ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-88-139

А.В.Котиков

ПОВЕДЕНИЕ НЕСИНГЛЕТНЫХ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ $x \sim 0$ И $x \sim 1$ И ИХ СХЕМНО-ИНВАРИАНТНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Направлено в журнал "Zeitschrift für Physik C"
и в Оргкомитет Международного семинара "Кварки-88",
Тбилиси, 1988 г.

1988

§ I. Введение

Теоретически удобнее рассматривать не структурные функции (СФ) глубоконеупругого рассеяния лептонов на адронах, а их моменты, коэффициентные функции которых можно вычислять по теории возмущений (ТВ) и улучшать с помощью метода ренормгруппы (МРГ) [1]. Однако сравнивать с экспериментальными данными удобнее сами СФ. Точно восстановить их по моментам не удается, поэтому используются различные параметризации, введенные, например, Фейнманом и Филдом [2] или Бурасом, Гаемерсом и др. [3]. Следуя [2], Лопец и Индурайн (они учли ведущий порядок (ВП) [4] и однопетлевое приближение (ОП) ТВ [5]) показали, что для нахождения параметров параметризации можно использовать анализ поведения СФ при $x\sim 0$ и $x\sim 1$ [6,7]. Их параметризации просты, точно удовлетворяют интегральным соотношениям известных правил сумм. При $x\sim 0$ и $x\sim 1$ они также точно удовлетворяют уравнениям эволюции КХД, а при промежуточных значениях x погрешность составляет менее I % (см. [7]). Однако полученные таким образом коэффициенты в ОП являются схемнозависимыми (СЗ) (т.е. зависимыми от способа устранения расходимостей).

Проблеме схемной зависимости в квантовой теории поля было уделено много внимания (см., например, [8-II]). В работах [9-II] была предложена и развита так называемая схемно-инвариантная теория возмущений (СИТВ), в которой вводится ряд констант связи, каждая из которых соответствует определенному физическому процессу (или величине)

Рассмотрим кратко суть (СИТВ) (следуем [II]). Пусть некоторая физическая величина R представима в виде ряда ТВ, улучшенного МРГ:

$$R=\alpha\left(1+r_1\alpha+r_2\alpha^2+\ldots\right), \tag{I}$$

где параметр разложения $\alpha(Q^2)$ находится из уравнения

$$Q^2\frac{d\alpha(Q^2)}{dQ^2}=\beta(\alpha),$$

а $\beta(\alpha)$ определяется разложением

$$\beta(\alpha)=-\sum_{m=0}\beta_m(\alpha)^{m+2}.$$

Так, например, в двухпетлевом приближении константа связи $\alpha(Q^2)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)}+\frac{\beta_1}{\beta_0}\ln\alpha(Q^2)=\beta_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\,. \tag{2}$$

Здесь величины τ_i, α, Λ являются схемнозависимыми.

Можно построить другое разложение исходной величины R /II/ (так называемое оптимизированное схемно-инвариантное разложение /II/):

$$R^{CИ} = a\,(1 + K_2 a^2 + \ldots)\quad, \tag{3}$$

где новый параметр разложения a удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0}\ln a(Q^2) = \beta_0 \ln\frac{Q^2}{\Lambda_a^2}\,. \tag{4}$$

Здесь величины K_2, a, Λ_a являются схемно-инвариантными (СИ), а шкалы Λ_a и Λ связаны соотношением:

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\Lambda_a}{\Lambda}\right)^2 = \tau_1\,. \tag{5}$$

В настоящей работе рассмотрено СИ-поведение несинглетных СФ при $x \sim 0$ и $x \sim 1$, а также построена не зависящая от схемы вычитаний бесконечностей параметризация, в первых двух порядках ТВ совпадающая с полученной в работе /5/. Преимущество такой параметризации подробно описано в конце § 4. Здесь же отметим, что в СИ-варианте все вычисляемые по ТВ параметры являются вполне определенными (в смысле независимости от способа устранения бесконечностей). Более того, существует некоторая гарантия того, что учёт следующих поправок не будет существенно изменять результат.

Мы приводим графики параметризации функций $xF_3(x,Q^2)$ и $F_2(x,Q^2)$ при $x > 0{,}3$, используя параметры, полученные из фита экспериментальных данных (ЭД) /I2/ группы CДHS /I3/. Кривые, соответствующие СИ-параметризации, лучше согласуются с ЭД. В Приложениях I и 2 приведены аналитические значения коэффициентов параметризаций в окрестностях $x=0$ и $x=1$ соответственно.

§ 2. Поведение СФ при $x \to 0$

Здесь и далее речь пойдет только о несинглетных СФ, поэтому выделять это явно не будем. Мы также не будем различать СФ $F_2(x,Q^2)$ и $xF_3(x,Q^2)$ (имеющиеся отличия в коэффициентах их параметризаций будут даны в Приложении I).

Считая поведение СФ при $x \to 0$ редженодобным /I4/, в работах /4,5/ было получено поведение СФ в виде:

в ВП
$$F(x,Q^2) = B[\alpha(Q^2)]^{-d_\lambda}\, x^{1-\lambda}, \tag{6}$$

в ОП
$$F(x,Q^2) = B\,(1+\alpha(Q^2)C_\lambda)[\alpha(Q^2)]^{-d_\lambda}\, x^{1-\lambda}\quad, \tag{7}$$

где $\alpha = \frac{g^2}{16\pi}$. Расшифровка обозначений дана в Приложении I. Согласно теории Редже значение $\lambda \approx 0{,}5$ /4,5/, что подтверждает и фит ЭД /I2/.

Для получения СИ-аналога уравнения (7) преобразуем величину F к новой переменной $\bar{F}$, имеющей разложение в виде (I). Эту операцию можно проделать различными способами (см. /II/), что приводит к различным типам СИТВ. Мы будем использовать один из них /9,II/:

$$F \to \bar{F} = \frac{1}{B x^{1-\lambda}} F^{-1/d_\lambda} = \alpha(Q^2)\left(1 - \frac{C_\lambda}{d_\lambda}\alpha(Q^2)\right). \tag{Ia}$$

Строя СИТВ для новой величины $\bar{F}$, получаем

$$\bar{F}^{CИ} = a_\lambda(Q^2)\quad, \tag{3a}$$

где a_λ удовлетворяет уравнению (4) при $\Lambda_a = \Lambda_\lambda$, а масштаб Λ_λ находится из соотношения:

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\Lambda_\lambda}{\Lambda_{\overline{MS}}}\right)^2 = -\frac{C_\lambda(\overline{MS})}{d_\lambda}\,.$$

Окончательно получаем СИ-аналог уравнения (7) в виде

$$F^{CИ}(x,Q^2) \underset{x\to 0}{=\!=} B\,[a_\lambda(Q^2)]^{-d_\lambda}\, x^{1-\lambda}\,.$$

На рис. I приведены графики зависимости отношений $\frac{\Lambda_\lambda}{\Lambda_{\overline{MS}}}$, $\frac{a_\lambda(Q^2)}{\alpha_{\overline{MS}}(Q^2)}$ как функции переменной λ. Здесь мы использовали $\Lambda_{\overline{MS}} = 100$ МэВ /I2,I5/. Как видно, оба отношения монотонно убывают (возрастают) при уменьшении (увеличении) λ. Отношение констант связи как функция Q^2 имеет такую же зависимость. Оба отношения слабо зависят от числа сортов кварков f, используемых в расчётах (кривые построены при $f=4$).

§ 3. Поведение СФ при $x \to 1$

Зная, что при определенной Q_0^2 СФ в области больших x ведут себя как (см., например, /I5/):

$$F(x,Q_0^2) \underset{x\to 1}{=\!=} A_0 (1-x)^{\nu_0},$$

и имея выражение для связи моментов при различных Q^2 в виде /I6/

в ВП
$$\frac{M_n(Q^2)}{M_n(Q_0^2)} = \left[\frac{\alpha(Q^2)}{\alpha(Q_0^2)}\right]^{-d_n},$$

в ОП

$$\frac{M_n(Q^2)}{M_n(Q_0^2)} = \left[\frac{\alpha(Q^2)}{\alpha(Q_0^2)}\right]^{-d_n} \left(1 + C_n\left[\alpha(Q^2)-\alpha(Q_0^2)\right]\right),$$

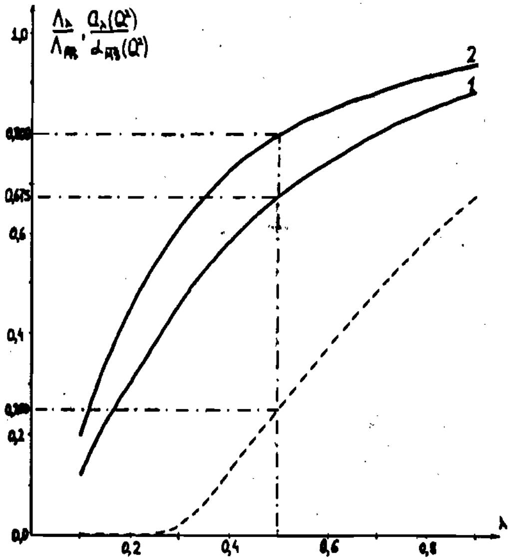


Рис. I.

Графики зависимости отношений $\frac{\Lambda_\lambda}{\Lambda_{\overline{MS}}}$ (штрихованная линия) и $a_\lambda(Q^2)/\alpha_{\overline{MS}}(Q^2)$ (сплошные кривые) от переменной λ . Индексами I и 2 обозначены кривые, построенные при $Q^2 = 2$ (ГэВ)^2 и $Q^2 = 200$ (ГэВ)^2 соответственно. Пунктирной линией отмечено полученное из теории Редже и фита ЭД значение $\lambda = 0{,}5$ и соответствующие ему значения отношений.

можно получить поведение СФ при других Q^2 /4,5/:

в ВП $$F(x,Q^2) \underset{x\to 1}{=\!=} A\left[\alpha(Q^2)\right]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu(\alpha)}}{\Gamma(1+\nu(\alpha))}, \tag{9}$$

в ОП $$F(x,Q^2) \underset{x\to 1}{=\!=} A\left[\alpha(Q^2)\right]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu(\alpha)}}{\Gamma(1+\nu(\alpha))} \left(1+\tilde{C}_x(\alpha)\cdot\alpha(Q^2)\right). \tag{IO}$$

Расшифровка обозначений дана в Приложениях.

Снова для получения СИ-поведения СФ необходимо преобразовать величину F к новой переменной $\overline{\overline{F}}$ так, чтобы

в ВП $$\overline{\overline{F}}_2 = \alpha(Q^2),$$

в ОП $$\overline{\overline{F}}_2 = \alpha(Q^2)\left(1+\delta\cdot\alpha(Q^2)\right).$$

Обозначим данное преобразование буквой Ф. Тогда в ОП получаем

$$F = \Phi^{-1}(\overline{\overline{F}}) = A\left[\alpha(Q^2)\right]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu(\alpha)}}{\Gamma(1+\nu(\alpha))}\left(1-\delta\cdot\alpha(Q^2)\cdot\tilde{d}_x(\alpha)\right).$$

Значение величины $\tilde{d}_x(\alpha)$ приведено в Приложении 2. Следовательно, получаем

$$\delta = -\frac{\tilde{C}_x(\alpha)}{\tilde{d}_x(\alpha)}.$$

Строя СИТВ для новой величины $\overline{\overline{F}}$, получаем

$$\overline{\overline{F}}^{\,СИ} = a_x(Q^2), \tag{3б}$$

где a_x является решением уравнения (4) при $\Lambda_a = \Lambda_x$, а Λ_x находится из соотношения:

$$\beta_0 \ln\left(\frac{\Lambda_x}{\Lambda_{\overline{MS}}}\right)^2 = -\frac{\tilde{C}_x(\alpha)}{\tilde{d}_x(\alpha)}. \tag{5б}$$

Окончательно получаем СИ-аналог уравнения (IO) в виде

$$F^{СИ}(x,Q^2) \underset{x\to 1}{=\!=} A\left[a_x(Q^2)\right]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu(a_x)}}{\Gamma(1+\nu(a_x))}. \tag{II}$$

На рис. 2 приведены графики зависимости $\Lambda_x/\Lambda_{\overline{MS}}$, $a_x/\alpha_{\overline{MS}}$ как функции переменной x . Зависимость от числа сортов кварков слабая и не выделяется (кривые построены при $f=4$). Значения обеих отношений с ростом x увеличиваются (стремятся к бесконечности при $x\to 1$), так как величина $\tilde{C}_x/\tilde{d}_x \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\beta_0}{2}\ln(1-x)$ (см. Приложение 2). Для отношения констант связи это свойство лучше выражено при малых Q^2 . Как функции Q^2 оба отношения ведут себя по-разному: величина $\Lambda_x/\Lambda_{\overline{MS}}$ слабо возрастает, а кривые $a_x/\alpha_{\overline{MS}}$ быстро убывают (особенно в области больших x).

§ 4. СИ - параметризация СФ

Анализируя СФ при $x\to 0$ и $x\to 1$ Лопец и Индурайн построили параметризацию для СФ в виде /4,5/:

в ВП

$$F(x,Q^2)=\Big\{B\,[\alpha(Q^2)]^{-d_\lambda}\,(x^{1-\lambda}-x^{\mu(\alpha)})+A\,[\alpha(Q^2)]^{-d_0}\cdot \frac{\Gamma(1+\nu_0)}{\Gamma(1+\nu(\alpha))}\,x^{\mu(\alpha)}\Big\}\,(1-x)^{\nu(\alpha)}, \qquad (\mathrm{I}2)$$

в ОП

$$F(x,Q^2)=\Big\{B\,[\alpha(Q^2)]^{-d_\lambda}\,(x^{1-\lambda}-x^{\mu(\alpha)})(1+\alpha(Q^2)C_\lambda)+A\,[\alpha(Q^2)]^{-d_0}\cdot \frac{\Gamma(1+\nu_0)}{\Gamma(1+\nu(\alpha))}\,x^{\mu(\alpha)}\Big\}\,(1-x)^{\nu(\alpha)}\,\big(1+C_x(\alpha)\cdot\alpha(Q^2)\big). \qquad (\mathrm{I}3)$$

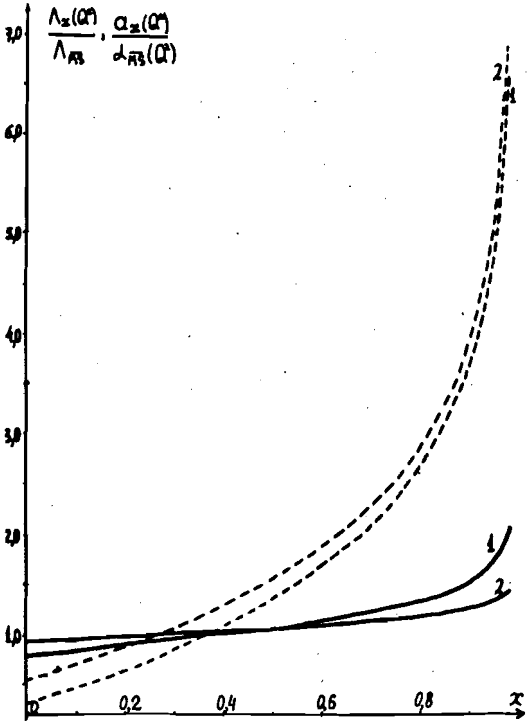


Рис. 2.
Графики зависимости отношений $\Lambda_x(Q^2)/\Lambda_{\overline{MS}}$ (штрихованные линии) и $\alpha_x(Q^2)/\alpha_{\overline{MS}}(Q^2)$ (сплошные линии) от переменной x. Индексами I и 2 обозначены кривые, построенные при Q^2 = 2 (ГэВ)^2 и Q^2 = 200 (ГэВ)^2 соответственно.

Величина $\mu(\alpha)$ учитывает все траектории Редже, за исключением ведущей (последняя определяет λ). С хорошей точностью $\mu(\alpha)$ аппроксимируется единицей /4,5/.

Используя полученные в предыдущих параграфах СИ-аппроксимации СФ при $x\to 0$ и $x\to 1$, построим не зависящую от схемы параметризацию СФ в виде:

$$F^{\text{СИ}}(x,Q^2)=\Big\{\tilde B\,[a_\lambda(Q^2)]^{-d_\lambda}\,(x^{1-\lambda}-x^{\mu(a_\lambda)})+\tilde A\,[a_x(Q^2)]^{-d_0}\cdot\frac{\Gamma(1+\nu_0)}{\Gamma(1+\nu(a_x))}\,x^{\mu(a_\lambda)}\Big\}\,(1-x)^{\nu(a_x)}, \quad \text{где} \quad \mu(a_\lambda)\approx\mu(\alpha)\approx 1. \qquad (\mathrm{I}4)$$

Коэффициенты A,B и $\tilde A,\tilde B$, вообще говоря, отличаются, так как поправка $\sim\alpha(Q^2)\,\tilde C_x(\alpha)$ велика и, следовательно, результат существенно меняется из-за того, занесена она в фигурные скобки или нет (см. параметризацию в ОП в работах /5,I2/).

В работах /I7, I8/ схемно-инвариантно обрабатывались моменты СФ. Таким образом, для СФ существовал бесконечный набор констант связи (для каждого момента своя константа связи). Структурные функции восстанавливались численно методом Индурайна /I9/. В работе /I8/ в этой процедуре участвовали первые девять моментов ($n\le 9$) . В выражении (I4) параметризация СФ зависит от двух констант связи, в которых эффективно учитывается СИ-обработка моментов СФ в двух кинематических областях переменной x : $x\sim 0$ и $x\sim$ I . Конечно, константы связи не являются независимыми (см. (4) и (5)).

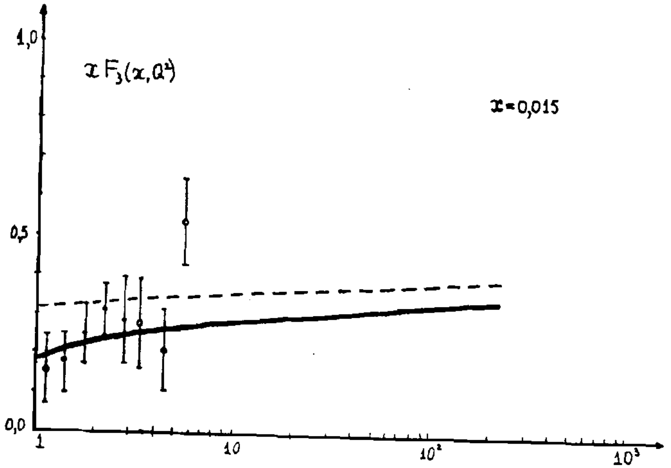
В рассматриваемой области Q^2 (при $x\gtrsim 0{,}3$) кроме логарифмической ($\sim\alpha_s$) существенны также степенные поправки, имеющие вид m^2/Q^2. Здесь мы учитываем поправку к структурной функции за счёт массы мишени (нуклона) $(m=m_N)$. Мы приходим к так называемому ξ-скейлингу /26/ и с точностью до m_N^2/Q^2 получаем выражение для новой СФ $F_M(x,Q^2)$ в виде:

$$F_M(x,Q^2)=F(x,Q^2)+\frac{x^2m_N^2}{Q^2}\Big\{6x\int_x^1 dy\,F(y,Q^2)/y^2-x\frac{\partial}{\partial x}F(x,Q^2)-4F(x,Q^2)\Big\} \qquad (\mathrm{I}5)$$

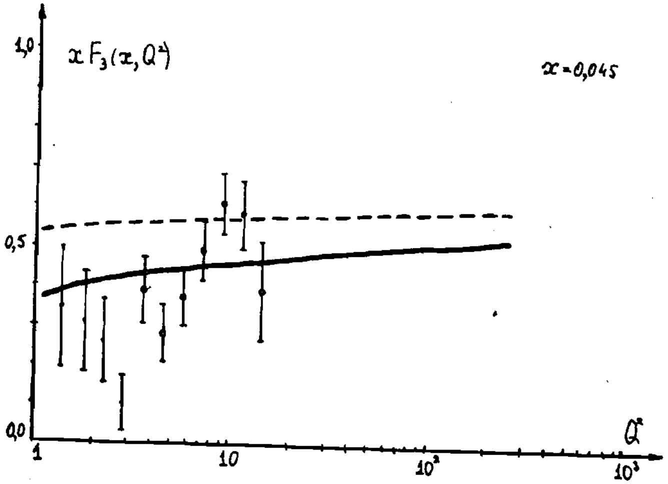
Анализируя выражение (I5) при $x\to 0$ и $x\to 1$, получаем, что в нашем случае учёт массы мишени факторизуется в дополнительный множитель /5/:

$$F_M(x,Q^2)=F(x,Q^2)\Big(1+\frac{x^2m_N^2}{Q^2}\Big[\frac{6}{\lambda}-5+\lambda+\frac{x\,\nu(\alpha)}{1-x}\Big]\Big).$$

В работе /I2/ был проведен глобальный фит ЭД и получены все независимые константы параметризации, имеющие следующие выражения в ОП:



а



б

Рис. 3.
Графики зависимости параметризаций $x F_3(x,Q^2)$, $x F_3^{CИ}(x,Q^2)$ и $x F_{3M}^{CИ}(x,Q^2)$. Им соответствуют штрихованная, сплошная и штрихпунктирная линии соответственно. Символами ○ и ● обозначены ЭД/I3/, используемые и не используемые в фите/I2/.

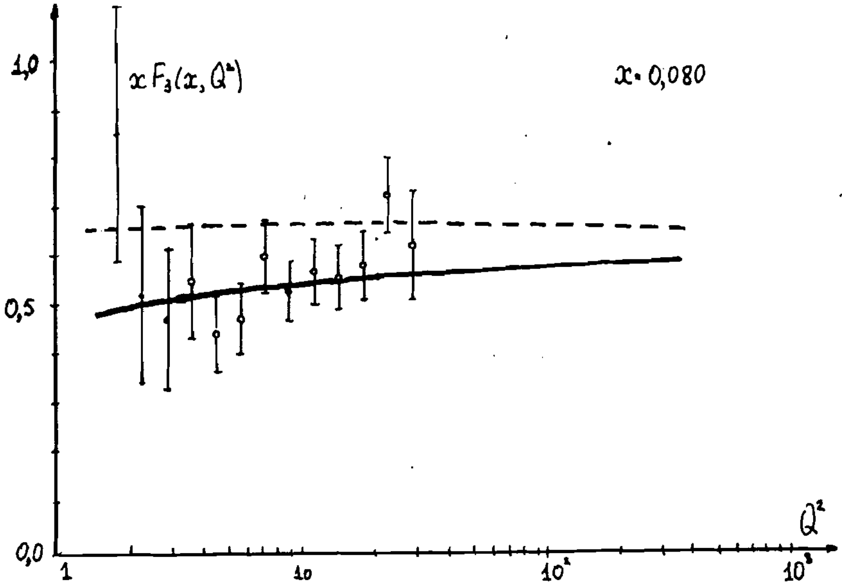


Рис.3в

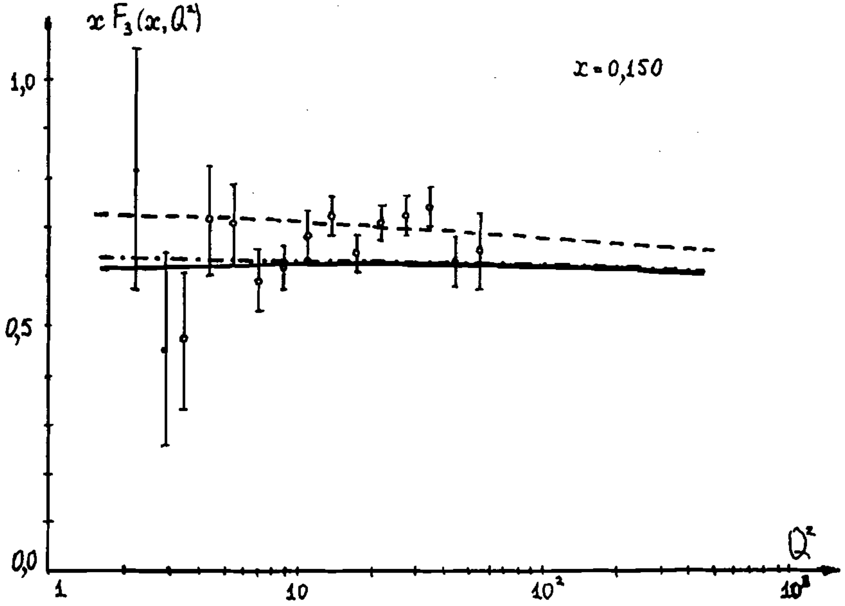


Рис.3г

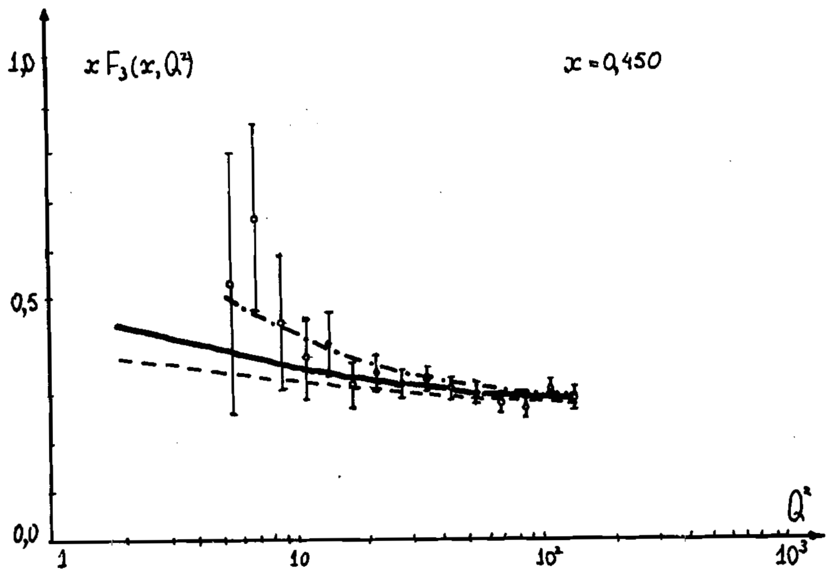


Рис.3д

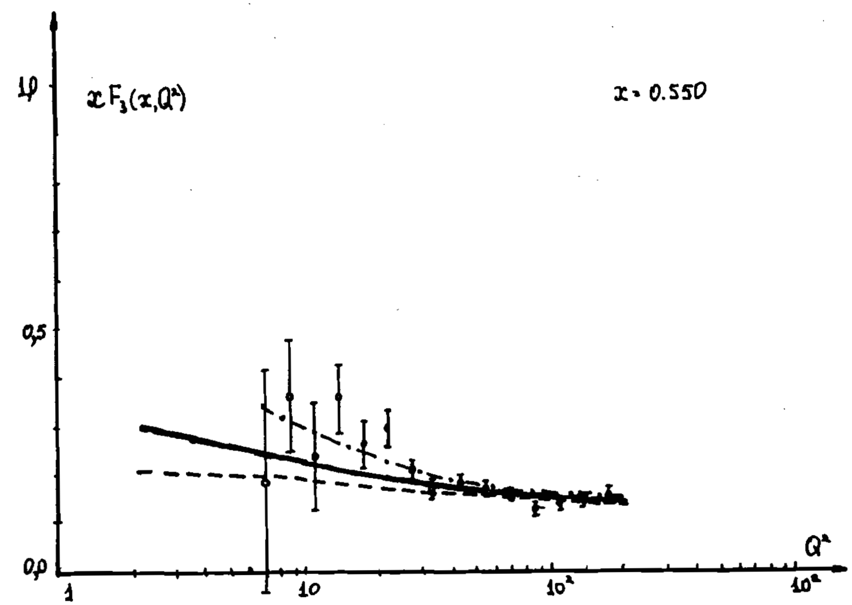


Рис.3е

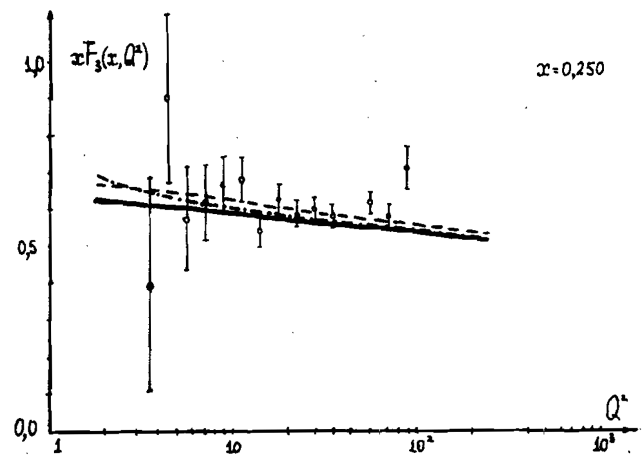


Рис.3ж

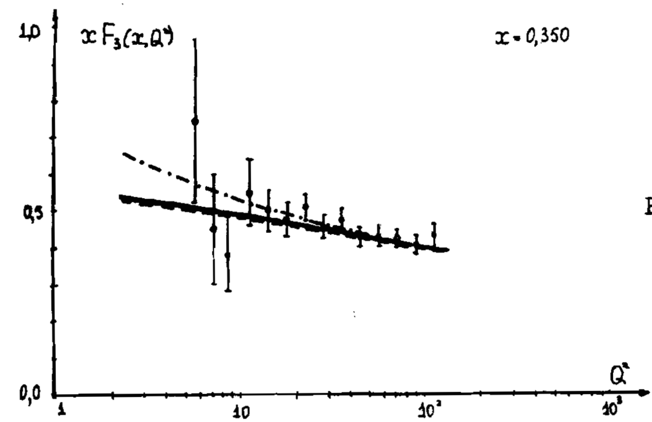


Рис.3з

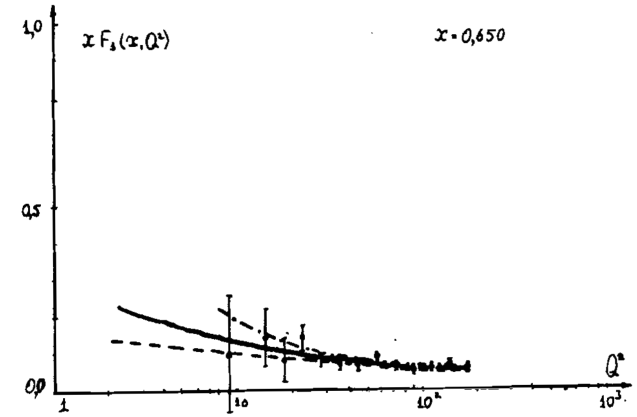
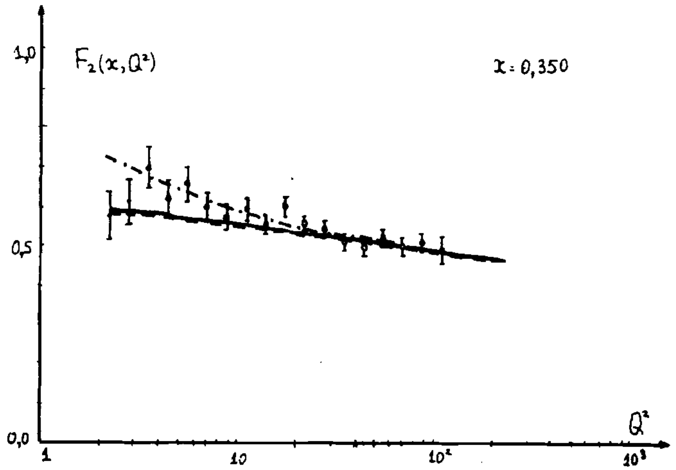
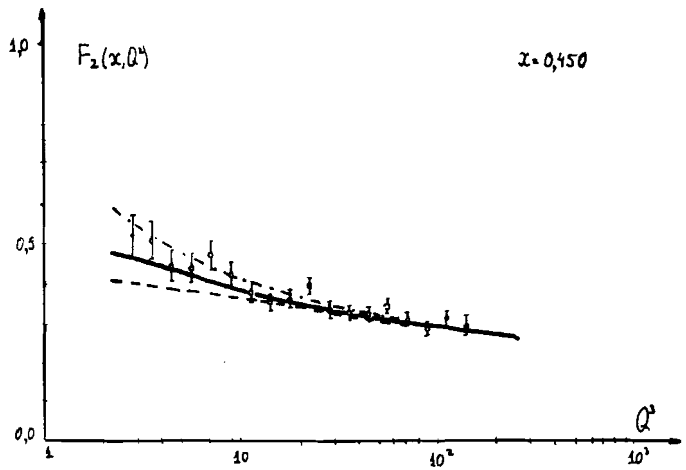


Рис.3и



а



б

Рис. 4.

Графики зависимости параметризаций $F_2(x,Q^2)$, $F_2^{СИ}(x,Q^2)$ и $F_{2M}^{СИ}(x,Q^2)$ $(x>0,3)$. Им соответствуют штрихованная, сплошная и штрихпунктирная линии соответственно. Символами ○ и ● обозначены ЭД/13/, используемые и не используемые в фите/12/.

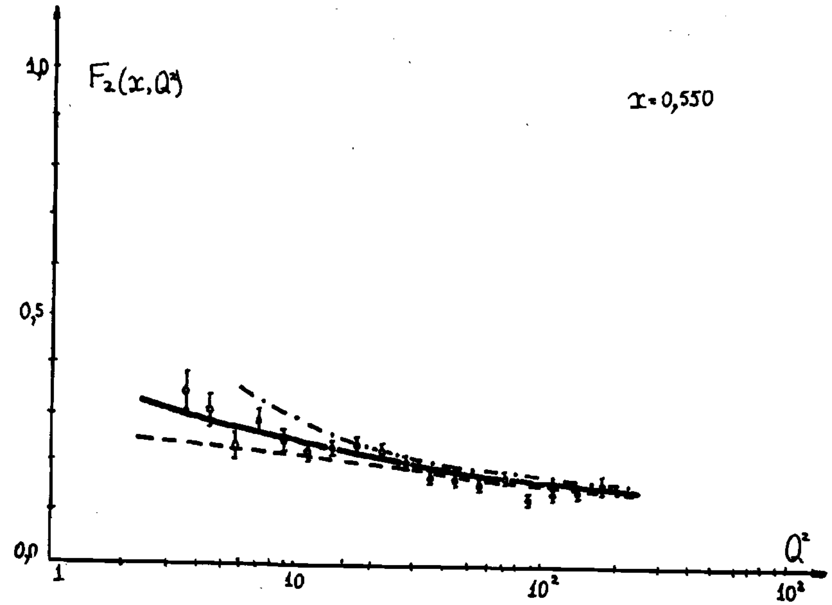


Рис.4в

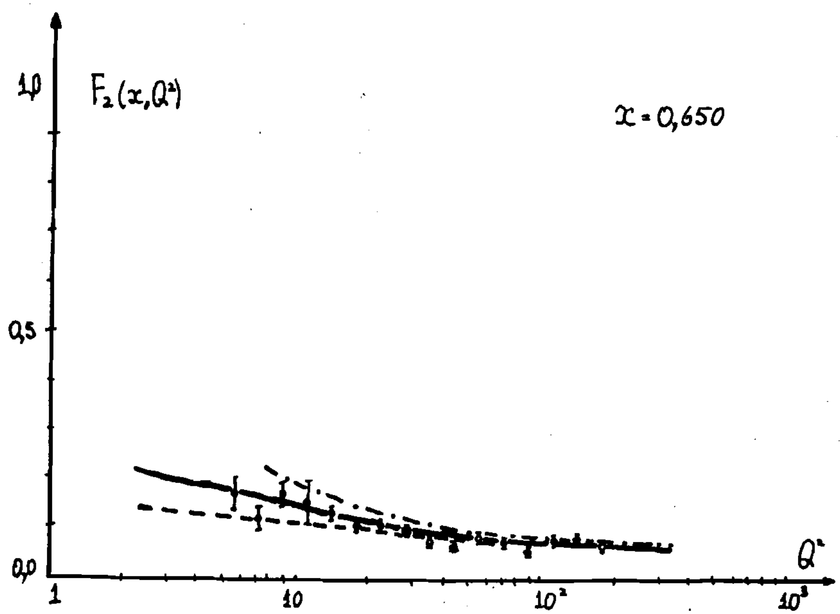


Рис.4г

$$41\ \text{МэВ} \leq \Lambda_{\overline{MS}} \leq 216\ \text{МэВ},$$

$$0{,}49 \leq \lambda \leq 0{,}52,$$

$$4{,}10 \leq A \leq 5{,}10, \qquad (16)$$

$$0{,}27 \leq \nu_0 \leq 0{,}70.$$

Здесь мы используем только фит ЭД группы СДНS /13/.

На рис. 3 и рис. 4 приведены графики зависимости различных параметризаций функций $xF_3(x,Q^2)$ и $F_2(x,Q^2)$ при $x > 0{,}3$ соответственно. Из анализа ЭД в области больших x ($x \approx 0{,}5$) и больших Q^2 ($Q^2 \approx 100\ \text{ГэВ}^2$) (в области, где малы ошибки эксперимента) получаем связь:

$$\tilde{A} = A \cdot 1{,}3\,; \quad \tilde{B} = B \cdot 1{,}3 \quad ,$$

необходимую для совпадения в этой области параметризаций (13) и (14). Коэффициент 1,3 одинаков в обеих соотношениях, так как величины A и B связаны соотношениями правил сумм /5/.

Из рис. 3 видно, что СИ-параметризация для функции $xF_3(x,Q^2)$ (особенно с учётом массы мишени) лучше согласуется с ЭД группы СДНS /13/. Этот эффект наиболее ярко выражен для ЭД, не используемых в фите /12/. В области малых x кривая, соответствующая СИ-параметризации, лежит ниже кривой, соответствующей параметризации (13), а в области больших x ситуация обратная. Учёт поправки за счёт массы мишени (в области средних и больших x, где она существенна) ещё более улучшает согласие с экспериментом.

Из рис. 4 видно, что СИ-параметризация для функции $F_2(x,Q^2)$ $(x>0{,}3)$ также лучше согласуется с экспериментальными данными /13/. Учёт массы мишени в области $x > 0{,}5$, однако, несколько ухудшает это согласие.

Значения ЭД для $xF_3(x,Q^2)$ других групп /21/ существенно отличаются от полученных группой СДНS /13/ и на рис. 3 и рис. 4 не приведены.

В качестве резюме укажем несколько причин, подчёркивающих важность СИ-параметризации структурных функций:

1. Коэффициенты C_λ и $\tilde{C}_x$ в параметризации (13) зависят от схемы устранения расходимостей, следовательно, в каждой схеме необходим, вообще говоря, новый фит ЭД. Таким образом, параметры (16) выражения (13), полученные из фита, также являются в некотором смысле СЗ. Это, конечно, неудобно.

2. СИ-параметризация учитывает определенным образом высшие порядки ТВ, т.е. можно говорить, что при учёте следующего порядка ТВ результат не должен сильно меняться.

3. СИ-разложение по константе связи является в некотором смысле

более удачным, чем обычное (некоторая аналогия с МРГ). Например, коэффициент $\tilde{C}_x(\alpha)$ содержит члены $\sim \ln(1-x)$ и $\sim \ln^2(1-x)$ и при $x \to 1$ сильно возрастает. В СИ-константу связи $a_x(Q^2)$ входит только член $\sim \ln(1-x)$.

Более того, мы можем легко определить границы применимости СИТВ (а следовательно, и теории возмущений вообще) фактом: существует решение уравнений типа (4), (5) или нет. Действительно, левая часть уравнения (4) имеет минимум при $\alpha = \beta_1/\beta_0$. Следовательно, уравнение 4 имеет решение при

$$\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda_a^2} \geqslant \frac{\beta_1}{\beta_0}\left(1 - \ln \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)$$

или

$$Q^2 \geqslant \Lambda_a^2 \exp\left[\frac{\beta_1}{\beta_0^2}\left(1 - \ln\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)\right],$$

где $a = \{x, \lambda\}$.

Кривые, соответствующие границам области кинематических переменных (x,Q^2), где применима теория возмущений приведены на рис. 5. ТВ работает в области (x,Q^2), расположенной выше кривых.

Аналогичный график можно построить и для переменных (λ, Q^2).

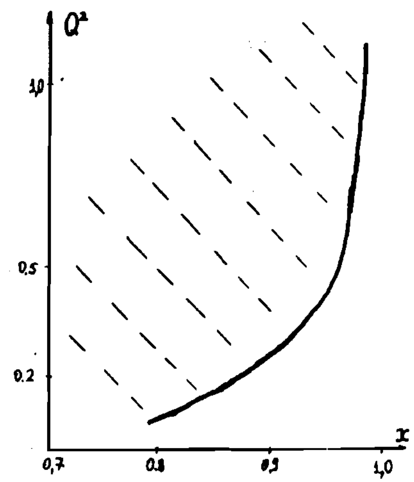


Рис. 5.
Граница области применимости ТВ.

4. Графики на рис. 3 и на рис. 4 для обеих параметризаций (13) и (14) построены при использовании значений (16), полученных из фи-

та ЭД для параметризации (I3). Следовательно, штрихованная линия – это наиболее удачное согласие с экспериментом для параметризации (I3). Однако сплошная кривая лучше соответствует ЭД. Следовательно, СИ параметризация является более удачной. Строго говоря, для СИ-параметризации (и при учёте массы мишени) необходим свой фит ЭД. При полученных из такого фита значениях коэффициентов согласие теории и эксперимента должно быть ещё лучше. Такая процедура будет проведена в дальнейшем, когда будут построены СИ-параметризации для синглетных СФ (так как наиболее точные и многочисленные ЭД получены для $F_2(x,Q^2)$).

§ 5. Заключение

В работах /I7,I8/ моменты СФ в нелидирующем приближении обрабатывались с помощью СИТВ, а затем СФ численно восстанавливались методом Индурайна /I9/. В настоящей работе проделана обратная операция: СФ восстанавливаются точно в окрестности точек $x=0$ и $x=1$, затем в ОП они обрабатываются с помощью СИТВ. Полученные выражения используются для параметризаций СФ. В данной работе также была учтена поправка за счёт массы мишени, которая существенна в области $x>0{,}25$ (при малых Q^2). В этой области существенны также непертурбативные поправки и поправки за счёт масс тяжелых кварков (см./5/). Для корректного учёта последних необходимо рассмотреть массивную СИТВ (см./I0/), что будет сделано в следующей работе.

Полученный здесь результат в дальнейшем будет обобщен на синглетную часть, а также применен для анализа отношения $R=\sigma_L/\sigma_T$ [18,22], где σ_T и σ_L – сечения взаимодействия виртуальных поперечно- и продольно-поляризованных фотонов с нуклоном.

Более того, полученный результат применен /23/ также для отношения $R^{A'}_{K,A}=\dfrac{AF^{A'}_K(x,Q^2)}{A'F^A_K(x,Q^2)}$ в модели рескейлинга. Здесь $\frac{1}{A}F^A_K(x,Q^2)$ – СФ ядра A.

Автор благодарен Д.И. Казакову за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения, а также А.В. Ефремову, А.В. Радюшкину и В.Т. Киму за полезные замечания. Автор благодарен также Е.А.Старченко и М.Н.Уханову за помощь в работе на ЭВМ.

Приложение I

В параметризациях (6),(7) коэффициенты d_λ и C_λ имеют вид (см./5,I5/)

$$d_\lambda=-\frac{\gamma^{(0)}_\lambda}{2\beta_0}\,,\quad C_\lambda=B^{(1)}_\lambda+\frac{\gamma^{(1)}_\lambda}{2\beta_0}-\frac{\beta_1\gamma^{(0)}_\lambda}{2\beta_0^2}\,, \qquad \text{(П.I)}$$

где $\gamma^{(0)}_\lambda$ и $\gamma^{(1)}_\lambda$ – первые два коэффициента в разложении по константе связи аномальной размерности операторов Вильсона с номером $n=\lambda$.

Аналитический вид величин, стоящих в правой части выражения (П.I) приведен, например, в работах /24/, однако он громоздкий и при $\lambda=0{,}5$ его можно упростить.

В коэффициенты параметризации входят функции, полученные аналитическим продолжением (АП) с целых значений аргумента n (как это имеет место для моментов СФ) в области нецелых значений λ . Разобьём эти функции на две группы и рассмотрим по отдельности.

Первая группа функций имеет вид

$$S_K(n)=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l^K}\qquad (K=1,2,3)\,.$$

Известно, что

$$S_1(n)=\Psi(n+1)+\gamma\,,\quad S_2(n)=\zeta(2)-\Psi^{(1)}(n+1),\, S_3(n)=\tfrac{1}{2}\Psi^{(2)}(n+1)+\zeta(3)\,, \qquad \text{(П.2)}$$

где $\Psi(n+1)$, $\Psi^{(K)}(n+1)$, $\zeta(K)$ – пси-функция, полигамма- функции Эйлера и дзета-функции Римана, а γ –постоянная Эйлера.

Полученные функции легко продолжаются $(n\to\lambda)$ в область нецелых значений λ и при $\lambda=0{,}5$ выражаются через $\zeta(K)$ и $\ln 2$. Тогда функции $\tilde S_K\left(\frac{1}{2}\right)\equiv S_K\left(n=-\frac{1}{2}\right)$, являющиеся АП исходных сумм, имеют вид:

$$\tilde S_1\left(\tfrac{1}{2}\right)=-2\ln 2\,,\ \tilde S_2\left(\tfrac{1}{2}\right)=-2\zeta(2)\,,\ \tilde S_3\left(\tfrac{1}{2}\right)=-6\zeta(3)\,.$$

Вторая группа функций имеет вид (см./I8/)

$$K_2(n)=(-1)^n\sum_{K=1}^{n}\frac{(-1)^{K+1}}{K^2}+\frac{\zeta(2)}{2}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$K_3(n)=(-1)^n\sum_{K=1}^{n}\frac{(-1)^{K+1}}{K^3}+\frac{3\zeta(3)}{4}\left(1-(-1)^n\right),$$

$$Q(n)=(-1)^n\sum_{K=1}^{n}\frac{(-1)^{K+1}S_1(K)}{K^2}+\frac{5\zeta(3)}{8}\left(1-(-1)^n\right).$$

Первые две суммы можно выразить через полигамма-функции

$$K_2(n)=\beta^{(1)}(n+1)-\zeta(2)/2\,,\quad K_3(n)=\tfrac{3}{4}\zeta(3)-\tfrac{1}{2}\beta^{(2)}(n+1)\,,$$

где $\beta^{(K)}(z)=\left[\Psi^{(K)}\left(\frac{z+1}{2}\right)-\Psi^{(K)}\left(\frac{z}{2}\right)\right]/2^K$.

Третью сумму можно переписать в виде

$$Q(n)=G(n)+\tfrac{5}{8}\zeta(3)-\tfrac{1}{2}\beta^{(2)}(n+1)-S_1(n)\beta^{(1)}(n+1)\,,$$

где $G(n)=\displaystyle\sum_{l,K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K+m}}{(l+n+1)(l+K+n+1)^2}$.

При АП $n\to\lambda=-\frac{1}{2}$ исходные функции имеют вид ($\tilde K_K(\frac{1}{2})\equiv K_K(n=-\frac{1}{2}),\ \tilde Q(\frac{1}{2})\equiv Q(n=-\frac{1}{2})$):

$$\tilde K_2\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\zeta(2)}{2}-4G\,,\quad \tilde K_3\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{4}\zeta(3)-\pi^3/4\,,$$

$$\tilde Q\left(\tfrac{1}{2}\right)=G_2+\tfrac{5}{8}\zeta(3)-8\ln 2\cdot G-\pi^3/4\,,$$

где $G = \beta^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}9159656$ (см., например,/25/), а

$$G_2 \equiv G\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{\ell,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(\ell-1/2)(\ell+k-1/2)^2} = 0{,}614977.$$

Выразить функцию G_2 методом Броудхарста /26/ через дзета-функции Римана и G - функцию, к сожалению, не удалось.

Теперь запишем значение коэффициентов, входящих в $d_{\frac{1}{2}}$, $C_{\frac{1}{2}}$:

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_F \ , \quad \beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2 - \frac{20}{3} C_A T_F - 4 C_F T_F \ ,$$

$$B^{(1)}_{2,\lambda=\frac{1}{2}} = 8C_F \cdot \left(\ln^2 2 + \zeta(2)/2 - \frac{25}{12}\ln 2 + \frac{25}{24}\right),$$

$$B^{(1)}_{3,\lambda=\frac{1}{2}} = B^{(1)}_{2,\lambda=\frac{1}{2}} - 16 C_F/3 \ ,$$

$$\gamma^{(0)}_{\lambda=\frac{1}{2}} = 16\, C_F\left(\frac{7}{24} - \ln 2\right),$$

$$\gamma^{(1)}_{\lambda=\frac{1}{2}} = 16\, C_F\Big[(2C_F - C_A)\Big(\tilde{F}\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{13}{2}\zeta(2) + \frac{32}{3} G + \frac{40}{9}\ln 2 - \frac{24433}{864}\Big) + C_A\Big(\frac{29}{6}\zeta(2) - 4\ln 2\cdot\zeta(2) - 3\ln 2 - \frac{3619}{864}\Big) - \frac{4T_F}{3}\Big(\zeta(2) - \frac{5}{3}\ln 2 - \frac{35}{48}\Big)\Big],$$

где

$$\tilde{F}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 9/2\,\zeta(3) - 6\ln 2\cdot\zeta(2) - 32\,G\cdot\ln 2 - \pi^3/4 + 2G_2 \ , \text{ а}$$

$C_A = N$, $C_F = (N^2-1)/2N$, $T_F = f/2$, для $SU(N)$ калибровочной группы и f числа сортов кварков.

Только коэффициенты $B^{(1)}_\lambda$ для СФ $F_2(x,Q^2)$ и $xF_3(x,Q^2)$ несколько отличны друг от друга (они выделены соответствующими индексами), остальные все параметры одинаковы.

Приложение 2

Для определения коэффициентов $d_0, \tilde{C}_x(\alpha), \tilde{d}_x(\alpha)$ в параметризациях (9)-(II) рассмотрим асимптотику (при больших значениях n) функций, входящих в моменты СФ (см. Приложение I) /24/:

$$S_1(n) = \ln n + \gamma\ , \ S_2(n) = \zeta(2)\ , \ S_3(n) = \zeta(3)\ , \ K_2(n) = \zeta(2)/2\ , \ K_3(n) = \frac{3\zeta(3)}{4}\ , \ Q(n) = \frac{5\zeta(3)}{8}.$$

Тогда коэффициенты $B^{(1)}_n$, $\gamma^{(0)}_n$ и $\gamma^{(1)}_n$ приобретают вид (при $n\to\infty$):

$$B^{(1)}_n = 2C_F\left(\ln^2 n + 2a_1^B \ln n + a_2^B\right),$$

$$\gamma^{(0)}_n = 8C_F\left(\ln n + a_0^Z\right), \qquad \text{(П.3)}$$

$$\gamma^{(1)}_n = 8C_F\left(a_1^Z \ln n + a_2^Z\right),$$

где $a_1^B = \gamma + 3/4$, $a_2^B = \gamma^2 + 3/2\,\gamma - \zeta(2) - 9/2$,

$$a_0^Z = \gamma - 3/4\ , \quad a_1^Z = C_A\left(67/9 - 2\zeta(2) - \frac{20}{9} T_F\right),$$

$$a_2^Z = a_1^Z\cdot\gamma + \frac{3}{2}(2C_F - C_A)\left(\zeta(2) - 2\zeta(3) - 1/8\right) - \frac{1}{3}(C_A - 2T_F)(2\zeta(2)+1) - T_F/2 .$$

Разлагая параметризацию (IO) по моментам и сравнивая коэффициенты с (П.3), получаем для её параметров выражения:

$$d_0 = -\frac{4C_F}{\beta_0} a_0^Z\ ,$$

$$\tilde{d}_x(\alpha) = \frac{4C_F}{\beta_0}\left(\ln(1-x) - \psi(1+\nu(\alpha)) - a_0^Z\right),$$

$$\tilde{C}_x(\alpha) = 2C_F\left(\ln^2(1-x) + C_1^B(\alpha)\ln(1-x) + C_2^B(\alpha)\right) \ ,$$

где

$$C_1^B(\alpha) = -2\left(\psi(1+\nu(\alpha)) + a_1^B - a_1^Z/\beta_0 + \beta_1/\beta_0^2\right),$$

$$C_2^B(\alpha) = \psi^2(1+\nu(\alpha)) - \psi^{(1)}(1+\nu(\alpha)) + 2\psi(1+\nu(\alpha))\cdot\left(a_1^B + a_1^Z/\beta_0 - \beta_1/\beta_0^2\right) + a_2^B + a_2^Z/\beta_0 - \beta_1 a_0^Z/\beta_0^2 .$$

Литература

I. Gell-Mann M., Low F.-Phys. Rev., I954, 95, I300;
Bogoliubov N.N., Shirkov D.V.-Nuovo Cimento, I956, 3, 845;
Владимиров А.А., Ширков Д.В.-УФН, I979, I29, 407.
2. Feynman R.P., Field R.D.-Phys. Rev., I977, DI5, 2590.
3. Buras A.J., Gaemers K.J. - Nucl. Phys., I978, BI32, 249;
Owens J.F., Reya E.-Phys. Rev., I978, DI7, 3003;
Maximov S.J., Vovk V.J. Preprint ITP-86-21 E , Kiev, I987.
4. Lopez C., Yndurain F.J.-Nucl. Phys., I980, BI7I, 23I.
5. Lopez C., Yndurain F.J.-Nucl. Phys., I98I, BI83, I57.
6. Gross D.J.-Phys. Rev. Lett., I974, 32, I07I;
Lopez C., Yndurain F.J.-Phys. Rev. Lett., I980, 44, III8.
7. Индурайн. Квантовая хромодинамика. М.: Мир, I986, гл. III.
8. Grunberg G.-Phys. Lett., I980, 95B, 70;
Владимиров А.А.-ЯФ, I980, 3I, I083.
9. Dhar A.-Phys. Lett., I983, I28B, 407;
Dhar A., Gupta V.-Phys. Rev., I984, D29, 2822.
IO. Казаков Д.И., Ширков Д.В.-ЯФ, I985, 42, 768.

11. Максимов С.И., Вовк В.И.-ЯФ, 1987,46,961.
12. Escobles B., Herrero M.J., Lopez C, Yndurain F.J. -Nucl. Phys., 1984, B242, 329.
13. Abzamowicz H. et al.-Z. Phys. C., 1983, 17, 283.
14. Abarbanel H.D., Goldberger M.L., Treiman S.B.-Phys., Rev. Lett., 1969, 22, 500.
15. Aubert J.J. et al.-Nucl Phys., B259, 189.
16. Buras A.J.-Rev. Mod. Phys., 1980, 52, 199.
17. Казаков Д.И., Котиков А.В.-ЯФ, 1987, 46, 1767.
18. Казаков Д.И., Котиков А.В. Препринты ОИЯИ, Р2-87-686, Р2-87-687, Дубна, 1987.
19. Yndurain F.J.-Phys. Lett., 1978, 74B, 68.
20. Nachmann P.-Nucl. Phys., 1977, B63, 237.
21. Berdsma F. et al.-Phys. Lett., 1983, 113B, 269;
Varkell K. et al. -Z. Phys. C., 1987, 36, 1.
22. Conzalez-Arrogo A., Lopez C., Yndurain F.J.-Phys. Lett., 1981, 98B, 215.
23. Kotikov A.V. JINR preprint E2-88-140 , Dubna, 1988.
24. Conzaler- Arrogo A., Lopez C., Yndurain F.J.-Nucl. Phys., 1979, B153, 161.
25. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды М.: Наука, 1981.
Двайт Г.Б. Таблицы интегралов. М.: Наука, с. 121.
26. Broadhurst D.J. Open University preprint OUT-4102-18, 1985.
Broadhurst D.J.-Z. Phys. C., 1986, 32, 249.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1988 года.

Котиков А.В. Р2-88-139
Поведение несинглетных структурных функций глубоконеупругого рассеяния при x~0 и x~1 и их схемно-инвариантная параметризация

Рассмотрено схемно-инвариантное поведение несинглетных структурных функций глубоконеупругого рассеяния при $x\to0$ и $x\to1$ и построена их параметризация, не зависящая от схемы перенормировок. Параметризация проста, удовлетворяет правилам сумм во втором порядке теории возмущений и с точностью до α_s-поправки совпадает с параметризацией, предложенной в работе[5]. Более того, в рамках схемно-инвариантного подхода существует простой критерий применимости самой теории возмущений. Мы приводим область переменных x и Q^2, где разложение по так называемой схемно-инвариантной оптимизированной теории возмущений является корректной операцией. Мы приводим также аналитическое продолжение коэффициентов в разложении Вильсона на полуцелые значения n, что может иметь самостоятельный интерес.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Kotikov A.V. P2-88-139
Behaviour of Nonsinglet Structure Functions of Deep Inelastic Scattering at x~0 and x~1 and Their Scheme-Invariant Parametrization

Scheme-invariant behaviour of the nonsinglet structure functions of deep inelastic scattering for $x\to0$ and $x\to1$ is considered, and their parametrization that does not depend on the renormalization scheme is constructed. The parametrization is simple, satisfies the sum rules to the next-to-leading order of perturbation theory and coincides, within the correction, with the parametrization suggested in paper[5]. Moreover, in the framework of the scheme-invariant approach there exist a simple criterion of applicability of the perturbation theory. The region of variables x and Q^2 where the expansion in the so-called scheme-invariant optimized perturbation theory is correct operation is shown. The analytical continuation of the Wilson coefficients to the half-integer n, which may be of independent interest, is also given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988