоторого числа частиц на бесконечность остальные с течением времени должны занять положения, соответствующие равновесию. В противоположном случае, когда все корни уравнения $\det(\lambda E - \Lambda) = 0$ мнимые, движение может быть только финитным (отметим, что квадраты собственных значений Λ всегда вещественны, так как Λ^2 -эрмитова матрица). Я не могу, однако, указать критерий, по которому можно было бы непосредственно определить асимптотическое состояние по начальным условиям. Лишь для системы из двух частиц удается доказать, что отсутствуют неупругие процессы рассеяния с выбиванием или захватом в связанное состояние. Процессы с участием более двух частиц требуют намного более трудоемкого исследования.

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СИСТЕМ N ЧАСТИЦ

Так как потенциал Морса (3) убывает на бесконечности очень быстро, ясно, что система из произвольно большого числа частиц, отталкивающихся по закону (2), не может находиться в нем в состоянии равновесия. Или, эквивалентно, постоянная τ, определяющая глубину потенциальной ямы, не может быть сколь угодно малой для равновесных конфигураций заданного числа частиц N. В квантовой механике эта ситуация характеризуется найденным нами в [11] условием существования дискретного спектра ($\hbar = 1$):

$$\tau g - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{g^2 + 1/4}\right)(N-1) > \frac{1}{2}. \qquad (16)$$

Имеется ли аналог этого неравенства для равновесных состояний классических систем? Ответ на этот вопрос положителен. Известно, что для частиц, отталкивающихся по закону $1/x^2$ или $-\ln|x|$ в потенциале линейного осциллятора, координаты в равновесии совпадают с нулями полиномов Эрмита[7-9]. Покажем, что для систем Сазерленда в потенциале Морса имеется связь между координатами частиц в равновесном состоянии и нулями обобщенных полиномов Лагерра. Этот факт и позволит найти классический аналог (16).

Уравнения равновесия $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ имеют вид

$$-\sum_{k \ne j} \frac{\operatorname{ch}(q_j - q_k)}{\operatorname{sh}^3(q_j - q_k)} + 8\tau^2 e^{2q_j}\left(2e^{2q_j} - 1\right) = 0. \qquad (17)$$

Левая часть (17) является рациональной функцией параметров $z_j = e^{2q_j}$:

$$-\sum_{k \ne j} \frac{z_k(z_j + z_k)}{(z_j - z_k)^3} + 2\tau^2(2z_j - 1) = 0. \qquad (18)$$

Вычисление входящей в (18) суммы наиболее просто может быть произведено с помощью следующего приема[10]. Рассмотрим интеграл по контуру в комплексной плоскости z, охватывающему все точки с координатами, удовлетворяющими системе (18), от функции

$$F_j(z) = \frac{z(z_j + z)}{(z - z_j)^3} \frac{P_N'(z)}{P_N(z)}.$$

Здесь $P_N(z)$ - полином степени N вида $\prod_{m=1}^{N}(z - z_m)$, совокупность чисел $\{z_m\}$ - решения уравнений (18). Так как $F_j(z)$ убывает при $|z| \to \infty$ как $1/z^2$, сумма вычетов $F_j(z)$ во всех ее полюсах должна обращаться в нуль. В точках $\{z_k\}$, $k \ne j$ полюса $F_j(z)$ имеют порядок I, вычеты в них равны

$$\operatorname{res} F_j(z)\big|_{z = z_k} = \frac{z_k(z_j + z_k)}{(z_k - z_j)^3}. \qquad (19)$$

Вычислим теперь вычет F_j в точке $z = z_j$ с полюсом порядка 4. Полагая $z = z_j + \xi$, найдем

$$\operatorname{res} F_j(z)\big|_{z = z_j} = \frac{1}{6}\frac{d^3}{d\xi^3}\left\{\xi(z_j + \xi)(2z_j + \xi)\frac{P_N'(\xi + z_j)}{P_N(\xi + z_j)}\right\}_{\xi = 0}.$$

Производя разложение $P_N(\xi + z_j)$ с точностью до членов четвертого порядка по ξ с учетом равенства $P_N(z_j) = 0$, получим

$$\operatorname{res} F_j(z)\big|_{z = z_j} = \frac{1}{4}\left(2a + z_j(4b - 3a^2) + z_j^2(a^3 - 2ab + c)\right), \qquad (20)$$

где введены обозначения

$$a = P_N''(z_j)/P_N'(z_j), \quad b = P_N'''(z_j)/P_N'(z_j), \quad c = P_N^{(4)}(z_j)/P_N'(z_j). \qquad (20a)$$

Предположим, что $P_N(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$\mathcal{A}(z) P_N''(z) + \mathcal{B}(z) P_N'(z) + \lambda_N P_N(z) = 0. \tag{21}$$

Последовательное дифференцирование (21) позволяет выразить величины a, b, c через $\mathcal{A}(z_j)$, $\mathcal{B}(z_j)$, их производные и постоянную λ_N:

$$a = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}, \quad b = \mathcal{A}^{-2}\left[\mathcal{B}(\mathcal{B}+\mathcal{A}') - \mathcal{A}(\lambda_N+\mathcal{B}')\right],$$

$$c = \mathcal{A}^{-3}\left[\mathcal{A}(\lambda_N+\mathcal{B}')(\mathcal{B}+2\mathcal{A}') + \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathcal{A}''+2\mathcal{B}'+\lambda_N) - \mathcal{A}^2\mathcal{B}'' - \right. \tag{22}$$
$$\left. - \mathcal{B}(\mathcal{B}+\mathcal{A}')(\mathcal{B}+2\mathcal{A}')\right].$$

Сравнивая (20) и (22), легко заметить, что вычет $F_j(z)$ в точке $z = z_j$ может быть линейной функцией z_j лишь в том случае, когда $\mathcal{A} = z_j$. После некоторых преобразований получим для вычета простое выражение:

$$\operatorname{res} F_j(z)\big/_{z=z_j} = \frac{1}{4}\left[\mathcal{B}'(z_j)\mathcal{B}(z_j) - 2\mathcal{B}'(z_j) - 2\lambda_N - z_j\mathcal{B}''(z_j)\right]. \tag{23}$$

Следовательно, равенство нулю суммы вычетов (19) и (23) приводит к уравнению (18) при условии

$$\mathcal{B}'(z_j)\mathcal{B}(z_j) - 2\mathcal{B}'(z_j) - 2\lambda_N - z_j\mathcal{B}''(z_j) = 8\tau^2(2z_j - 1). \tag{24}$$

Из (24) уже нетрудно найти $\mathcal{B}(z_j)$:

$$\mathcal{B}(z_j) = -4\tau z_j + 2\left(\tau + 1 - \frac{\lambda_N}{4\tau}\right). \tag{25}$$

Уравнение (21) имеет решение в виде полинома степени N тогда и только тогда, когда постоянная λ_N имеет вид

$$\lambda_N = 4N\tau. \tag{25a}$$

Очевидно, это решение представляет собой обобщенный полином Лагерра:

$$P_N(z) = L_N^{(\gamma)}(4\tau z), \quad \gamma = 2(\tau - N) + 1. \tag{26}$$

Мы пришли к следующему утверждению: координаты частиц систем (2,3) в равновесии определяются корнями $\{\alpha_j\}$ полинома (26):

$$q_j = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha_j}{4\tau}\right). \tag{27}$$

Согласно (27), для существования равновесных конфигураций необходимо, чтобы все корни $L_N^{(\gamma)}$ были вещественными и положительными. Из теории классических ортогональных полиномов известно, что это условие выполняется, если $\gamma > -1$ – лишь в этом случае для любого целого $n > 0$ функции $L_n^{(\gamma)}(z)$ ортогональны с некоторым весом на интервале $(0, \infty)$, и все корни $L_n^{(\gamma)}(z)$ лежат внутри этого интервала. Таким образом, точки равновесия наших динамических систем существуют только при условии

$$\tau > N - 1. \tag{28}$$

В заключение этого раздела отметим, что простые аналитические выражения, известные для коэффициентов полиномов Лагерра, позволяют легко вычислять значения любых симметричных относительно перестановок $\{z_j\}$ полиномов. В частности, можно указать явное выражение для координаты центра масс системы частиц в равновесии:

$$Q = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_j = \frac{1}{2N}\log\left[(4\tau)^{-N}\prod_{j=1}^{N} z_j\right] = \frac{1}{2N}\left[\log\frac{\Gamma(2\tau-N+2)}{\Gamma(2(\tau-N+1))} - N\log 4\tau\right], \tag{29}$$

где $\Gamma(\xi)$ – Γ-функция Эйлера. Заметим, что при $\tau \to N-1$ в полном согласии с (28) выражение (29) расходится, что соответствует удалению одной из частиц системы на бесконечность под действием сил отталкивания со стороны остальных.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ И ДРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ

Покажем, что установленная выше (26,27) связь между решениями системы уравнений (18) и корнями полиномов (26) может быть использована для нахождения зависимости от параметра τ энергии равновесного состояния и частот малых осцилляций вблизи него.

Выражение для энергии имеет вид

$$\mathcal{E} = 4g^2\left(S_0 + 2\tau^2(S_2 - S_1)\right)_N$$
$$S_0 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k>j}\frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2}, \quad S_\alpha = \sum_{j=1}^{N} z_j^\alpha, \quad \alpha = 1,2,$$

где $\{z_j\}$ удовлетворяют системе (18).

Выразим двойную сумму S_0 через S_1 и S_2. Поступая так же, как и в предыдущем разделе, рассмотрим интеграл по достаточно удаленному замкнутому контуру от функции

$F(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{z z_j}{(z-z_j)^2} \frac{P'_N(z)}{P_N(z)}$, вычисляя отдельно вычеты в точках $z_k (k \neq j)$ и z_j. Сумма первых дает $2S_0$; остальные можно преобразовать, используя равенства (20а-22, 25). Итогом этих преобразований является равенство

$$S_0 = -\frac{2}{3}\tau^2 S_2 - \frac{\tau}{3} S_1 (1-2\tau) - \frac{N(\tau-N)(\tau-N+1)}{6}. \qquad (30)$$

Далее, умножая (I8) на z_j и выполняя суммирование по индексу j, благодаря антисимметрии слагаемых в получившейся двойной сумме, получим простое соотношение

$$S_2 - 2S_1 = 0. \qquad (31)$$

Наконец, S_1 представляет собой взятое с противоположным знаком отношение коэффициентов полинома Лагерра (26) при степенях z, равных N и $N-1$:

$$S_1 = (4\tau)^{-1} N(2\tau - N + 1). \qquad (32)$$

Из (30-32) немедленно следует простое выражение для энергии

$$\mathcal{E} = -\frac{Ng^2}{3}\left[(N-1)(2N-1) + 6\tau(\tau - N + 1)\right]. \qquad (33)$$

Перейдем к вычислению частот малых осцилляций вблизи положения равновесия. Их квадраты являются собственными значениями матрицы $U_{jk} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k}$, причем $\{q_j\}$ – решения уравнений (I7). Вводя для удобства, как и в предыдущем разделе, параметры $z_j = exp(2q_j)$, представим матрицу U в форме

$$U_{jk} = 16g^2 \Big\{ -(1-\delta_{jk}) \frac{[z_j^2 + z_k^2 + 4z_j z_k]}{(z_j - z_k)^4} +$$

$$+ \delta_{jk} \Big(\sum_{m \neq j} \frac{z_j^2 + z_m^2 + 4z_j z_m}{(z_j - z_m)^4} + 2\tau^2 z_j (4z_j - 1) \Big) \Big\}. \qquad (34)$$

Несложные, но крайне громоздкие вычисления показывают, что при условиях (I8) матрица (34) может быть записана следующим образом:

$$U = Z^2, \quad Z_{jk} = 4g \Big\{ -(1-\delta_{jk}) \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2} + \delta_{jk} \Big(\sum_{m \neq j} \frac{z_j z_m}{(z_j - z_m)^2} + 2\tau z_j \Big) \Big\}. \qquad (35)$$

Следовательно, искомые частоты – собственные значения матрицы (35) и система уравнений для их определения имеет вид

$$(Z\lambda^{(n)})_j = \sum_{k \neq j} \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2} \left(\lambda_j^{(n)} - \lambda_k^{(n)}\right) + 2\tau z_j \lambda_j^{(n)} = \omega_n \lambda_j^{(n)}, \qquad (36)$$

где $\lambda_j^{(n)}$ – координаты собственных векторов матрицы Z, соответствующих собственным значениям ω_n, $1 \le j, n \le N$. Уравнения (36) напоминают по своей структуре (I8), и для исследования их решений можно применить тот же прием, что был использован для установления связи решений (I8) с полиномами Лагерра (26). Именно, рассмотрим суммы вида

$$S_m = \sum_{k \neq j} \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2} \left(z_j^{-m-1} - z_k^{-m-1}\right) + 2\tau z_j^{-m}, \; m \geq 0. \qquad (37)$$

Интеграл по контуру, окружающему все точки $\{z_k\}$ (I8) и начало координат, от функции $\psi_j(z) = \frac{z_j z}{(z_j - z)^2} [z_j^{-m-1} - z^{-m-1}] \frac{P'_N(z)}{P_N(z)}$ равен нулю. Таким образом, сумма вычетов $\psi_j(z)$ в точках $z = z_k, k \neq j$, $z = z_j$ и $z = 0$ также равна нулю:

$$S_m = -\left(\mathrm{res}\, \psi_j(z)/_{z=z_j} + \mathrm{res}\, \psi_j(z)/_{z=0}\right) + 2\tau z_j^{-m}. \qquad (38)$$

Вычислим первое слагаемое в правой части (38). В точке $z = z_j$ $\psi_j(z)$ имеет полюс третьего порядка, и вычет в ней находится по формуле

$$\mathrm{res}\, \psi_j(z)/_{z=z_j} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left\{ z_j(\xi + z_j)\left[z_j^{-m-1} - (z_j + \xi)^{-m-1}\right] \frac{P'_N(z_j+\xi)}{P_N(z_j+\xi)} \right\} \Big/_{\xi=0}.$$

Разложение $P_N(z_j + \xi)$ в ряд по ξ легко провести с использованием уравнения (2I) для P_N с коэффициентами (25), (25а). Приведем результат этих простых вычислений:

$$\mathrm{res}\, \psi_j(z)/_{z=z_j} = -2\tau(m+1) z_j^{-m} + (m+1)\left(\frac{m}{2} + \tau - N + 1\right) z_j^{-m-1}. \qquad (39)$$

Далее, порядок полюса $\psi_j(z)$ в точке $z=0$ равен m, и второе слагаемое в (38) представляет собой полином степени m по переменной z_j^{-1}:

$$\mathrm{res}\, \psi_j(z)\big|_{z=0} = \frac{-z_j}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z_j - z)^{-2} \frac{P_N'(z)}{P_N(z)} \right\} \Big|_{z=0} =$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{m-1} z_j^{-\ell+1} \frac{(\ell+1)}{(m-\ell-1)!} \frac{d^{m-\ell-1}}{dz^{m-\ell-1}} \frac{P_N'(z)}{P_N(z)} \Big|_{z=0} . \tag{40}$$

Подставляя (39) и (40) в (38), окончательно найдем:

$$S_m = \sum_{\ell=0}^{m} z_j^{-\ell+1} c_\ell^{(m)}, \quad c_m^{(m)} = (m+1)\left(\frac{m}{2} + \tau - N + 1\right), \ m \geq 0. \tag{41}$$

Рассмотрим теперь действие матрицы Z (35) на N - мерные векторы $\lambda^{(n)}$ с координатами

$$\lambda_j^{(n)} = z_j^{-n}, \quad j = 1, \dots N. \tag{42}$$

Совокупность векторов (42), соответствующих значениям n от 1 до N, образует в N -мерном пространстве базис, т.к. эти векторы линейно независимы (но не ортогональны). Согласно (36,37), (41) имеем

$$(Z\lambda^{(n)})_j = 4g \sum_{\ell=1}^{N} c_{\ell-1}^{(n-1)} \lambda_j^{(\ell)}, \quad 1 \leq n \leq N. \tag{43}$$

Равенство (43) показывает, что матрица Z является треугольной в базисе (42), и ее собственные значения находятся по формуле (41):

$$\omega_n = 4g\, c_{n-1}^{(n-1)} = n\left(\tau - N + \frac{n+1}{2}\right). \tag{44}$$

Собственные векторы, соответствующие (44), являются линейными комбинациями векторов (42). Их явный вид может быть получен путем вычисления коэффициентов $c_{\ell-1}^{(n-1)}$, т.е. производных высших порядков от логарифма полинома Лагерра при $z = 0$. Наименьшая из частот равна $\tau - N + 1$ и обращается в нуль при минимальном из возможных значений τ (28). Если τ не является рациональным числом, частоты (44) несоизмеримы, что доказывает квазипериодичность финитного движения в общем случае.

5. СРАВНЕНИЕ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В предыдущих разделах были найдены явные выражения для тех характеристик равновесных состояний систем Сазерленда в потенциале Морса, которые обычно изучаются в классической механике. Легко заметить, что условия существования равновесия (28) и квантового дискретного спектра (I6) содержат одну и ту же зависимость от числа частиц N. Более того, при больших значениях константы взаимодействия g, т.е. $\hbar \ll 1$, квантовое условие переходит в классическое. Энергия основного состояния квантовых систем, найденная нами в /II/, полиномиально зависит от N:

$$\mathcal{E}_g = -\frac{N}{3}\left[\alpha^2 (N-1)(2N-1) + 3(2g\tau - 1)\left(\tau g - \frac{1}{2} - \alpha(N-1)\right)\right], \tag{45}$$
$$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{g^2 + 1/4}.$$

При $g \gg 1$ мы приходим к следующему результату: (45) в точности переходит в выражение (33) для классической равновесной энергии. Этот факт не находит объяснения в терминах квазиклассического приближения, так как он относится к основному, а не высоковозбужденным состояниям системы. Более того, попытка найти квантовые энергии низколежащих состояний с использованием классических частот малых осцилляций вблизи равновесия (44) не приводит к успеху - соответствие имеет место только для основного состояния (45). Возможно, его причина лежит в глубоко скрытой симметрии интегрируемых систем (I-3), позволяющей сравнительно просто получать точные решения уравнений движения. Представляется также весьма заманчивой перспектива построения квантового пропагатора фейнмановским интегрированием по траекториям - решение подобной задачи пока известно лишь для одной частицы в потенциале Морса. Возможно, на этом пути удастся доказать диагональность S - матрицы и объединить результаты, полученные в /II/ и настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Inozemtsev V.I.-Phys.Lett., 1983, 98A, p.316.
2. Inozemtsev V.I.-Phys.Scripta, 1984, 29, p.518.
3. Sutherland B.-Phys.Rev., 1971, A4, p.2019.
4. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.-Phys.Reports, 1981, 71, p.314.
5. Adler M.-Comm.Math.Phys. 1977, 55, p. 195.

6. Wojciechowski S.–Phys.Lett., 1984, 105A, p. 188.
7. Calogero F.–Lett.Nuovo Cim., 1977, 19, p.505.
8. Ahmed S., Bruchi M., Calogero F., Olshanetsky M., Perelomov A. –Nuovo Cim., 1979, B49, p. 173.
9. Calogero F., Perelomov A.–Comm.Math.Phys., 1978, 59, p.109.
10. Ahmed S.–Lett. Nuovo Cim., 1979, 26, p. 285.
11. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.–Phys.Lett., 1984, 106A, p. 102; Physica Scripta, 1986, 33, p.99.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 марта 1988 года.

Иноземцев В.И. P2-88-180
Классические системы Сазерленда в потенциале Морса

Показано, что классическая задача о движении произвольного числа частиц на прямой с парным взаимодействием $1/sh^2x$, находящихся в потенциале Морса, может быть решена посредством использования представления Лакса. Точное решение уравнений движения сводится к вычислению матричных экспонент. Исследованы условия существования точек равновесия. Координаты частиц в них определяются нулями обобщенных полиномов Лагерра, что позволяет найти явные выражения для энергии равновесного состояния и частот малых осцилляций вблизи него. Эти частоты в общем случае несоизмеримы, и финитное движение квазипериодично. Проводится сравнение с полученными ранее результатами для дискретного спектра соответствующих квантовых систем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Т.Ю. Думбрайс

Inozemtsev V.I. P2-88-180
Classical Sutherland Systems in the Morse Potential

It is shown that the classical problem of motion of an arbitrary number of particles along a straight line with binary interaction $1/sh^2x$ placed under the action of the Morse potential can be solved by using the Lax representation. Exact solution of the equations of motion is reduced to calculation of the matrix exponentials. Existence conditions are determined for the points of equilibrium. The coordinates of particles at those points are defined by zeros of the generalized Laguerre polynomials, which allows us to find explicit expressions for the equilibrium-state energy and frequencies of small oscillations around equilibrium. The frequencies are generally incommensurable, and finite motion is quasi-periodic. Comparison is made with the results obtained earlier for the discrete spectrum of the corresponding quantum systems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988