объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-132

Н.С.Шавохина

УРАВНЕНИЯ БОРНА - ИНФЕЛЬДА И МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Направлено в журнал "Известия вузов. Математика"

1988

В работе [1] было замечено, что в случае четырехмерного мира Минковского уравнения Борна - Инфельда тесно связаны с двумерными минимальными поверхностями в этом мире. В настоящей работе устанавливается такая же связь аналогичных уравнений с K-мерными минимальными поверхностями в N-мерном плоском мире.

Уравнения Борна - Инфельда. Рассмотрим N-мерное аффинное пространство [2] с аффинными координатами $x^1, \ldots, x^N$ и введем симметричную невырожденную метрику $h_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ с постоянными коэффициентами $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$. Как показано в работе [3], уравнения Борна - Инфельда для ковекторного поля ϕ_α в таком мире можно записать в виде

$$f^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \phi_{\beta\gamma} = 0, \qquad /1/$$

где ∂_α - символ частного дифференцирования по координате x^α,

$$\phi_{\beta\gamma} = \partial_\beta \phi_\gamma - \partial_\gamma \phi_\beta, \qquad /2/$$

$f^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный тензору

$$f_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \phi_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} \phi_{\nu\beta}, \qquad /3/$$

$h^{\mu\nu}$ - тензор, обратный тензору $h_{\mu\nu}$.

Все греческие индексы принимают значения от 1 до N.

Минимальные поверхности. В том же самом мире, в котором мы записали уравнения /1/, рассмотрим K-мерную поверхность

$$x^\alpha = \xi^\alpha(u^1, \ldots, u^K). \qquad /4/$$

Наряду с греческими, введем еще и латинские индексы. Условимся, что латинский индекс принимает значения от 1 до K, если он располагается /в алфавите/ до буквы "o", и от K+1 до N, если он располагается после буквы "o". Саму же букву "o" в качестве индекса употреблять не будем.

Если рассматриваемая поверхность минимальна, то функции /4/ являются гармоническими функциями относительно гауссовой метрики $g_{ab} du^a \otimes du^b$, где

$$g_{ab} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial u^a} h_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial u^b}. \qquad /5/$$

Иначе говоря, они подчиняются системе дифференциальных уравнений

$$g^{mn}\{\frac{\partial^2\xi^\sigma}{\partial u^m\partial u^n} - [mna]\,g^{ab}\,\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial u^b}\} = 0, \qquad /6/$$

где (g^{ab}) - матрица, обратная матрице (g_{ab}), $[mna]$ - скобки Кристоффеля, равные

$$[mna] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{na}}{\partial u^m} + \frac{\partial g_{ma}}{\partial u^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial u^a}\right) = \qquad /7/$$

$$= \frac{\partial\xi^\mu}{\partial u^a}\,h_{\mu\nu}\,\frac{\partial^2\xi^\nu}{\partial u^m\partial u^n}\,.$$

Устанавливаемая связь. Будем искать минимальные поверхности, на которых в качестве параметров u^a можно выбрать координаты x^a. Соответственно положим

$$x^a = u^a,\ \ x^p = \xi^p(x^1,\dots,x^K)\,. \qquad /8/$$

В таком случае первые K из уравнений /6/ принимают вид

$$g^{mn}[mna]\,g^{ab} = 0 \qquad /9/$$

и, следовательно, последние из них принимают вид

$$g^{mn}\,\frac{\partial^2\xi^p}{\partial x^m\partial x^n} = 0\,. \qquad /10/$$

Но в силу /7/ уравнения /9/ следуют из уравнений /10/, так что уравнения /6/ сводятся к уравнениям /10/.

Выберем теперь координатные оси, для которых

$$h_{ap} = h_{pa} = 0, \qquad /11/$$

и будем искать решение системы уравнений /1/ в виде

$$\phi_\alpha = h_{\alpha\mu}\,\xi^\mu, \qquad /12/$$

где $\xi^a = x^a$, а ξ^p не зависят от координат x^s. Иначе говоря, при условиях /11/ положим

$$\xi^a = x^a,\ \ \xi^p = \xi^p(x^1,\dots,x^K)\,. \qquad /13/$$

В таком случае тензор /2/ имеет компоненты

$$\phi_{ab} = 0,\ \ \phi_{pq} = 0$$

$$\qquad /14/$$

$$\phi_{ap} = \partial_a\phi_p = h_{ps}\,\frac{\partial\xi^s}{\partial x^a} = -\phi_{pa}\,.$$

Следовательно, тензор /3/ имеет компоненты

$$f_{ab} = h_{ab} + \frac{\partial\xi^p}{\partial x^a}\,h_{pq}\,\frac{\partial\xi^q}{\partial x^b},$$

$$f_{pq} = h_{pq} + \frac{\partial\phi_p}{\partial x^a}\,h^{ab}\,\frac{\partial\phi_q}{\partial x^b}, \qquad /15/$$

$$f_{ap} = f_{pa} = 0.$$

Поэтому $f^{ap} = f^{pa} = 0$, матрица (f^{ab}) обратна матрице (f_{ab}), и матрица (f^{pq}) обратна матрице (f_{pq}). Далее, так как $\partial_p\phi_{\beta\gamma} = 0$, $f^{as} = 0$ и $\phi_{bc} = 0$, то вследствие /14/ из уравнений /1/ остаются только те, которые эквивалентны уравнениям

$$f^{ab}\,\frac{\partial^2\xi^p}{\partial x^a\partial x^b} = 0. \qquad /16/$$

Но при условиях /11/ матрица /5/ совпадает с первой из матриц /15/. Следовательно, при этих условиях $f^{ab} = g^{ab}$, и уравнения /16/ совпадают с уравнениями /10/.

Таким образом, решения системы уравнений /1/, представимые в виде /12-13/, и решения системы уравнений /6/, представимые в виде /8/, связаны зависимостью $\phi_\alpha = h_{\alpha\beta}\,x^\beta$ или $x^\beta = h^{\beta\alpha}\,\phi_\alpha$, если удовлетворяются условия /11/.

Причину установленной зависимости можно усмотреть в вариационном принципе. Как известно, уравнения /1/ получаются в результате варьирования по ϕ_α интеграла

$$I_1 = \int\sqrt{|\Delta_1|}\,dx^1\dots dx^N,$$

а уравнения /6/ - в результате варьирования по ξ^a интеграла

$$I_6 = \int\sqrt{|\Delta_6|}\,du^1\dots du^K.$$

Здесь Δ_1 - определитель матрицы $(h_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta})$, Δ_6 - определитель матрицы /5/. При условиях /11-13/

$$(h_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} h_{ab} & \phi_{aq} \\ \phi_{pb} & h_{pq} \end{pmatrix}.$$

Из каждой строки

$$S_a = (h_{a1} \dots h_{aK}\ \phi_{aK+1} \dots \phi_{aN})$$

этой матрицы вычтем линейную комбинацию $\phi_{aq} h^{qp} S_p$ строк

$$S_p = (\phi_{p1} \dots \phi_{pK}\ h_{pK+1} \dots h_{pN}).$$

В результате находим, что определитель Δ_1 равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} f_{ab} & 0 \\ \phi_{pb} & h_{pq} \end{pmatrix},$$

где

$$f_{ab} = h_{ab} + \phi_{aq} h^{qp} \phi_{bp}. \qquad /17/$$

Поэтому $\Delta_1 = |f_{ab}||h_{pq}|$. Но в силу /14/ матрица /17/ равна первой из матриц /15/. С другой стороны, при условиях /8/ и /11/ матрица /5/ также равна первой из матриц /15/. Следовательно, $\Delta_1 = \Delta_6 |h_{pq}|$ и $I_1 = I_6 V$, где $V = \mathrm{const}$. В этом и коренится причина установленной зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Взаимодействие двух плоских волн в электродинамике Борна - Инфельда. В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, 1967, с.733.
2. Широков П.А. Тензорное исчисление. КГУ, 2-е изд., Казань, 1961, с.447.
3. Шавохина Н.С. Условия гармоничности для несимметричной метрики. Препринт ОИЯИ Р2-88-82, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1988 года.

Шавохина Н.С. Р2-88-132
Уравнения Борна - Инфельда и минимальные поверхности

В N-мерном плоском мире ($N \geq 3$) с невырожденной симметричной метрикой любого индекса рассматриваются: а/ система уравнений Борна - Инфельда и б/ система уравнений, определяющих в этом мире K-мерные минимальные поверхности ($1 \leq K \leq N-1$). Конструктивным путем доказывается, что существуют решения, общие для рассматриваемых систем, и что возможность существования таких решений заложена в вариационном принципе.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Shavokhina N.S. P2-88-132
The Born - Infeld Equations and Minimal Surfaces

In the N-dimensional flat space ($N \geq 3$) with symmetric nondegenerated metric of any index the systems are under consideration: a) the system of Born - Infelds equations and b) the system of equations defining K-dimensional surfaces in this space ($1 \leq K \leq N-1$). It is explicitly demonstrated that there exist solutions common for the considered systems and the possibility of these solutions follows from the variational principle.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988