объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-114

В.К.Мельников

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Inverse Problems"

1988

В настоящей работе речь идет о взаимодействии солитонов в системе, описываемой уравнениями вида/I/

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u\varphi = E\varphi, \tag{I}$$

где $\varkappa$ и E - вещественные параметры, удовлетворяющие условиям $\varkappa^2 = 1$, $E > 0$.

Нетрудно убедиться, что система (I) обладает односолитонным решением вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x - \tau t)]}, \quad \varphi = \frac{A\exp(i\sigma t)]}{ch[\mu(x - \tau t)]}, \tag{2}$$

где вещественные параметры μ, τ и комплексная величина A удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu^2 = E, \quad \tau = 4(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2), \tag{3}$$

а частота σ принимает произвольные вещественные значения. Отсюда следует, что при $A = 0$ имеем $\tau = 4\mu^2$, т.е. в этом случае решение (2) вырождается в односолитонное решение уравнения Кортевега - де Вриса/2/:

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x - 4\mu^2 t)]}, \quad \varphi = 0. \tag{4}$$

Легко видеть, что при $A \neq 0$ и $\varkappa = 1$ из соотношений (3) вытекает неравенство $\tau > 4\mu^2$, т.е. в этом случае фазовая скорость солитона (2) больше фазовой скорости солитона (4), а сам солитон (2) может двигаться только в одном направлении, именно слева направо. Однако при $A \neq 0$ и $\varkappa = -1$ имеем $\tau < 4\mu^2$, т.е. фазовая скорость солитона (2) на этот раз меньше фазовой скорости солитона (4). Следовательно, при $\varkappa = -1$ солитоны вида (2) могут распространяться в обоих направлениях.

Более того, при $|A| = E$ и $\varkappa = -1$ в силу (3) получаем $\tau = 0$, т.е. в этом случае солитон (2) покоится.

Взаимодействие солитонов (2) всегда имеет довольно необычный характер. Так, например, в типичном случае, т.е. при рассмотрении взаимодействия $N > 1$ солитонов (2) с разными значениями величин τ_m, $m = 1, \ldots, N$, получаемое с помощью метода обратной задачи рассеяния N-солитонное решение системы (I) описывает эволюцию солитона (2) с наибольшим значением величины $\mu\tau_m$ в солитон с наименьшим значением этой величины.

Далее, $N > 1$ солитонов (2) с одинаковыми значениями параметра τ, но с разными значениями величин σ_m образуют уединенную волну вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x - \tau t - f)]}, \quad \varphi = \frac{A \exp(i\sigma t)}{ch[\mu(x - \tau t - f)]}, \tag{5}$$

где f и A – 2π-периодические функции переменных $\theta_{m,n} = (\sigma_m - \sigma_n)t$, $m, n = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие единственному условию

$$\frac{df}{dt} + \tau = 4(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2), \tag{6}$$

а частота σ равна одной из величин σ_m. Отсюда следует, что величина τ в этом случае удовлетворяет условию

$$\tau = 4(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A_0|^2), \tag{7}$$

где

$$|A_0|^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |A(t)|^2 dt. \tag{8}$$

Таким образом, движение волны (5) слагается из равномерного поступательного движения и условно-периодического колебательного движения. При этом u-волна сохраняет свою форму, а амплитуда источника φ меняется со временем как некоторая условно-периодическая функция t. При $\varkappa = -1$ возможен случай с $\tau = 0$. В этом случае решение (5) описывает волну, которая как целое совершает условно-периодическое колебательное движение. Согласно (6)-(8) в этой ситуации справедливы соотношения $|A_0| = E$, $|A(t)| \not\equiv E$. В данной работе построены решения системы (I), которые описывают эволюцию солитона (2) в уединенную волну (5) или наоборот – эволюцию уединенной волны (5) в солитон (2). В частном случае эти решения описывают либо солитон (2), который приходит из бесконечности, а затем захватывается в условно-периодический колебательный режим, либо волну (5), которая совершала

условно-периодическое колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит на бесконечность в виде солитона (2).

Наконец, отметим, что при $\varkappa = 1$ система (I) допускает решение вида

$$u = \frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x - 16\mu^2 t)]}, \quad \varphi = A\,\frac{sh[\mu(x - 16\mu^2 t)]}{ch^2[\mu(x - 16\mu^2 t)]}\exp(i\sigma t), \tag{9}$$

где вещественный параметр μ и комплексная величина A удовлетворяют условиям

$$\mu^2 = E, \quad |A| = 3\mu^2,$$

а при $\varkappa = -1$ система (I) обладает решением

$$u = \frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x - 4\mu^2 t)]}, \quad \varphi = \frac{A\exp(i\sigma t)}{ch^2[\mu(x - 4\mu^2 t)]}, \tag{10}$$

где вещественный параметр μ и комплексная величина A удовлетворяют условиям

$$4\mu^2 = E, \quad |A| = 3\mu^2.$$

В работе найдены решения системы (I), описывающие распады волн (9) и (IO) на солитон (4) и волну (5), а также решения, описывающие слияние солитона (4) и волны (5) в одну волну (9) или (IO).

§I. Специальный случай многосолитонного решения системы (I.I)

Исходным пунктом всех последующих рассмотрений послужит следующая система нелинейных эволюционных уравнений /3/:

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3v^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8\varkappa|\psi|^2\right)\right] = 0,$$
$$i\frac{\partial \psi}{\partial y} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{I.I}$$

где $\varkappa^2 = 1$. При определенных условиях эта система пригодна для приближенного описания взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Как было замечено в работе /I/, эта система обладает инвариантным многообразием

$$v = u(x,t),\quad \psi = \varphi(x,t)\exp(-iEy), \qquad (I.2)$$

где E – произвольная вещественная функция времени t. При условии, что функции u и φ стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$, движение на этом многообразии подчиняется системе (I). Таким образом, для нахождения интересующих нас решений системы (I) нам потребуются многосолитонные решения системы (I.I), такие, что функции v и $\psi\exp(iEy)$ не зависят от y. Эти решения могут быть найдены с помощью метода работы /4/. Делается это следующим образом.

Пусть N – произвольное целое число, удовлетворяющее условию $N>1$. Возьмем вектор-столбец λ с $N+1$ компонентами λ_m вида

$$\lambda_m = \begin{cases} a_m \exp[\mu_1 x - i\mu_1^2 y - 4(\mu_1^3 + \bar\rho_m^3)t], & \text{если } m = 1,\dots,N, \\ a_m \exp[\mu_2 x - i\mu_2^2 y - 4(\mu_2^3 + \bar\rho_m^3)t], & \text{если } m = N+1, \end{cases} \qquad (I.3)$$

где μ_1 и μ_2 – вещественные параметры, а величины $a_m \neq 0$ и ρ_m могут принимать комплексные значения. Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Пусть, далее, P и Q – квадратные матрицы порядка $N+1$ соответственно с элементами

$$P_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu_1}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m,n = 1,\dots,N, \\ \dfrac{1}{\mu_1+\mu_2}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m = N+1, \text{ а } n = 1,\dots,N, \text{ либо } m = 1,\dots,N, \text{ а } n = N+1, \\ \dfrac{1}{2\mu_2}\lambda_m\bar\lambda_n, & \text{если } m = n = N+1, \end{cases} \qquad (I.4)$$

$$Q_{m,n} = \frac{\varkappa}{\rho_m^3 + \bar\rho_n^3}, \quad m,n = 1,\dots,N+1.$$

Положим

$$D = \det\begin{vmatrix} \mathbb{1} & -Q \\ P & \mathbb{1} \end{vmatrix}, \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde e \\ 0 & \mathbb{1} & -Q \\ \lambda & P & \mathbb{1} \end{vmatrix}, \qquad (I.5)$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица порядка $N+1$, а e – вектор-столбец с $N+1$ компонентами e_m, равными единице. Здесь и всюду в дальнейшем знак "$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Согласно результатам работы /4/ функции

$$v = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \psi = \frac{\Psi}{D} \qquad (I.6)$$

удовлетворяют системе (I.I), т.е. являются ее решением.

Полученные выражения для многосолитонных решений системы (I.I) могут быть существенно упрощены. Прежде всего в силу (I.5) справедливы равенства

$$D = \det(\mathbb{1} + PQ), \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde e \\ \lambda & \mathbb{1} + PQ \end{vmatrix}. \qquad (I.7)$$

Возьмем теперь диагональную матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{N+1})$. С учетом (I.4) получаем

$$\Lambda e = \lambda, \quad \Lambda^{-1} P \bar\Lambda^{-1} = \frac{1}{2\mu_1} U, \quad \bar\Lambda Q \Lambda = 2\mu_1 R,$$

где U и R – квадратные матрицы порядка $N+1$ соответственно с элементами

$$U_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{если } m,n = 1,\dots,N, \\ \dfrac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}, & \text{если } m = N+1, \text{ а } n = 1,\dots,N, \text{ либо } m = 1,\dots,N, \text{ а } n = N+1, \\ \mu_1\mu_2^{-1}, & \text{если } m = n = N+1, \end{cases} \qquad (I.8)$$

$$R_{m,n} = \frac{\varkappa\bar\lambda_m\lambda_n}{2(\rho_m^3 + \bar\rho_n^3)\mu_1}, \quad m,n = 1,\dots,N+1.$$

Отсюда на основе (I.7) вытекают равенства

$$D = \det(\mathbb{1} + UR), \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde\lambda \\ e & \mathbb{1} + UR \end{vmatrix}. \qquad (I.9)$$

Пусть теперь H_0 – ортогональная матрица порядка N с элементами $H_{m,n}$, такими, что $H_{N,n} = N^{-1/2}$, $n = 1,\dots,N$. Очевидно, что остальные элементы этой матрицы удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{N} H_{m,n} = 0, \quad \text{если } 1 \le m < N. \qquad (I.10)$$

Положим

$$H = \begin{vmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (I.11)$$

Далее, пусть $V_{m,n}$ и $S_{m,n}$ – элементы матриц

$$V = HU\tilde{H}, \quad S = HR\tilde{H}$$

соответственно. С помощью (I.8),(I.10) и (I.11) нетрудно убедиться, что все элементы матрицы V равны нулю, кроме элементов

$$V_{N,N} = N, \quad V_{N,N+1} = V_{N+1,N} = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} N^{1/2}, \quad V_{N+1,N+1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{I.12}$$

а аналогичные элементы матрицы S равны

$$S_{N,N} = N^{-1} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n}, \quad S_{N,N+1} = N^{-1/2} \sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1},$$
$$S_{N+1,N} = N^{-1/2} \sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n}, \quad S_{N+1,N+1} = R_{N+1,N+1}. \tag{I.13}$$

В соответствии с (I.9) имеем

$$D = \det(1 + VS), \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{h} \\ He & 1+VS \end{vmatrix}, \tag{I.14}$$

где $h = H\lambda$ – вектор – столбец с компонентами $h_1, \ldots, h_{N+1}$, причем

$$h_N = N^{-1/2} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m, \quad h_{N+1} = \lambda_{N+1}, \tag{I.15}$$

а компоненты вектора He соответственно равны $0, \ldots, 0, N^{1/2}, 1$. Согласно (I.12)-(I.15) отсюда следуют равенства

$$D = \det\begin{vmatrix} 1+W_{1,1} & W_{1,2} \\ W_{2,1} & 1+W_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & h_N & h_{N+1} \\ N^{1/2} & 1+W_{1,1} & W_{1,2} \\ 1 & W_{2,1} & 1+W_{2,2} \end{vmatrix},$$

где

$$W_{1,1} = \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} + \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n},$$

$$W_{1,2} = N^{1/2} \sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1} + \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} N^{1/2} R_{N+1,N+1},$$

$$W_{2,1} = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} N^{-1/2} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} + \frac{\mu_1}{\mu_2} N^{-1/2} \sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n},$$

$$W_{2,2} = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} R_{N+1,N+1}.$$

На их основе получаем

$$\begin{aligned} D = {} & 1 + \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} + \frac{\mu_1}{\mu_2} R_{N+1,N+1} + \\ & + \frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2} R_{N+1,N+1} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} + \\ & + \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \left(\sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1} + \sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n} \right) - \\ & - \frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,N+1} R_{N+1,n}, \end{aligned} \tag{I.16}$$

$$\begin{aligned} \Psi = {} & -\left\{ 1 - \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n} - \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2} \sum_{n=1}^{N} R_{N+1,n} \right\} \lambda_{N+1} - \\ & - \left\{ 1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \sum_{m=1}^{N} R_{m,N+1} + \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2} R_{N+1,N+1} \right\} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m. \end{aligned} \tag{I.17}$$

Положим теперь

$$\rho_m^3 = \begin{cases} -\mu_1^3 + \frac{1}{4}(\mu_1 \tau_m + i\sigma_m), & \text{если } m = 1, \ldots, N, \\ -\mu_2^3 + \frac{1}{4}(\mu_2 \tau_m + i\sigma_m), & \text{если } m = N+1, \end{cases} \tag{I.18}$$

где σ_m и τ_m – вещественные параметры. В результате компоненты λ_m вектора – столбца λ допускают представление

$$\lambda_m = \begin{cases} \zeta_m \exp[\mu_1(x - \tau_m t)], & \text{если } m = 1, \ldots, N, \\ \zeta_m \exp[\mu_2(x - \tau_m t)], & \text{если } m = N+1, \end{cases} \tag{I.19}$$

где в силу (I.3) компоненты ζ_m вектора – столбца ζ имеют вид

$$\zeta_m = \begin{cases} a_m \exp(-i\mu_1^2 y + i\sigma_m t), & \text{если } m = 1, \ldots, N, \\ a_m \exp(-i\mu_2^2 y + i\sigma_m t), & \text{если } m = N+1. \end{cases} \tag{I.20}$$

Далее, на основе (I.8), (I.18) и (I.19) находим, что при $m, n = 1, \ldots, N$ справедливы равенства

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar{\zeta}_m\zeta_n\exp[2\mu_1 x-(\tau_m+\tau_n)\mu_1 t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}, \tag{I.21}$$

$$R_{m,N+1}=\frac{2\varkappa\bar{\zeta}_m\zeta_{N+1}\exp[\mu_1(x-\tau_m t)+\mu_2(x-\tau_{N+1}t)]}{[(\tau_m-4\mu_1^2)\mu_1^2+(\tau_{N+1}-4\mu_2^2)\mu_1\mu_2+i(\sigma_m-\sigma_{N+1})\mu_1]}, \tag{I.22}$$

$$R_{N+1,n}=\frac{2\varkappa\zeta_n\bar{\zeta}_{N+1}\exp[\mu_1(x-\tau_n t)+\mu_2(x-\tau_{N+1}t)]}{[(\tau_n-4\mu_1^2)\mu_1^2+(\tau_{N+1}-4\mu_2^2)\mu_1\mu_2-i(\sigma_n-\sigma_{N+1})\mu_1]},$$

а при $m=n=N+1$ имеем

$$R_{N+1,N+1}=\frac{\varkappa|\zeta_{N+1}|^2\exp[2\mu_2(x-\tau_{N+1}t)]}{(\tau_{N+1}-4\mu_2^2)\mu_1\mu_2}. \tag{I.23}$$

Таким образом, равенства (I.6),(I.16),(I.17) и (I.19)-(I.23) определяют некоторое многосолитонное решение системы (I.I). С его помощью будут получены все названные выше решения системы (I).

§ 2. Захват и удержание солитонов в системе (I)

Прежде всего рассмотрим случай с $\mu_1=\mu_2=\mu$. В силу (I.16) и (I.17) получаем, что в этом случае справедливы равенства

$$D=1+\sum_{m,n=1}^{N+1}R_{m,n}, \tag{2.1}$$

$$\Psi=-\sum_{m=1}^{N+1}\eta_m\exp[\mu(x-\tau_m t)-i\mu^2 y],$$

где согласно (I.19)-(I.23) при $m,n=1,\dots,N+1$ имеем

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_n\exp[2\mu x-(\tau_m+\tau_n)\mu t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]}, \tag{2.2}$$

$$\eta_m=a_m\exp(i\sigma_m t).$$

Положим теперь

$$\Phi=\Psi\exp(i\mu^2 y). \tag{2.3}$$

На основании (I.2) и (I.6) получаем, что функции D и Φ вида (2.I)-(2.3) определяют решение

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D} \tag{2.4}$$

системы (I) при $E=\mu^2$.

Выясним, каково поведение этого решения. С этой целью предположим, что величины $\gamma_m=\mu\tau_m+i\sigma_m$ все разные, $m=1,\dots,N+1$. Предположим далее, что при $m=1,\dots,N+1$ выполняется неравенство

$$(\tau_m-4\mu^2)\varkappa>0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что функции D и Φ допускают представление

$$D=1+K\exp(2\mu x),\quad \Phi=L\exp(\mu x), \tag{2.6}$$

где

$$K=2\varkappa\sum_{m,n=1}^{N+1}\frac{\bar{a}_m a_n\exp[-(\mu\tau_m+i\sigma_m)t]\exp[-(\mu\tau_n-i\sigma_n)t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2)\mu^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]},$$

$$L=-\sum_{m=1}^{N+1}a_m\exp[-(\mu\tau_m-i\sigma_m)t], \tag{2.7}$$

и, следовательно, функции K и L зависят только от t. С учётом сделанных выше предположений получаем, что квадратичная форма K положительно определена. Это значит, что $K>0$ при любом вещественном значении t. С помощью (2.4) и (2.6) получаем, что интересующее нас решение имеет вид

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-f)]},\quad \varphi=\frac{A}{ch[\mu(x-f)]}, \tag{2.8}$$

где

$$f=-\frac{1}{2\mu}\ln K,\quad A=\frac{1}{2}LK^{-1/2}. \tag{2.9}$$

В соответствии с (2.7) нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\mu\frac{dK}{dt}+8\mu^4K+2\varkappa|L|^2=0.$$

Отсюда следует, что определенные посредством (2.9) функции f и A

удовлетворяют соотношению

$$\frac{df}{dt} = 4\left(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A|^2\right). \tag{2.10}$$

Здесь уместно отметить, что функции u и φ вида (2.8) всегда удовлетворяют системе (I) при $E=\mu^2$, если входящие в (2.8) функции f и A удовлетворяют соотношению (2.10). Таким образом, беря произвольную комплексную функцию $A(t)$ и полагая

$$f = f_0 + 4\int_{t_0}^{t}\left(\mu^2 + \varkappa\mu^{-2}|A(\tau)|^2\right)d\tau,$$

мы всегда получим решение системы (I) в виде (2.8). Однако не при любом выборе функции $A(t)$ это решение может быть получено из многосолитонного решения системы (I.I).

Выясним теперь, какова динамика решения (2.8) при указанном выше выборе функций f и A. С этой целью возьмем целые числа N_- и N_+, такие, что $1 \leqslant N_- < N_+ \leqslant N+1$, и предположим, что $\tau_1 = \ldots$ $\ldots = \tau_{N_-}$, а $\tau_{N_+} = \ldots = \tau_{N+1}$. Предположим далее, что при $m = N_-+1, \ldots$ $\ldots, N+1$ справедливо неравенство

$$(\tau_1 - \tau_m)\mu > 0, \quad m = N_-+1, \ldots, N+1, \tag{2.11}$$

а при $m = 1, \ldots, N_+-1$ справедливо неравенство

$$(\tau_m - \tau_{N+1})\mu > 0, \quad m = 1, \ldots, N_+-1. \tag{2.12}$$

Положим теперь

$$K_- = \sum_{m,n=1}^{N_-} \frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2)\mu^2 + i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]},$$

$$K_+ = \sum_{m,n=N_+}^{N+1} \frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu^2)\mu^2 + i(\sigma_m-\sigma_n)\mu]}, \tag{2.13}$$

$$L_- = -\sum_{m=1}^{N_-}\eta_m, \quad L_+ = -\sum_{m=N_+}^{N+1}\eta_m.$$

В силу (2.11) и (2.12) нетрудно убедиться, что в этой ситуации интересующее нас решение (2.8) системы (I) при $t \to -\infty$ имеет асимптотику

$$u \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-\tau_1 t - q_-)]}, \quad \varphi \sim \frac{A_-}{ch[\mu(x-\tau_1 t - q_-)]}, \tag{2.14}$$

где

$$q_- = -\frac{1}{2\mu}\ln K_-, \quad A_- = \frac{1}{2}L_- K_-^{-1/2}, \tag{2.15}$$

а при $t \to \infty$ это решение обладает асимптотикой

$$u \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-\tau_{N+1}t - q_+)]}, \quad \varphi = \frac{A_+}{ch[\mu(x-\tau_{N+1}t-q_+)]}, \tag{2.16}$$

где

$$q_+ = -\frac{1}{2\mu}\ln K_+, \quad A_+ = \frac{1}{2}L_+ K_+^{-1/2}. \tag{2.17}$$

Таким образом, полученное нами решение системы (I) описывает эволюцию волны (2.14) в волну (2.16). В общей картине этого явления необходимо выделить несколько важных частных случаев. Прежде всего, при $N_- > 1$ и $N_+ < N+1$ решение (2.8) согласно (2.13)-(2.17) описывает эволюцию волны вида (5) в волну этого же вида. Далее, при $N_- = 1$ и $N_+ < N+1$ наше решение описывает эволюцию солитона (2) в волну вида (5), а при $N_- > 1$ и $N_+ = N+1$ это решение описывает эволюцию волны вида (5) в солитон (2). Наконец, при $N_- = 1$ и $N_+ = N+1$ найденное нами решение описывает эволюцию солитона (2) с наибольшим значением фазовой скорости в солитон с наименьшим значением фазовой скорости. Кроме того, заслуживает отдельного упоминания, что при $\varkappa = -1$ в соответствии с (2.5) возможны случаи как с $\tau_1 = 0$, так и с $\tau_{N+1} = 0$. В этой ситуации при $N_- = 1$, $N_+ < N+1$ и $\tau_{N+1} = 0$ интересующее нас решение описывает захват солитона (2) в колебательный режим. Наоборот, если $\tau_1 = 0$, то при $N_- > 1$ и $N_+ = N+1$ рассматриваемое нами решение описывает волну вида (5), которая совершала колебательное движение, а затем произошел срыв и волна уходит на бесконечность в виде солитона (2).

§ 3. Распад и слияние солитонов в системе (I)

Теперь мы в состоянии получить решения системы (I), описывающие распады волн (9) и (10) на солитон (4) и волну (5), а также решения, описывающие слияние солитона (4) и волны (5) в одну волну (9) или (10). С этой целью положим в равенствах (I.18)-(I.23)

$$a_{N+1} = \varepsilon a, \quad \tau_N = \tau_{N+1} = 4\mu_2^2 + \varepsilon^2 c \tag{3.1}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим, что при $m, n = 1, \ldots, N-1$ справедливы равенства

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_n\exp[2\mu_1x-(\tau_m+\tau_n)\mu_1t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}, \qquad (3.2)$$

$$R_{m,N}=\frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_N\exp[2\mu_1x-(\tau_m+4\mu_2^2)\mu_1t]}{[(\tau_m+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_N)\mu_1]}, \qquad (3.3)$$

$$R_{N,n}=\frac{2\varkappa\eta_n\bar{\eta}_N\exp[2\mu_1x-(\tau_n+4\mu_2^2)\mu_1t]}{[(\tau_n+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2-i(\sigma_n-\sigma_N)\mu_1]},$$

где при $m=1,\ldots,N$ имеем

$$\eta_m=a_m\exp(i\sigma_mt). \qquad (3.4)$$

Далее, справедливы равенства

$$R_{N,N}=\frac{\varkappa|a_N|^2\exp[2\mu_1(x-4\mu_2^2t)]}{4(\mu_2^2-\mu_1^2)\mu_1^2}, \qquad (3.5)$$

$$R_{N+1,N+1}=\frac{\varkappa|a|^2}{c\mu_1\mu_2}\exp[2\mu_2(x-4\mu_2^2t)].$$

Наконец, в силу (3.I) получаем $\lambda_{N+1}=0$ и, следовательно, при любых $m,n=1,\ldots,N$ имеем

$$R_{m,N+1}=R_{N+1,n}=0.$$

С учётом этих равенств выражения (I.I6) и (I.I7) принимают вид

$$D=1+\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}+\frac{\mu_1}{\mu_2}R_{N+1,N+1}+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2}R_{N+1,N+1}\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}, \qquad (3.6)$$

$$\Psi=-\left\{1+\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2}R_{N+1,N+1}\right\}\times \exp(-i\mu_1^2y)\sum_{m=1}^{N}\eta_m\exp[\mu_1(x-\tau_mt)]. \qquad (3.7)$$

Положим теперь

$$\Phi=\Psi\exp(i\mu_1^2y). \qquad (3.8)$$

На основе равенств (3.2)-(3.5) находим, что функции D и Φ не зависят от y. Отсюда согласно (I.2) и (I.6) следует, что определенные с помощью (3.6) - (3.8) функции

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D} \qquad (3.9)$$

удовлетворяют системе (I) при $E=\mu_1^2$.

Выясним теперь, каково поведение этого решения. С этой целью предположим, что при $m=1,\ldots,N$ справедливо неравенство

$$(\tau_m-4\mu_1^2)\varkappa>0,\quad \tau_N=4\mu_2^2. \qquad (3.10)$$

Предположим далее, что выполняются условия

$$\mu_1\mu_2>0,\quad \varkappa c>0. \qquad (3.11)$$

На основе этих неравенств в соответствии с (3.2)-(3.6) получаем, что при любых вещественных значениях координат x,t справедливо неравенство $D\geqslant1$. Отсюда следует, что определенное посредством (3.6) -(3.9) решение системы (I) не имеет особенностей при любых вещественных значениях независимых переменных x,t. Предположим, наконец, что при $m=1,\ldots,N-1$ справедливо неравенство

$$(4\mu_2^2-\tau_m)\mu_1>0. \qquad (3.12)$$

Положим теперь $z=x-4\mu_2^2t$. Тогда в силу (3.2), (3.3) и (3.5) выражения для ненулевых элементов $R_{m,n}$ матрицы R примут вид

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_n\exp[\mu_1(8\mu_2^2-\tau_m-\tau_n)t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}\exp(2\mu_1z), \qquad (3.13)$$

$$R_{m,N}=\frac{2\varkappa\bar{\eta}_m\eta_N\exp[\mu_1(4\mu_2^2-\tau_m)t]}{[(\tau_m+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1z), \qquad (3.14)$$

$$R_{N,n}=\frac{2\varkappa\eta_n\bar{\eta}_N\exp[\mu_1(4\mu_2^2-\tau_n)t]}{[(\tau_n+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2-i(\sigma_n-\sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1z),$$

если $m,n = 1,\dots,N-1$, а

$$R_{N,N} = \frac{\varkappa |a_N|^2 \exp(2\mu_1 z)}{4(\mu_2^2-\mu_1^2)\mu_1^2},$$

$$R_{N+1,N+1} = \frac{\varkappa |a|^2}{c\mu_1\mu_2} \exp(2\mu_2 z). \qquad (3.15)$$

На основе этих равенств с учётом (3.6)-(3.8) и (3.12) получаем, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ справедливы асимптотики

$$D \sim 1 + R_{N,N} + \frac{\mu_1}{\mu_2} R_{N+1,N+1} + \frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2} R_{N,N} R_{N+1,N+1}, \qquad (3.16)$$

$$\phi \sim -\left\{1 + \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\mu_2} R_{N+1,N+1}\right\} \eta_N \exp(\mu_1 z).$$

Пусть $\varkappa = 1$. Положим $\mu_1 = \mu, \mu_2 = 2\mu$. Тогда на основе (3.15) и (3.16) получаем, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ выполняются асимптотики

$$D \sim 1 + \alpha_1 \exp(2\mu z) + \alpha_2 \exp(4\mu z) + \alpha_3 \exp(6\mu z),$$
$$\phi \sim -\left[1 - \tfrac{1}{3}\alpha_2 \exp(4\mu z)\right] \eta_N \exp(\mu z), \qquad (3.17)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\varkappa |a_N|^2}{12\mu^4}, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa |a|^2}{4c\mu^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2. \qquad (3.18)$$

Положим теперь

$$c = 108 \frac{\varkappa |a|^2}{|a_N|^4} \mu^6, \qquad (3.19)$$

т.е. выберем c так, чтобы выполнялось условие $3\alpha_2 = \alpha_1^2$. Согласно (3.17) и (3.18) в этом случае при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ имеют место асимптотики

$$D \sim \left[1 + \tfrac{1}{3}\alpha_1 \exp(2\mu z)\right]^3,$$
$$\phi \sim -\left[1 - \tfrac{1}{9}\alpha_1^2 \exp(4\mu z)\right] \eta_N \exp(\mu z).$$

В соответствии с (3.9) отсюда следует, что при $\varkappa = 1$ и $t \to -\infty$ в нашем решении содержится бегущая волна вида

$$u = \frac{6\mu^2}{\mathrm{ch}^2[\mu(x-16\mu^2 t)+\delta_-]},$$
$$\varphi = A \frac{\mathrm{sh}[\mu(x-16\mu^2 t)+\delta_-]}{\mathrm{ch}^2[\mu(x-16\mu^2 t)+\delta_-]} \exp(i\sigma t), \qquad (3.20)$$

где

$$\mu^2 = E, \quad \delta_- = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1}{3}\right), \quad A = -\frac{1}{2}a_N \exp(-\delta_-), \quad \sigma = \sigma_N.$$

На основании (3.18) отсюда вытекает соотношение

$$|A| = 3\mu^2. \qquad (3.21)$$

Рассмотрим теперь случай $\varkappa = -1$. Пусть $\mu_1 = 2\mu$, $\mu_2 = \mu$. С помощью (3.15) и (3.16) получаем, что при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ справедливы асимптотики

$$D \sim 1 + \alpha_1 \exp(2\mu z) + \alpha_2 \exp(4\mu z) + \alpha_3 \exp(6\mu z),$$
$$\phi \sim -\left[1 + \tfrac{1}{3}\alpha_1 \exp(2\mu z)\right] \eta_N \exp(2\mu z), \qquad (3.22)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\varkappa |a|^2}{c\mu^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{\varkappa |a_N|^2}{48\mu^2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2. \qquad (3.23)$$

Положим

$$c = 4\frac{\varkappa |a|^2}{|\mu||a_N|}, \qquad (3.24)$$

т.е. выберем c так, чтобы удовлетворить условию $\alpha_1 = (3\alpha_2)^{1/2}$. В силу (3.22) и (3.23) в этом случае при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ имеют место асимптотики

$$D \sim \left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{3}\right)^{1/2} \exp(2\mu z)\right]^3,$$
$$\phi \sim -\left[1 + \left(\frac{\alpha_2}{3}\right)^{1/2} \exp(2\mu z)\right] \eta_N \exp(2\mu z).$$

Согласно (3.9) отсюда следует, что при $\varkappa=-1$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится бегущая волна вида

$$u=\frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x-4\mu^2t)+\delta_-]},\quad \varphi=\frac{A\exp(i\sigma t)}{ch^2[\mu(x-4\mu^2t)+\delta_-]},\tag{3.25}$$

где

$$4\mu^2=E,\ \delta_-=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_2}{3}\right),\ A=-\frac{1}{4}a_N\exp(-2\delta_-),\ \sigma=\sigma_N.$$

С учётом (3.23) отсюда вытекает справедливость соотношения (3.2I).

С другой стороны, на основе равенств (3.I3) - (3.I5) получаем представление

$$\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n}=K\exp(2\mu_1 z),$$

где величина K зависит только от t, и в соответствии с (3.I2) имеем $K\to\infty$ при $t\to\infty$. Отсюда в силу (3.6)-(3.8) следует, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ выполняются асимптотики

$$DK^{-1}\exp(-2\mu_1 z)\sim 1+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)^2\mu_2}R_{N+1,N+1},$$

$$\Phi K^{-1}\exp(-2\mu_1 z)\to 0.$$

Таким образом, полагая $\varkappa=1,\mu_1=\mu,\mu_2=2\mu$ с помощью (3.I5),(3.I8) и (3.I9) легко находим, что при $t\to\infty$ в рассматриваемом нами решении присутствует бегущая волна вида

$$u=\frac{8\mu^2}{ch^2[2\mu(x-16\mu^2t)+\delta_+]},\quad \varphi=0,\tag{3.26}$$

где

$$\mu^2=E,\quad \delta_+=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1^2}{27}\right).$$

Далее, полагая $\varkappa=-1,\mu_1=2\mu,\mu_2=\mu$, с учётом (3.I5),(3.23) и (3.24) получаем, что при $t\to\infty$ интересующее нас решение содержит бегущую волну вида

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-4\mu^2t)+\delta_+]},\quad \varphi=0,\tag{3.27}$$

где

$$4\mu^2=E,\ \delta_+=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_2}{27}\right).$$

Предположим теперь, что существует целое число N_0, удовлетворяющее условию $0<N_0<N$, такое, что $\tau_1=\ldots=\tau_{N_0}$. Предположим далее, что при $m=N_0+1,\ldots,N+1$ справедливо неравенство

$$(\tau_1-\tau_m)\mu_1<0,\ m=N_0+1,\ldots,N+1.\tag{3.28}$$

Положим $z=x-\tau_1 t$. Тогда в силу (3.2),(3.3) и (3.5) выражения для ненулевых элементов $R_{m,n}$ матрицы R примут вид

$$R_{m,n}=\frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n\exp[\mu_1(2\tau_1-\tau_m-\tau_n)t]}{[(\tau_m+\tau_n-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]}\exp(2\mu_1 z),$$

$$R_{m,N}=\frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_N\exp[\mu_1(2\tau_1-\tau_m-4\mu_2^2)t]}{[(\tau_m+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1 z),$$

$$R_{N,n}=\frac{2\varkappa\eta_n\bar\eta_N\exp[\mu_1(2\tau_1-\tau_n-4\mu_2^2)t]}{[(\tau_n+4\mu_2^2-8\mu_1^2)\mu_1^2-i(\sigma_n-\sigma_N)\mu_1]}\exp(2\mu_1 z),$$

если $m,n=1,\ldots,N-1$, а

$$R_{N,N}=\frac{\varkappa|a_N|^2\exp(2\mu_1 z)}{4(\mu_2^2-\mu_1^2)\mu_1^2}\exp[2\mu_1(\tau_1-4\mu_2^2)t],$$

$$R_{N+1,N+1}=\frac{\varkappa|a|^2}{c\mu_1\mu_2}\exp(2\mu_2 z)\exp[2\mu_2(\tau_1-4\mu_2^2)t].$$

На основе этих равенств согласно (3.6)-(3.8), (3.II) и (3.28) получаем, что при любом фиксированном z и $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$D\sim 1+\sum_{m,n=1}^{N}R_{m,n},\quad \Phi\sim-\sum_{m=1}^{N_0}\eta_m\exp(\mu_1 z),$$

т.е.

$$D\sim 1+K_0\exp(2\mu_1 z),\quad \Phi\sim L_0\exp(\mu_1 z),$$

где в силу равенств

$$K_0=\sum_{m,n=1}^{N_0}\frac{2\varkappa\bar\eta_m\eta_n}{[2(\tau_1-4\mu_1^2)\mu_1^2+i(\sigma_m-\sigma_n)\mu_1]},\quad L_0=-\sum_{m=1}^{N_0}\eta_m\tag{3.29}$$

функции K_0 и L_0 зависят только от времени t. Полагая $\varkappa=1$, $\mu_1=\mu$, с помощью (3.9) находим, что при $t\to\infty$ в рассматриваемом нами решении содержится вторая бегущая волна вида

$$u=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-\tau_1 t-q_0)]},\quad \varphi=\frac{A_0}{ch[\mu(x-\tau_1 t-q_0)]}, \qquad (3.30)$$

где

$$\mu^2=E,\quad q_0=-\frac{1}{2\mu}\ln K_0,\quad A_0=\frac{1}{2}L_0K_0^{-1/2}. \qquad (3.31)$$

С учётом (3.29) и (3.31) получаем соотношение

$$\frac{dq_0}{dt}+\tau_1=4\left(\mu^2+\varkappa\mu^{-2}|A_0|^2\right). \qquad (3.32)$$

Далее, полагая $\varkappa=-1$, $\mu_1=2\mu$, в соответствии с (3.9) находим, что при $t\to\infty$ в нашем решении присутствует вторая бегущая волна вида

$$u=\frac{8\mu^2}{ch^2[2\mu(x-\tau_1 t-q_0)]},\quad \varphi=\frac{A_0}{ch[2\mu(x-\tau_1 t-q_0)]}, \qquad (3.33)$$

где

$$4\mu^2=E,\quad q_0=-\frac{1}{4\mu^2}\ln K_0,\quad A_0=\frac{1}{2}L_0K_0^{-1/2}. \qquad (3.34)$$

В силу (3.29) и (3.34) справедливо соотношение

$$\frac{dq_0}{dt}+\tau_1=16\mu^2+\varkappa\mu^{-2}|A_0|^2. \qquad (3.35)$$

Элементарный анализ показывает, что при сделанных выше предположениях полученное нами решение системы (I) не содержит других волн ни при $t\to-\infty$, ни при $t\to\infty$. Таким образом, при $\varkappa=1$ наше решение описывает распад волны (3.20) на солитон (3.26) и волну (3.30). Согласно (3.10) имеем $\tau_N=16\mu^2$, а в силу (3.12) выполняется неравенство $(16\mu^2-\tau_1)\mu>0$. Наконец, с помощью (3.32) получаем $\tau_1>4\mu^2$. Из этих неравенств следует, что при $\mu>0$ должно выполняться условие $4\mu^2<\tau_1<16\mu^2$, а при $\mu<0$ выполняется условие $\tau_1>16\mu^2$. Если теперь в этом решении заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученное новое решение системы (I), очевидно, описывает слияние солитона (3.26) и волны (3.30) в одну волну (3.20). Аналогичным образом

при $\varkappa=-1$ найденное нами решение описывает распад волны (3.25) на солитон (3.27) и волну (3.33). В соответствии с (3.10) в этом случае имеем $\tau_N=4\mu^2$, а в силу (3.12) должно выполняться неравенство $(4\mu^2-\tau_1)\mu>0$. Наконец, на основе (3.35) получаем $\tau_1<16\mu^2$. Отсюда следует, что при $\mu>0$ выполняется условие $\tau_1<4\mu^2$, а при $\mu<0$ должно выполняться условие $4\mu^2<\tau_1<16\mu^2$. Если теперь в этом решении заменить t на $-t$, а x заменить на $-x$, то полученное новое решение системы (I) описывает слияние солитона (3.27) и волны (3.33) в одну волну (3.25). Нелишне отметить, что при $\varkappa=-1$ возможно равенство $\tau_1=0$. Следовательно, волна (3.33) в этом случае совершает колебательное движение в ограниченной части пространства.

В заключение необходимо отметить, что на пространстве быстро убывающих по x решений система (I) обладает тремя первыми интегралами вида

$$I_m=\int_{-\infty}^{\infty}T_m\,dx,\quad m=1,2,3, \qquad (*)$$

где

$$T_1=u,\quad T_2=u^2,\quad T_3=u^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+8\varkappa\left(u|\varphi|^2-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2-E|\varphi|^2\right).$$

Нетрудно убедиться, что на решении (3.20) и на решении (3.25) эти интегралы принимают значения

$$I_1=12|\mu|,\quad I_2=48|\mu|^3,\quad I_3=\frac{1056}{5}|\mu|^5.$$

Далее, на решении (3.26) и на решении (3.33) интегралы $(*)$ принимают значения

$$I_1'=8|\mu|,\quad I_2'=\frac{128}{3}|\mu|^3,\quad I_3'=\frac{1024}{5}|\mu|^5,$$

а на решении (3.27) и на решении (3.30) имеем

$$I_1''=4|\mu|,\quad I_2''=\frac{16}{3}|\mu|^3,\quad I_3''=\frac{32}{5}|\mu|^5.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$I_m=I_m'+I_m'',\quad m=1,2,3,$$

показывающее, что при описанных выше распадах волн происходит полная передача определяемой интегралами $(*)$ сущности от распадающейся волны получившимся в результате распада волнам.

Наконец, полагая $H=-I_3$, мы можем записать систему (I) в следующем гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}, \quad \frac{\delta H}{\delta \varphi}=\frac{\delta H}{\delta \bar{\varphi}}=0.$$

Литература

1. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. - Physica D, 1986, v. 18D, No 1, p. 455-463.
2. Gardner C.S. et al.- Phys. Rev. Lett., 1967, v.19, No 19, p. 1095-1097.
3. Mel'nikov V.K.- Lett. Math. Phys., 1983, v. 7, No 2, p. 129-136.
4. Mel'nikov V.K.- Commun. Math. Phys., 1987, v. 112, No 4, p. 639-652.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 февраля 1988 года.

Мельников В.К. P2-88-114
Взаимодействие солитонов в системе, описываемой уравнением Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником

Рассмотрена система, описываемая уравнением Кортевега - де Вриса с источником, удовлетворяющим стационарному уравнению Шредингера. В этой системе найдены солитонные решения, описывающие волны, которые приходят из бесконечности, а затем захватываются в условно-периодические колебательные режимы. Найдены также решения, описывающие процессы распада и слияния волн. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-88-114
Interaction of Solitons in a System Described by the Korteweg - de Vries Equation with a Self-Consistent Source

The system described by the Korteweg - de Vries equation with the source satisfying the stationary Schroedinger equation is considered. Soliton solutions describing waves coming from infinity and then captured in the conditionally periodic oscillatory regime are found in this system. Solutions are also found that describe the decay and fusion of waves. The obtained results are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, solid state physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988