объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-127

В.Ш.Гогохия*, Г.В.Ефимов, Б.А.Маградзе*

ПОСТОЯННЫЙ ГЛЮОННЫЙ ПРОПАГАТОР И КВАРКОВЫЙ КОНФАЙНМЕНТ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

*Математический институт АН ГССР, Тбилиси

1988

I. Введение

Проблема исследования асимптотического поведения низших функций Грина в инфракрасной области КХД привлекает в последние годы большое внимание. С инфракрасной асимптотикой глюонного пропагатора и с аналитическими свойствами кваркового пропагатора связываются такие важные проблемы квантовой теории поля, как конфайнмент и нарушение киральной симметрии.

Теория возмущений в этой области неприменима, поэтому необходимо использовать другие методы. Эффективный непертурбативный метод исследования функций Грина в инфракрасной области КХД основан на совместном решении асимптотических уравнений Швингера - Дайсона (ШД) /I-2/ и калибровочных тождеств Славнова - Тейлора (СТ) /3/. Изучение глюонного пропагатора в этом подходе занимает центральное место /4-8/. В результате многочисленных исследований (в аксиальной /4-5/, в светоподобной /6/ и ковариантной /7/ калибровках) удалось показать, что инфракрасная асимптотика глюонного пропагатора вида $D(k)\sim k^{-4}$, $k\to 0$, при определенных предположениях не противоречит уравнениям ШД. В потенциальном подходе эта асимптотика определяет линейно растущий на бесконечности потенциал между кварком и антикварком. В этом смысле считается , что такая инфракрасная асимптотика глюонного поля обеспечивает выполнение кваркового конфайнмента. Следует подчеркнуть, что при этом ничего не говорится о конфайнменте отдельного кварка /II/. В дальнейшем в работе /9/ появилось достаточно обоснованное сомнение в правильности этого поведения в аксиальной калибровке. Следует также отметить недавнюю работу /I0/, где показано, что аналитическая в нуле функция также не противоречит уравнениям ШД для глюонного пропагатора.

Исследованию кваркового пропагатора в инфракрасной области посвящено большое количество работ /9-I7/. При этом сингулярный глюонный пропагатор типа k^{-4} использовался задолго до обоснования такого поведения /2/. Определение конфайнмента связано с поведением вблизи массовой поверхности функции Грина кварка, возникшей в результате взаимодействия с глюонным полем /II/. Под конфайнментом понимается исчезновение простого полюса у функции Грина /I4/ кварка в точке $p^2=m^2$, где m - масса кварка. Функция Грина кварка может быть целой, но может быть и не целой /I6/, однако полюс первого порядка в точке $p^2=m^2$ исчезает. Обращение в нуль кваркового пропагатора при снятии инфракрасной регуляризации также является признаком конфайнмента /I3/.

В работе /II/ с помощью функционального интеграла было установлено, что k^{-4} хотя и может привести к конфайнменту кварков, но противоречит механизму возникновения стабильных адронных состояний. В этой работе в ковариантной калибровке был предложен менее сингулярный, чем k^{-4}, глюонный пропагатор вида

$$D_{\mu\nu}(k)=g_{\mu\nu}M^2\delta^4(k)\ ,\quad k\to 0. \qquad (I)$$

В настоящей работе мы исследуем уравнение ШД для кваркового пропагатора в инфракрасной области, используя в качестве глюонного пропагатора его инфракрасную асимптотику (I). В разделе 2 с учётом тождеств СТ уравнение ШД сведено к нелинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка для инвариантных структур кваркового пропагатора. Параметр нелинейности этой системы совпадает со значением собственной энергии "духа" в нуле $b\equiv b(0)$. В разделе 3 проведено исследование решений полученной системы уравнений для кваркового пропагатора. Рассмотрены решения для различных значений параметров, входящих в уравнения. При параметре нелинейности b, не равном нулю, показано, что кварковый пропагатор не может иметь полюсной особенности ни в какой конечной точке в импульсном пространстве. При $b=0$, что соответствует приближению абелевой хромодинамики, решения системы уравнений находятся в явном виде. Все решения имеют существенную особенность в точке $g=0$, где g -константа связи, что означает явно непертурбативный характер полученных решений. Далее, возникающие при интегрировании постоянные фиксируются граничными условиями, накладываемыми на функцию Грина. Можно потребовать аналитичность решения в точке $p^2=0$. Тогда функция Грина кварка является целой аналитической функцией в импульсном пространстве. В кирально симметричном пределе $m=B=0$ решение системы найдено в явном виде и является целой функцией. Таким образом, все полученные решения являются решениями конфайнментного типа.

2. Вывод уравнения в инфракрасной области

Выпишем просуммированное по цветовым индексам уравнение ШД для кваркового пропагатора в КХД

$$S^{-1}(p)=\hat{p}-m-\frac{ig^2C_F}{(2\pi)^4}\int\Gamma_\mu(p,q)S(p-q)\gamma_\nu D_{\mu\nu}(q)\,d^4q, \qquad (2)$$

где m - затравочная масса кварка, g - константа связи C_F = 4/3 и $\Gamma_\mu(p,q)$ - кварк-глюонная вершина. Вид глюонного пропагатора во всей области импульсных переменных фиксируем выражением /II/

$$D_{\mu\nu}(q)=-i\,\eta\,g_{\mu\nu}M^2\delta^4(q), \qquad (3)$$

здесь M – размерный параметр, характеризующий инфракрасную область $\eta = \pm 1$. Подставим выражение (3) вместо полного глюонного пропагатора в уравнение ШД (2). Предположив регулярность кварк-глюонной вершины $\Gamma_\mu(p,q)$ при $q \to 0$, получим следующее приближенное уравнение для кваркового пропагатора

$$S^{-1}(p) = \hat{p} - m - \frac{C_F g^2 M^2}{(2\pi)^4} \eta\, \Gamma_\mu(p,0) S(p) \gamma^\mu . \qquad (4)$$

В работе /2/ тождество СТ для кварк-глюонной вершины $\Gamma_\mu(p,0)$ было сведено к следующему матричному уравнению:

$$\Gamma_\mu(p,0)\big(1 + b(0)/2\big) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p^\mu} - \frac{1}{2} b(0) S(p) \Gamma_\mu(p,0) S^{-1}(p) \qquad (5)$$

$$b(0) = \lim b(k^2) \quad k \to 0,$$

здесь $b(k^2)$ – собственная энергия "духа". При этом для глюонного пропагатора в поперечной калибровке предполагалось сингулярное поведение вида k^{-4}. Легко можно проверить, что уравнение (5) справедливо также и в случае предположения (3).

Введем инвариантные структуры для кваркового пропагатора

$$S(p) = \hat{p} A(p^2) + B(p^2). \qquad (6)$$

Решение матричного уравнения (5) для $\Gamma_\mu(p,0)$ может быть представлено в виде

$$\Gamma_\mu(p,0) = \gamma_\mu F_1 + p_\mu F_2 + p_\mu \hat{p} F_3 + \hat{p} \gamma_\mu F_4 , \qquad (7)$$

где алгебраические структуры F_i можно выразить через функции A и B

$$F_1(p^2) = -\frac{A}{B^2 - p^2 A^2} \cdot \frac{(1+b)B^2 - p^2 A^2}{(1+b)^2 B^2 - p^2 A^2}, \quad F_4(p^2) = \frac{b}{B^2 - p^2 A^2} \cdot \frac{A^2 B}{(1+b)^2 B^2 - p^2 A^2},$$

$$F_3(p^2) = \frac{1}{(1+b)} \cdot \frac{A + 2p^2 A'}{p^2} - \frac{F_1}{p^2}, \quad F_2(p^2) = \frac{2B'}{(1+b)} - F_4(p^2),$$

$$A' = \frac{\partial}{\partial p^2} A, \qquad B' = \frac{\partial}{\partial p^2} B .$$

Подставляя формулы (6) и (7) в уравнение (4), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для структур A

и B. Выпишем результат для соответствующих безразмерных величин, для которых мы сохраним прежние обозначения A и B:

$$A + B^2 - tA^2 = \eta\lambda \left(A^2 + \frac{t}{2} AA' - \frac{BB'}{2} + \frac{3}{4} b A^2 \cdot \frac{(1+b)B^2 - tA^2}{(1+b)^2 B^2 - tA^2} \right),$$

$$B + \bar{m}(B^2 - tA^2) = \eta\lambda \left(AB - \frac{t}{2}(AB' - A'B) + \frac{3}{4} b^2 \frac{tA^3 B}{(1+b)^2 B^2 - tA^2} \right),$$

где

$$\bar{m} = m/M, \quad \lambda = \frac{4g^2 C_F}{(2\pi)^4 (1+b)}, \quad t = p^2/M^2, \quad A' = \partial_t A, \quad B' = \partial_t B.$$

В нормальной форме система имеет вид

$$\partial_t B = \frac{3}{2} b(1+b) \frac{A^2 B}{B^2 (1+b)^2 - A^2 t} - \frac{2}{\eta \cdot \lambda} (\bar{m} A - B),$$

$$\partial_t A = \frac{3}{2} b \frac{A^3}{B^2 (1+b)^2 - A^2 t} - \left(\frac{2}{t} + \frac{2}{\eta\lambda} \right) A + \frac{2}{\eta \cdot \lambda} \frac{1}{t} + \frac{2}{\eta \cdot \lambda} \bar{m} \frac{B}{t} . \qquad (8)$$

Очевидно, что b – параметр нелинейности системы.

3. Исследование уравнения для кваркового пропагатора

Приступим к исследованию системы уравнений (8). Найти точные решения нелинейной системы нам не удалось, поэтому мы поступим следующим образом. Во-первых, покажем, что решения системы (8) в общем случае $b \neq 0$ не имеют полюсных особенностей ни в какой конечной точке $t = t_0 (0 < t_0 < \infty)$. Другими словами, полюс у пропагатора кварка исчезает, что является признаком конфайнмента. Во-вторых, система (8) в случае $b = 0$ линеаризуется и допускает полное исследование всех возможных решений. Мы изучим этот случай и покажем, что получающиеся решения также соответствуют определению конфайнмента. В-третьих, мы рассмотрим кирально-инвариантный пропагатор $m = 0$, $B = 0$ и покажем, что и в этом случае функция Грина кварка удовлетворяет условию конфайнмента.

I. Первое утверждение доказывается просто. Действительно, предположим, что функции $A(t)$ и $B(t)$ имеют особенность в точке $t = t_0$ вида

$$A(t)=\frac{\bar A(t)}{(t-t_0)^\alpha}, \qquad B(t)=\frac{\bar B(t)}{(t-t_0)^\alpha}, \tag{9}$$

где $\alpha>0$, и функции $\bar A(t)$ и $\bar B(t)$ аналитичны в точке $t=t_0$. Подставим (9) в (8) и рассмотрим поведение системы уравнений в окрестности точки $t=t_0$. Выделив наиболее сингулярные слагаемые, имеем

$$-\frac{\alpha \bar B}{(t-t_0)^{\alpha+1}} = \frac{3}{2} b(1+b)\frac{\bar A^2\bar B}{(t-t_0)^\alpha[\bar B^2(1+b)^2-\bar A^2 t]} + O\left(\frac{1}{(t-t_0)^\alpha}\right),$$

$$-\frac{\alpha \bar A}{(t-t_0)^{\alpha+1}} = \frac{3}{2} b\frac{\bar A^3}{(t-t_0)^\alpha[\bar B^2(1+b)^2-\bar A^2 t]} + O\left(\frac{1}{(t-t_0)^\alpha}\right).$$

Ясно, что должно быть

$$t_0=\frac{\bar B^2(1+b)^2}{\bar A^2}\Big|_{t=t_0},$$

но тогда имеем

$$\alpha=\frac{3}{2} b(1+b)\bar A^2(t_0)\,const, \qquad \alpha=\frac{3}{2} b\bar A^2(t_0)\,const,$$

откуда следует, что при $b\neq 0$ система (8) не допускает представление решения в форме (9). Аналогично можно проверить, что не существуют сингулярные решения более сложного вида:

$$A(t)=\bar A(t)/(t-t_0)^\alpha, \quad B(t)=\bar B(t)/(t-t_0)^\beta,$$
$$\alpha\neq -n, \quad \beta\neq -m, \qquad n, m = 1, 2 \ldots$$

II. Рассмотрим исходную систему (8) в приближении абелевой хромодинамики $b=0$. В этом случае её удобнее записать в виде

$$A(t)=\frac{1}{m}\left(B(t)+\frac{\eta\lambda}{2}B'(t)\right),$$

$$tB''(t)+2\left(1+\frac{2}{\eta\lambda}t\right)B'(t)+\left[\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 t+\frac{4}{\eta\lambda}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\bar m^2\right]B=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\bar m, \tag{10}$$

$$tB''(t)+2\left(1+\frac{2}{\eta\lambda}t\right)B'(t)+\left(\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 t+\frac{4}{\eta\lambda}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\bar m^2\right)B=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\bar m. \tag{11}$$

Два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения имеют вид

$$B_1(t)=\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}\eta t}}{\sqrt{t}}I_1\left(\frac{4\bar m}{\lambda}\sqrt{t}\right) \qquad B_2(t)=\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}\eta t}}{\sqrt{t}}K_1\left(\frac{4\bar m}{\lambda}\sqrt{t}\right), \tag{12}$$

где I_1 и K_1 – функции Бесселя от мнимого аргумента.

Частное решение неоднородного уравнения тогда можно записать следующим образом:

$$W(t)=\frac{8}{\lambda^2}\bar m\left\{B_1(t)\int_0^t dt'\,t'\exp(4\eta t'/\lambda)\,B_2(t') - B_2(t)\int_0^t dt'\,t'\exp(4\eta t'/\lambda)\,B_1(t')\right\}, \tag{13}$$

а общее решение затем представим в виде

$$B(t)= C_1B_1(t)+C_2B_2(t)+W(t). \tag{14}$$

Легко убедиться, что частное решение неоднородного уравнения есть целая функция, поскольку

$$B_2(t)=\frac{1}{2}\ln t\, B_1(t)+\bar B_2(t),$$

где $\bar B_2(t)$ имеет полюс первого порядка в точке $t=0$. Поэтому для получения регулярного в нуле решения необходимо в (14) положить $C_2=0$. Регулярное в нуле решение, таким образом, имеет вид.

$$B(t)=C_1B_1(t)+W(t), \tag{15}$$

где явные виды $B_1(t)$ и $W(t)$ даются соотношениями (I2) и (I3) соответственно. Оставшаяся произвольная константа интегрирования C_1 может быть определена, например, с помощью эффективного потенциала для составных операторов /I8/. Решения для инвариантной функции $A(t)$ получается подстановкой решения (I5) и его производной в исходное соотношение /I0/. Полученное решение в случае выбора знака $\eta=-1$ в пространственноподобном направлении $t\to-\infty$ убывает и возрастает во времениподобном направлении $t\to\infty$

$$B(t)\sim\frac{1}{t},\qquad A(t)\sim\frac{1}{t},\qquad t\to-\infty,$$

$$B(t)\sim C_1\sqrt{\frac{\bar m\lambda}{8\pi}}\,t^{-3/4}\exp\left(\frac{2}{\lambda}(t+2\bar m\sqrt{t})\right)-\sqrt{\frac{\bar m^3 2\pi}{\lambda}}\,t^{-3/4}\exp\left(\frac{2}{\lambda}(t-2\bar m\sqrt{t}+\bar m^2)\right),$$
$$t\to\infty.$$

При выборе знака $\eta=1$ картина меняется на обратную: A и B убывают при $t\to\infty$ и растут при $t\to-\infty$.

Таким образом, решение уравнения (I5), не имеющего особенности в точке $t=0$, убывает в евклидовом направлении $t\to-\infty$ при $\eta=-1$ и растёт экспоненциально во времениподобном направлении $t\to\infty$. Такое поведение пропагатора кварка близко к поведению пропагатора виртонного поля /I9/. Ограничимся поэтому в дальнейшем в решении (I5) знаком $\eta=-1$.

$A(t)$ и $B(t)$ как функции константы связи λ имеют существенную особенность в точке $\lambda=0$. Это подчёркивает непертурбативный характер полученных решений. Результат теории возмущений получается при $\lambda\to0$ в области пространственноподобных импульсов $(t<0)$. В этом случае имеем

$$\lim_{\lambda\to0}B(t)=\frac{\bar m}{t-\bar m^2},\qquad \lim_{\lambda\to0}A(t)=\frac{1}{t-\bar m^2}.$$

При $t>0$ конечного предела при $\lambda\to0$ для $A(t)$ и $B(t)$ не существует.

Ш. Исследуем теперь кирально-инвариантный предел исходной системы (8) $(\bar m=B(t)=0)$. В этом случае получаем уравнение

$$A'(t)+\left(\frac{2+3b/2}{t}-\frac{2}{\lambda}\right)A(t)=-\frac{2}{\lambda}\,\frac{1}{t},\qquad\text{(I6)}$$

общий интеграл которого имеет вид

$$A(t)=(-t-i0)^{-(2+1.5b)}e^{\frac{2}{\lambda}t}\left\{C-\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^{-(2+1.5b)}\Gamma\left(2+\frac{3}{2}b,\frac{2}{\lambda}t\right)\right\},\qquad\text{(I7)}$$

здесь $\Gamma(2+3b/2,\frac{2}{\lambda}t)$ – неполная гамма-функция, C -произвольная константа интегрирования. Полагая в (I7)

$$C=\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^{-(2+1.5b)}\Gamma\left(2+\frac{3}{2}b\right),$$

получим решение, которое совпадает с целой функцией

$$A(t)=e^{\frac{2}{\lambda}t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2t/\lambda)^n}{n!\,(2+n+1.5b)}$$

и $b\neq-2(n+2)/3$, $n=0,1,2\dots$. В случае же $b=-2(n+2)/3$ ($n=0,1,2\dots$) решение имеет логарифмическую точку ветвления при $t=0$.

В заключение заметим, что наше решение (I5) в пределе $\bar m\to0$ переходит в решение

$$B(t)=0,\qquad A(t)=\frac{1}{t}+\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left(\frac{1-e^{2t/\lambda}}{t^2}\right),$$

полученное в работе /I5/, если только произвольная константа C_1 регулярным образом зависит от $\bar m$.

Авторы выражают благодарность А.Н.Тавхелидзе и А.Т.Филиппову, а также Б.А.Арбузову, Б.М.Барбашову, В.Г.Кадышевскому и А.А.Хелашвили за интерес к работе и ценные замечания.

Литература

1. Mandelstam S. -Phys. Rev., 1979, v. D20, No I2, p. 3223-3238. Wilson K.G.-Phys. Rev., 1974, v.D10, No.8, p.2445-2459.

2. Pagel H.-Phys. Rev., 1977, v. DI5, No IO, p. 2991-3002.

3. Славнов А.А. – ТМФ, 1972, т. 10, № 2, с. 153-161.
Taylar J.C.–Nucl. Phys., 1971, v. B33, No 2, p. 436-444.
Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М. 1978.
4. Baker M., Ball J.S., Zachariasen F. –Nucl. Phys., 1981, v. B186, No 3, p. 531-582; 1983, v. b229, p. 445-445.
5. Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Байков В.А. – ТМФ, 1982, т. 52, № 2, с. 187-198.
6. Патрошвили К.Р., Хелашвили А.А., Хмаладзе В.Ю.-ТМФ, 1985, т. 65, № 3, с. 360-367.
7. Арбузов Б.А., Боос Э.Э., Давыдычев А.И. Инфракрасные асимптотики глюонных функций Грина в ковариантной калибровке: Препринт ИФВЭ 86-123. Серпухов: ИФВЭ, 1986.
8. Труды рабочего совещания по проблеме "Инфракрасное поведение в квантовой хромодинамике". Тбилиси, 16-18 апреля 1985 года. Из-во ТГУ, 1985 г., Тбилиси.
9. Zhang R.B.–Phys. Rev., 1985, v. D31, No 6, p. 1512-1514.
10. Stingl M.–Phys. Rev., 1986, v. d34, No 12, p. 3863-3881.
11. Ефимов Г.В. Инфракрасная асимптотика и конфайнмент: Препринт Р2-84-716, Дубна: ОИЯИ, 1984.
12. Арбузов Б.А., Давыдычев А.И. – ТМФ, 1987, т. 71, № 1, с. 21-30.
13. Славнов А.А. – ТМФ, 1983, т. 54, № 1, с. 52-56.
14. Harada K. – Prog. Theor. Phys., 1982, v. 68, N 4, p. 1324-1339.
15. Munczek H.J. – Phys. Lett., 1986, v. 175, No 2, p. 215-218.
16. Arbuzov B.A.–Phys. Lett., 1983, v. 125, B No 6, p. 497-500.
Ball J.S., Zachariasen F. –Phys. Lett., 1981, v. B106, No 1-2.
Pocsik G., Torma T. Infrared Asymptotics of the Quark Propagator in nonabelian Gange Theories. ITP BUDAPEST REPORT No 431, 1985.
Некрасов М.Л., Рочев В.Е.–Ядерная физика, 1984, т. 39, вып. 5, стр. 1275-1286.
Fodor Z. Infrared Asymptotics of the Quark Propagator. ITP-BUDAPEST REPORT No 442, 1986.
17. Gogokhia V. Sh., Magradze B.A. Nonparturbative approach to quark prppagator in Covariant, transverse gauge Preprint CRIP KFKI - 1987 - 01/A BUDAPEST: CRIP, 1987.
18. Cornwall J.M.–Phys. Rev., 1974, v. D10, N 8, p. 2428-2445.
19. Ефимов Г.В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 февраля 1988 года.

Гогохия В.Ш., Ефимов Г.В., Маградзе Б.А. Р2-88-127
Постоянный глюонный пропагатор и кварковый конфайнмент в квантовой хромодинамике

Изучается уравнение Швингера – Дайсона для кваркового пропагатора с учетом калибровочного тождества в инфракрасной области КХД. Показано, что поведение глюонного пропагатора $D(K) \sim \delta^4(K)$ в инфракрасной области в ковариантной калибровке приводит к кварковому конфайнменту. Все полученные решения для кваркового пропагатора являются решениями конфайнментного типа, имеют непертурбативный характер и не нарушают киральную инвариантность.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод авторов

Gogokhia V.Sh., Efimov G.V., Magradze B.A. P2-88-127
Constant Gluon Propagator and Quark Confinement in QCD

Schwinger – Dyson equation for the quark propagator in QCD is investigated in the infrared region. Gauge identity is taken into account. It is shown that the infrared behaviour of the gluon propagator in the covariant gauge $D(K) \sim \delta^4(K)$ leads to the quark confinement. All the obtained solutions for quark propagator are of the confinement type, have a nonperturbative character and do not break chiral invariance.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988