объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-104

С.В.Михайлов*, А.В.Радюшкин

НЕЛОКАЛЬНОСТЬ КВАРКОВЫХ КОНДЕНСАТОВ И ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ПИОНА В КХД

Модельное рассмотрение

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

1988

Введение

Эта работа является прямым продолжением нашей статьи [I], в которой был оформулирован общий метод построения КХД правил сумм (ПС) с нелокальными конденсатами и продемонстрирован пример таких ПС для волновой функции (ВФ) пиона при некоторых модельных предположениях о виде нелокальных распределений. В настоящей работе в разделе [2] будут вычислены кварковые вакуумные средние (ВС) размерности 8, необходимые для конструирования на их основе более реалистических анзацев нелокальных ВС. А в разделе 3 будут построены и исследованы эти анзацы.

Таким образом, эти разделы являются обоснованием и необходимым техническим расширением раздела 6 в [I]. В разделе 4 получены и обработаны правила сумм ПС для ВФ пиона с явным учётом A_1 -резонанса и предлагается новый модельный вид волновой функции. Частные ссылки на формулы работы [I] помечаются в тексте цифрой $1-(1....)$.

2. Вычисление вкладов вакуумных средних размерностей 6 и 8

а) ВС размерности 6

Модели функции $f_{0,1,2,3}$ можно строить, используя кварковые ВС размерности 6 и 8 (см. раздел 6 в [I]). Рассмотрим сначала кварковые ВС размерности 6, следуя методу, предложенному в работе [2].

При разложении НВС $\langle\bar q(0)\hat{n}\, q(z)\rangle$ (см. (I.37))в ряд Тейлора возникают ВС определенной лоренцевой и спинорной структуры, например

$$\langle\bar q_k(\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\rho)_S\, q_m\rangle = i(g_{\alpha\beta}\gamma_\rho + g_{\alpha\rho}\gamma_\beta + g_{\rho\beta}\gamma_\alpha)\frac{a_0}{4}. \qquad (I)$$

(Здесь и ниже $\nabla_\alpha = \partial_\alpha + ig\hat{A}_\alpha$, круглые скобки $(\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\rho)_S$ с индексом S означают симметричную по индексам часть тензора $\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\rho$, что даёт для первого неисчезающего члена разложения (в киральном пределе)

$$\langle\bar q\hat{n}\frac{(z\nabla)^3}{3!}q\rangle = i(nz)\frac{z^2}{4}2a_0\,, \quad a_0 = \alpha_s\frac{\pi\langle\bar q q\rangle^2}{81}. \qquad (Ia)$$

Аналогично, при разложении НВС $M_\mu(\tilde{M}_\mu) = \langle\bar q(0)\hat{n}(\gamma_5)\hat{A}_\mu(y)q(z)\rangle$ (калибровка Фока - Швингера [3], см. формулу (I.3)) в низшей размерности появляются ВС следующих типов:

$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{3}\langle\bar q\hat{n}g\hat{G}_{\mu\nu;\rho}q\rangle = (y_\mu(ny) - n_\mu y^2)\frac{a_2}{3}\,, \qquad (2)$$
$$a_2 = \alpha_s\pi\langle\bar q q\rangle^2\frac{4}{27}$$

и

$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{2}\langle\bar q\hat{n}g\hat{G}_{\mu\nu}\nabla_\rho q\rangle = (z_\mu(ny) - n_\mu(yz))\frac{a_1}{2} \qquad (3а)$$

$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{2}\langle\bar q\hat{n}\gamma_5 g\hat{G}_{\mu\nu}\nabla_\rho q\rangle = -i\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,y^\nu z^\rho n^\lambda\frac{a_1}{2}\,, \qquad (3б)$$
$$a_1 = -\alpha_s\pi\langle\bar q q\rangle^2\frac{2}{27}.$$

ВС a_0, a_1, a_2 были вычислены (см., например, [2], а также Приложение) и определяют, как это следует из (I.37,40), нормировку функций f_0, f_1 и f_3, f_2. ВС размерности 8 задают в нашем подходе ширину функций f_i

б) ВС размерности 8, трилокальный конденсат

Разложение кварковых и глюонных полей в $M_\mu(\tilde{M}_\mu)$ дает четыре матричных элемента

$$-\frac{(y^\nu y^\alpha y^\beta y^\rho)}{5\cdot 3!}\langle\bar q\hat{n}(\gamma_5)g\hat{G}_{\mu\nu;\alpha\beta\rho}q\rangle;\ -\frac{(y^\nu y^\rho y^\beta)}{4\cdot 2!}\langle\bar q\hat{n}(\gamma_5)g\hat{G}_{\mu\nu;\rho\beta}(z\nabla)q\rangle \qquad (4)$$
$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{3}\langle\bar q\hat{n}(\gamma_5)g\hat{G}_{\mu\nu;\rho}\frac{(z\nabla)^2}{2}q\rangle;\ -\frac{y^\nu}{2}\langle\bar q\hat{n}(\gamma_5)g\hat{G}_{\mu\nu}\frac{(z\nabla)^3}{3!}q\rangle.$$

Выделяя в элементах (4) спинорную и лоренцеву структуру явно, получим представление для них в виде (слева для определенности записан второй элемент, у первого элемента в (4) отсутствует псевдотензорная часть)

$$\hat{M}_1 = \langle\bar q_e g\hat{G}_{\mu\nu;(\rho\beta)_S}\nabla_\alpha q_m\rangle = (P_{(\alpha\beta\rho\nu)}\gamma_\mu - P_{(\alpha\beta\rho\mu)}\gamma_\nu)_{mk}\frac{b_1}{4} - \qquad (5)$$
$$-iE_{\mu\nu\alpha\lambda(\rho\beta)}(\gamma^\lambda\gamma^5)_{mk}\frac{b_1}{4};$$

здесь $P_{(\alpha\beta\rho\nu)} = g_{\alpha\rho} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\beta} g_{\rho\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho}$ и

$$E_{\mu\nu\alpha\lambda(\rho\beta)} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\, g_{\rho\beta} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\rho\nu\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\nu\alpha\lambda} g_{\rho\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right). \qquad (5а)$$

Доказательство (5) вынесено в Приложение. Подставив представления типа (5) в (4), найдем явные выражения для матричных элементов через ВС b_i

$$-\frac{(y^\nu y^\alpha y^\beta y^\rho)}{5\cdot 3!}\langle \bar q \hat n g \hat G_{\mu\nu;\alpha\beta\rho} q\rangle = (y_\mu (ny) - n_\mu y^2) y^2 \frac{b_0}{10}, \qquad (6)$$

$$-\frac{(y^\nu y^\rho y^\beta)}{4\cdot 2!}\langle \bar q \hat n g \hat G_{\mu\nu;\beta\rho}(z\nabla) q\rangle = \Big[(y_\mu(ny) - n_\mu y^2)\, 2(zy) + (z_\mu (ny) - n_\mu (zy)) y^2\Big] \frac{b_1}{16}, \qquad (7а)$$

$$-\frac{(y^\nu y^\rho y^\beta)}{4\cdot 2!}\langle \bar q \hat n \gamma_5 g \hat G_{\mu\nu;\beta\rho}(z\nabla) q\rangle = -i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda} y^\nu z^\alpha n^\lambda \cdot y^2 \frac{b_1}{4}, \qquad (7б)$$

$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{3}\langle \bar q \hat n g \hat G_{\mu\nu;\rho} \frac{(z\nabla)^2}{2} q\rangle = \Big[(y_\mu(ny) - n_\mu y^2)\cdot z^2 + (z_\mu(ny) - n_\mu(zy))\cdot 2(zy)\Big] \frac{b_2}{6}, \qquad (8а)$$

$$-\frac{(y^\nu y^\rho)}{3}\langle \bar q \hat n \gamma_5 g \hat G_{\mu\nu;\rho} \frac{(z\nabla)^2}{2} q\rangle = -i\varepsilon_{\mu\nu\beta\lambda} y^\nu z^\beta n^\lambda (zy) \frac{b_2}{4}, \qquad (8б)$$

$$-\frac{y^\nu}{2}\langle \bar q \hat n g \hat G_{\mu\nu} \frac{(z\nabla)^3}{3!} q\rangle = (z_\mu(ny) - n_\mu(zy)) z^2 \frac{b_3}{4}, \qquad (9а)$$

$$-\frac{y^\nu}{2}\langle \bar q \hat n \gamma_5 g \hat G_{\mu\nu} \frac{(z\nabla)^3}{3!} q\rangle = -i\varepsilon_{\mu\nu\beta\lambda} y^\nu z^\beta n^\lambda \cdot z^2 \frac{b_3}{12}. \qquad (9б)$$

Напомним, что корреляционные функции $\tilde f_{1,2,3}$, параметризующие трилокальный матричный элемент $M_\mu(\tilde M_\mu)$, определены как коэффициенты при векторных структурах $(z_\mu(ny) - n_\mu(zy))$, $(y_\mu(ny) - n_\mu y^2)$ и $i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} y^\nu z^\sigma n^\lambda$ соответственно (см. определение (I.40)). Воспользовавшись формулами (2), (3а,б) и (6–9), нетрудно получить для $\tilde f_i$ выражение (см. (I.40))

$$\tilde f_i = A_i + B_{(1)i}\frac{z^2}{4} + B_{(2)i}\frac{y^2}{4} + B_{(3)i}\frac{(y-z)^2}{4},$$

где значения коэффициентов A_i и $B_{(j)i}$ представлены в таблице I.

Таблица I

i	A_i	$B_{(1)i}$	$B_{(2)i}$	$B_{(3)i}$
1	$\frac{a_1}{2}$	$b_3 + \frac{2}{3} b_2$	$\frac{b_1}{2} + \frac{2}{3} b_2$	$-\frac{2}{3} b_2$
2	$\frac{a_2}{3}$	$\frac{b_1}{2} + \frac{2}{3} b_2$	$\frac{2}{5} b_0 + \frac{b_1}{2}$	$-\frac{b_1}{2}$
3	$\frac{a_1}{2}$	$\frac{b_3}{3} + \frac{b_2}{2}$	$b_1 + \frac{b_2}{2}$	$-\frac{b_2}{2}$

Перейдем теперь к вычислению элементов $b_0 - b_3$. Для определения b_1 рассмотрим свертку $Sp(\gamma_\sigma \hat M_1)$, использовав представление (5)

$$Sp(\gamma_\sigma \hat M_1) = \langle \bar q \gamma_\sigma g \hat G_{\mu\nu;(\rho\beta)_S} \nabla_\alpha q\rangle = \Big[P_{(\nu\rho\beta\alpha)} g_{\sigma\mu} - P_{(\mu\rho\beta\alpha)} g_{\sigma\mu}\Big] b_1. \qquad (10)$$

Введем обозначение $P_{(\nu\rho\beta\alpha)} g_{\sigma\mu} - P_{(\mu\rho\beta\alpha)} g_{\sigma\nu} \equiv O_{\{\mu\nu\}\rho\beta\alpha\sigma}$, тогда $O^2 \equiv O^2_{\{\mu\nu\}\rho\beta\alpha\sigma} = 432$. Спроектировав равенство (10) на тензор O, придем к выражению для b_1 в виде

$$b_1 = \frac{2}{O^2}\left\{\langle \bar q \gamma^\mu \hat G_{\mu\nu;\rho\rho} q^{;\nu}\rangle + \langle \bar q \gamma^\mu \hat G_{\mu\nu;\rho\nu} q^{;\rho}\rangle + \langle \bar q \gamma^\mu \hat G_{\mu\nu;\nu\alpha} q^{;\alpha}\rangle\right\}. \qquad (11)$$

Стратегия дальнейших преобразований состоит в выделении в правой

части (II) всех операторов, приводящих к ВС $\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle\langle\bar{q}q\rangle \sim \lambda_q^2$.
При этом будем использовать уравнения движения (УД)

$$i\hat{\nabla} q \equiv i\gamma_\mu q^{;\mu} = 0 \quad (12а), \quad \hat{G}_{\mu\nu;\mu} = g\hat{j}_\nu \equiv g(\bar{q}t_a\gamma_\nu q)t^a , \quad (12б)$$

тождество Бианки для $\hat{G}_{\mu\nu;\rho}$.

$$\hat{G}_{\mu\nu;\rho} + \hat{G}_{\rho\mu;\nu} + \hat{G}_{\nu\rho;\mu} = 0, \qquad (13)$$

трансляционную инвариантность вакуумных средних, гипотезу вакуумной доминантности (ГВД). Все прочие, оставшиеся после такого выделения ВС, будем называть неприводимыми.

Применив тождества /3/,

$$\hat{G}_{\mu\nu;\rho\rho} = g\left(2i[\hat{G}_{\mu\rho}, \hat{G}_{\nu\rho}]_- + \hat{j}_{\nu;\mu} - \hat{j}_{\mu;\nu}\right), \qquad (14)$$

$$\hat{G}_{\mu\nu;\alpha\beta} - \hat{G}_{\mu\nu;\beta\alpha} = ig[\hat{G}_{\mu\nu}, \hat{G}_{\alpha\beta}]_- \qquad (15)$$

и УД (12) в правой части (II), получим

$$b_1 = \frac{2}{Q^2}\Big\{-3g^2\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\mu;\rho}q^{;\rho}\rangle + 3ig^2\langle\bar{q}\gamma^\mu[\hat{G}_{\mu\alpha}, \hat{G}_{\nu\alpha}]_- q^{;\nu}\rangle + \qquad (16)$$
$$+ 2g^2\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\nu;\mu}q^{;\nu}\rangle\Big\} .$$

Из трансляционной инвариантности ВС и ГВД следует представление для первого слагаемого в (16).

$$\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\mu;\rho}q^{;\rho}\rangle = -\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_\mu\nabla^2 q\rangle \approx \frac{4}{9}\langle\bar{q}q\rangle\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle . \qquad (17)$$

Для последнего слагаемого в (16) при помощи УД и коммутационных соотношений

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]_- = ig\hat{G}_{\rho\sigma} \quad , \quad [\nabla_\sigma, \hat{G}_{\rho\sigma}]_- = \hat{G}_{\rho\sigma;\sigma} = -g\hat{j}_\rho \qquad (18)$$

получим следующую цепочку равенств

$$\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\nu;\mu}q^{;\nu}\rangle \equiv \langle\bar{q}\gamma^\mu[\nabla_\mu, \hat{j}_\nu]_-\nabla^\nu q\rangle = -\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu q\rangle =$$
$$= -\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\Big[\frac{i}{2}g\hat{G}_{\mu\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4}\nabla^2 + \{(\nabla_\mu\nabla_\nu)_S\}\Big]q\rangle . \qquad (19)$$

Здесь двойные скобки $\{(\ldots)_S\}$ означают симметричную бесследовую часть тензора $\nabla_\mu\nabla_\nu$. Член $\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\{(\nabla_\mu\nabla_\nu)_S\}q\rangle$ явно не содержит эффектов, связанных со средней виртуальностью вакуумных кварков и является в этом смысле неприводимым элементом "базиса". Применив ГВД для первых двух слагаемых в (19),

$$g\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\hat{G}_{\mu\nu}q\rangle \approx \frac{ig}{8}\langle\bar{q}(\sigma\hat{G})q\rangle\langle\bar{q}q\rangle = \frac{i}{4}\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle\langle\bar{q}q\rangle , \qquad (20)$$

окончательно получим для $\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\nu;\mu}q^{;\nu}\rangle$

$$\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}_{\nu;\mu}q^{;\nu}\rangle \approx \frac{17}{72}\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle\langle\bar{q}q\rangle - \langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\{(\nabla_\mu\nabla_\nu)_S\}q\rangle . \qquad (21)$$

Подставив (17) и (21) в (16), придем к выражению для b_1

$$b_1 \simeq \frac{2g^2}{Q^2}\Big\{-\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle\langle\bar{q}q\rangle\frac{31}{36} - 2\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{j}^\nu\{(\nabla_\mu\nabla_\nu)_S\}q\rangle +$$
$$+ 3i\langle\bar{q}\gamma^\mu[\hat{G}_{\mu\alpha}, \hat{G}_{\nu\alpha}]_- q^{;\nu}\rangle . \qquad (22)$$

Аналогичные действия приводят к выражению для b_2 (подобие формулы (II) для b_1)

$$b_2 = \frac{2g^2}{Q^2}\Big\{\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{G}_{\mu\nu;\nu}\nabla^2 q\rangle + \langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{G}_{\mu\nu;\beta}\nabla^\nu\nabla^\beta q\rangle + \langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{G}_{\mu\nu;\beta}\nabla^\beta\nabla^\nu q\rangle\Big\} . \qquad (23)$$

Применив УД (12б), а затем приближение (17) (ГВД), немедленно получим

$$b_2 = \frac{2g^2}{Q^2}\Big\{\frac{2}{3}\langle\bar{q}\nabla^2 q\rangle\langle\bar{q}q\rangle + 2\langle\bar{q}\gamma^\mu\hat{G}_{\mu\nu;\beta}\{(\nabla^\nu\nabla^\beta)_S\}q\rangle . \qquad (24)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках в (24) является новым неприводимым элементом. Мы подробно рассмотрели приёмы вычислений и допускаемые приближения при определении ВС b_1 , b_2 . Принципиально таким же, хотя местами и более длинным путем $(b_3)^2$, приводятся вычисления ВС b_0 и b_3 . Результаты наших расчетов представлены в таблице 2.

в) ВС размерности 8, билокальный конденсат

Вторым неисчезающим членом в разложении НВС $\langle\bar q(0)\hat n\, q(z)\rangle$ (см. (I.37)) является элемент с пятью производными $\langle\bar q(0)\hat n\,\frac{(z\nabla)^5}{5!}q(0)\rangle$. Рассмотрим симметричный по индексам матричный элемент

$$\langle\bar q\gamma_\mu(\nabla_{\mu_1}\dots\nabla_{\mu_5})q\rangle = P(\mu_1,\dots\mu_5)\, i\, B_0\,, \tag{25}$$

где $P(\mu_1,\dots\mu_5)=g_{\mu\mu_1}\cdot g_{\mu_2\mu_3}\cdot g_{\mu_4\mu_5}$ + (перестановки индексов, всего I5 членов) и ρ^2 = I5 · I92. Из (25) следует представление для B_0 :

$$B_0=-\frac{i}{\rho^2}\langle\bar q\,\left[\hat\nabla\,\nabla^2\,\nabla^2+\nabla_\rho\,\hat\nabla\,\nabla^\rho\,\nabla_\alpha\,\nabla^\alpha+\text{(перестановки индексов)}\right]q\rangle\,, \tag{26}$$

$$\langle\bar q\,\hat n\,\frac{(z\nabla)^5}{5!}q\rangle=(nz)\left(\frac{z^2}{4}\right)^2 2i\,B_0\,. \tag{27}$$

Вычисление B_0 по формуле (26) не содержит принципиально новых моментов, хотя и весьма громоздко. Поэтому в табл. 2 мы приводим только результат вычислений в виде разложения по "базису" неприводимых ВС.

3. Построение реалистических анзацев

Результаты предыдущего раздела показывают, что в размерности 8 существует значительно большее разнообразие операторных структур, чем в размерности 5 (см. /I/ раздел 6, (I.35)), где возникает лишь член $\frac{1}{2}\langle\bar q\,\nabla^2 q\rangle$. Так, при приведении исходных элементов b_j появляется ещё 5 различных "неприводимых" ВС $\langle O_i\rangle$, не сводящихся к $\langle\bar q\nabla^2 q\rangle\langle\bar q q\rangle\sim\lambda_q^2$ и не связанных непосредственно со средней виртуальностью вакуумных кварков (см. табл. 2). Попытаемся все же оценить ширины $1/c_i$ функций f_i , только исходя из величины вклада в c_i вакуумных средних $\langle\bar q\nabla^2 q\rangle\langle\bar q q\rangle$, характеризующих среднюю виртуальность. Записав выражения для f_i в форме (см. (I.40))

Таблица 2. Кварковые ВС размерности

Общий фактор	ВС / коэф.	$g^2\langle\bar q\nabla^2 q\rangle\langle\bar q q\rangle$	$ig^2\langle\bar q\gamma^\mu\hat\gamma[\hat G_{\mu\rho},G_{\nu\rho}]q^{;\nu}\rangle$	$g^2\langle\bar q\gamma^\mu\gamma^\nu\{(\nabla_\nu\nabla_{\mu_5})\}q\rangle$	$g\langle\bar q\gamma^\mu\hat G_{\mu\nu;\rho}\{(\nabla^\nu\nabla^\rho)_S\}q\rangle$	$ig^2\langle\bar q\gamma^\mu\{\hat G_{\nu\rho}\overleftrightarrow{D}_\mu\hat G_{\nu\rho}\}q\rangle$	$ig^2\langle\bar q\gamma^\mu\{\hat G_{\mu\rho},\hat G_{\sigma\rho}\}q^{;\sigma}\rangle$
	b_0	I4/3	0	0	0	3	0
I/2I6	b_1	-3I/36	3	-2	0	0	0
	b_2	2/3	0	0	2	0	0
	b_3	-39/48	-3	3/2	-3	-3/2	0
I/I5 I92	B_0	223/72	-I5	-5	5	-5	I

$$\tilde{f}_i = A_i \left(1 + C_{(1)i} \frac{z^2}{4} + C_{(2)i} \frac{y^2}{4} + C_{(3)i} \frac{(y-z)^2}{4} \right), \quad (28)$$

где

$$C_{(j)i} = B_{(j)i} / A_i$$

с явно выделенными ширинами, и, использовав таблицы I и 2, получим следующие оценки для $C_{(j)i}$ (см. табл. 3).

Таблица 3

i	Общий фактор	A_i	Общий фактор	$C_{(1)i}$	$C_{(2)i}$	$C_{(3)i}$
I	$\alpha_s \pi \langle \bar{q} q \rangle^2$	-I/27	λ_q^2	53/288	-I/I44	2/9
2		4/8I		I/I92	5I7/960	3I/I92
3		I/27		-I/32	I9/72	I/6

В случае функции $\tilde{f}_0$ имеем

$$\tilde{f}_0 = 2A_0 \left(1 + \frac{z^2}{4} C_0 + \ldots \right) \frac{z^2}{4}, \quad (29)$$

$C_0 = B_0/A_0 = 0.35\lambda_q^2$ и $A_0 = \alpha_s \pi \langle \bar{q} q \rangle^2 / 81$. Отметим, что вычисленное здесь C_0 не сильно отличается от принятого в работе /I/ значения $C_0 = C_4 = 0.5\lambda_q^2$.

Перейдем к построению анзацев для функций $f_1 - f_3$, основанных на величине $\langle \bar{q} \nabla^2 q \rangle \langle \bar{q} q \rangle$ - вкладов. Для прояснения свойств трилокальных распределений

$$\tilde{f}_i = A_i \int_0^\infty \exp\left\{ \frac{z^2}{4}\alpha_1 + \frac{y^2}{4}\alpha_2 + \frac{(y-z)^2}{4}\alpha_3 \right\} f_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$$

рассмотрим прежде предельные случаи, когда они сводятся к известным билокальным. При этом наряду с $\alpha_1 - \alpha_3$ параметризацией удобно применять и "естественные" α - параметры линий ξ, η, γ (см. рис. I).

$$1/\gamma = \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1}\,; \quad 1/\eta = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3}\,; \quad 1/\xi = \alpha_1 + \alpha_3 + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}\,. \quad (30)$$

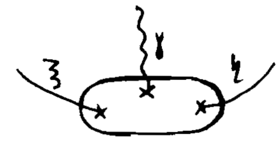

Рис. I

Разрыву глюонной линии γ ($\gamma = \infty$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) соответствует зависимость $\tilde{f}$ лишь от z^2. Этот предельный случай уже был рассмотрен в разделе 6 в /I/. Ему соответствует анзац

$$f_i \to f_i^{(1)} = \delta(\alpha_1 - \delta_i)\, \delta(\alpha_2)\, \delta(\alpha_3)\,,$$

что приводит к дельтаобразным вкладам в ПС

$$\Delta\varphi_1(x) = \frac{3N_q}{M^6} \bar{\Delta}_1\, \delta'(\bar{\Delta}_1 - x) + x \to \bar{x}\,;$$

$$\Delta\varphi_2(x) = -\frac{2N_q}{M^6} x\, \delta'(\bar{\Delta}_2 - x) + x \to \bar{x}\,; \quad \Delta\varphi_3(x) = \frac{3N_q}{M^6} \delta(\bar{\Delta}_3 - x) + x \to \bar{x}\,. \quad (31)$$

Здесь $\bar{\Delta}_i = 1 - \Delta_i$, $\Delta_i = \delta_i / M^2$ и $N_q = \alpha_s \pi \frac{8}{81}$.

Разрыв кварковой линии ξ ($\xi = \infty$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$) оставляет зависимость у $\tilde{f}_i$ лишь переменной y^2. Следовательно, применим анзац

$$f_i \to f_i^{(2)} = \delta(\alpha_1)\, \delta(\alpha_2 - \delta_i)\, \delta(\alpha_3)\,, \quad (32)$$

где одно из кварковых полей взято в локальном пределе, см. рис. 2.

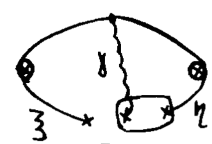

Рис. 2

Интегрирование формулы (32) в общих формулах раздела 5 в /I/ приводит к менее сингулярному результату, чем в предыдущем случае: дельтаобразное поведение заменяется на ступеньку с шириной, пропорциональной виртуальности δ_i вакуумных кварков и глюонов

$$\Delta\varphi_1(x) = 3N_q\left\{\frac{2x\,\theta(\Delta_1>\bar x)}{\Delta_1} + x^2\left[\frac{\theta(\Delta_1>\bar x)}{\Delta_1}\right]'_x\right\} + x\to\bar x, \qquad (33а)$$

$$\Delta\varphi_2(x) = -2N_q x\left\{2\bar x\,\frac{\theta(\Delta_2>\bar x)}{(\Delta_2)^2}\right\}'_x + x\to\bar x, \qquad (33б)$$

$$\Delta\varphi_3(x) = 3N_q\left\{2x\,\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3} - x\bar x\left[\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3}\right]'_x\right\} + x\to\bar x. \qquad (33в)$$

Отметим, что выражение $\frac{\theta(\Delta>\bar x)}{\Delta}$ при малых Δ имитирует $\delta(\bar x)$, так как $\lim\limits_{\Delta\downarrow 0}\frac{\theta(\Delta>\bar x)}{\Delta} = \delta(\bar x)$, аналогично $2\bar x\,\frac{\theta(\Delta>\bar x)}{\Delta^2} = \delta(\bar x)$. Так восстанавливается предельный случай в выражениях (33а,б,в).

Наконец, разрыв линии $(\eta=\infty,\ \alpha_1=\alpha_2=0)$ ведет к учёту нелокальности только по $(y-z)^2$ и анзацу

$$f_i \to f_i^{(3)} = \delta(\alpha_1)\,\delta(\alpha_2)\,\delta(\alpha_3-\delta_i). \qquad (34)$$

Интегрирование последнего выражения в общих формулах работы /I/ дает тот же по форме результат, что и в предельном случае, так как эффекты нелокальности интегрируются здесь в нормировку. Это можно усмотреть прямо из графика рис. 3, соответствующего анзацу (34). Конечно,

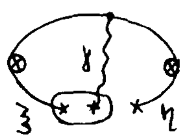

Рис. 3

анзацы, явно учитывающие нелокальность по всем трем аргументам, и ведут к наиболее сглаженным выражениям для $\Delta\varphi_i$, а это должно обеспечить и более быстрое уменьшение моментов $\langle\xi^N\rangle \sim N$, чем в предельных случаях. Такой полный анзац можно интегрировать только численно. Здесь же учтем, что ширины функций f_i по различным аргумента существенно различны (см. коэф. C_i). Поэтому для оценки

трилокальных вкладов в аналитической форме будем использовать билокальные распределения по доминирующему C. Тогда $\Delta\varphi_1$ разумно оценивать с помощью (31), а $\Delta\varphi_2$ и $\Delta\varphi_3$ из (33). В результате получим

$$\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2+\Delta\varphi_3 = \frac{N_q}{M^6}\left\{3\bar\Delta_1\,\delta'(\bar\Delta_1-x) - 2x\left[2\bar x\,\frac{\theta(\Delta_2>\bar x)}{(\Delta_2)^2}\right]'_x + 6x\,\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3} - 3x\bar x\left[\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3}\right]'_x + x\to\bar x\right\}, \qquad (35)$$

$\Delta_1 = C_{(1)1}/M^2$; $\Delta_2 = C_{(2)2}/M^2$; $\Delta_3 = C_{(2)3}/M^2$.

4. Волновая функция пиона

Основываясь на результатах предыдущего раздела: формула (35), а также разделов 6 и 7 в /I/, получим правую часть ПС в виде (см. общее выражение (I.50))

$$\frac{3}{2}\frac{M^2}{\pi^2}x\bar x\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}\frac{C_F}{4}\left[5-\frac{\pi^2}{3}+\ln^2(x/\bar x)\right]\right) +$$
$$\frac{N_q}{M^4}\left\{\frac{18\,\theta(\Delta_4>x)}{\bar\Delta_4\,(\Delta_4)^2}\,\bar x\left(x+(\Delta_4-x)\ln(\bar x)\right) + x\,\delta'(\bar\Delta_0-x) + 3\bar\Delta_1\,\delta'(\bar\Delta_1-x) - \right. \qquad (36)$$
$$\left. - 2x\left[\frac{2\bar x\,\theta(\Delta_2>\bar x)}{(\Delta_2)^2}\right]'_x + 6x\,\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3} - 3x\bar x\left[\frac{\theta(\Delta_3>\bar x)}{\Delta_3}\right]'_x + x\to\bar x\right\}.$$

Учтем вклад в спектральную плотность $\rho(s)$ и от A_1-резонанса, аппроксимировав его дельта-функцией, т.е.

$$\rho(s) = \rho_\pi(s) + \rho_{A_1}(s) + \rho_{cont}(s),$$
$$\rho_{A_1}(s) = f_{A_1}^2\,\varphi_{A_1}(x)\,\delta(s-M_{A_1}^2); \qquad (37)$$

здесь ρ_{A_1} записано в "x - представлении", $\varphi_{A_1}(x)$ - волновая функция A_1-резонанса, M_{A_1} = 1,275 ГэВ - его масса. Тогда левая часть ПС принимает вид

$$\int_0^\infty \exp(-s/M^2)\,\rho(s)\,ds = f_\pi^2\,\varphi_\pi(x) + f_{A_1}^2\,\varphi_{A_1}(x)\exp(-M_{A_1}^2/M^2) + \rho_{cont}(x,S_0). \qquad (38)$$

Интегрируя формулы (36) и (38), установим ПС в представлении ξ — моментов (ср. с (I.52))

$$f_\pi^2 \langle \xi^N \rangle_\pi + f_{A_1}^2 \langle \xi^N \rangle_{A_1} \exp(-M_{A_1}^2 / M^2) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{M^2}{(N+1)(N+3)} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} A_N\right) \cdot$$

$$\cdot (1 - \exp(-S_0/M^2)) + \frac{N_q}{2M^4} \left\{ \frac{9}{(\Delta_4)^2} \left[F(N+1, N+3; \gamma_4) - \frac{1}{2\bar\Delta_4} \left(F(N+1, N+2; \gamma_4) - \right.\right.\right. \tag{39}$$

$$\left.\left. - F(N+3, N+4; \gamma_4) \right)\right] + 4 \left[\gamma_0^N \left(1 + 2N \frac{\bar\Delta_0}{\gamma_0}\right) + 6N \bar\Delta_1 \gamma_1^{(N+1)} + \right.$$

$$\left.\left. \frac{4}{\Delta_2} \gamma_2^N \bar\Delta_2 - \frac{1}{(\Delta_2)^2} Q(N+1, N+2; \gamma_2) + \frac{1.5}{\Delta_3} Q(N+1, N+2; \gamma_3) - 3\gamma_3^N \bar\Delta_3 \right] \right\}$$

$$+ \frac{\alpha_s \pi \langle G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \rangle}{12 M^2} \gamma_4^N .$$

Здесь

$$F(M, L; \gamma) = \frac{1-\gamma^M}{M} - \frac{1-\gamma^L}{L}; \quad Q(M, L; \gamma) = \frac{1-\gamma^M}{M} + \frac{1-\gamma^L}{L};$$

$$\gamma_i = 1 - 2\Delta_i .$$

В правой части (39) модельным образом (как и в работе /I/) учтен вклад глюонов. Отметим, что одной из особенностей предлагаемых ПС является ограничение на минимальное значение борелевского параметра M^2, следующее из самих ПС, а не накладываемые процедурой обработки. Из очевидного условия (см. также формулу (I.36)) $\gamma_i \geq 0$ следует $M^2 \geq \max(2C_{(i)j}) = 0{,}54$ ГэВ^2 (для λ_q^2 здесь использована максимальная оценка 0,5 ГэВ^2). Обработка ПС (39) проводилась стандартным путем (см., например, /4/): сначала, из дочерних правил сумм $d/d(1/M^2)$ (ПС) определяем значения моментов $f_{A_1}^2 \langle \xi^N \rangle_{A_1}$; подставив последние в (39), извлекаем значения моментов $f_\pi^2 \langle \xi^N \rangle_\pi$, исходят из максимальной стабильности по M^2 правой части (39) для интервала S_0 2,I ГэВ ^{2} $\gtrsim$ S_0 $\gtrsim$ I,7 ГэВ ^{2}. В результате найдем

$$\langle \xi^0 \rangle_\pi = 1 \qquad \langle \xi^2 \rangle_\pi = 0{,}32 \pm 0{,}03 \qquad \langle \xi^4 \rangle_\pi = 0.2^{+0{,}03}_{-0{,}02} \qquad \langle \xi^6 \rangle_\pi = 0{,}15 \pm 0{,}02 \tag{40}$$

$$S_0 \approx 1{,}7 \text{ ГэВ}^2 \qquad S_0 \approx 1{,}9 \text{ ГэВ}^2 \qquad S_0 \approx 1{,}9 \text{ ГэВ}^2 \qquad S_0 \simeq 2 \text{ ГэВ}^2$$

При изменении M^2 в пределах от 0,7 - 0,9 ГэВ^2 до 2,6 ГэВ^2 ПС (39) без учёта вклада A_1 — резонанса отличаются худшей стабильностью

по M^2 и приводят к несколько меньшим значениям для моментов

$$\langle \xi^0 \rangle_\pi = 1 \quad \langle \xi^2 \rangle_\pi = 0{,}29 \quad \langle \xi^4 \rangle_\pi \simeq 0{,}19 - 0{,}2 \quad \langle \xi^6 \rangle_\pi \simeq 0{,}14 - 0{,}15$$

$$S_0 \simeq 0{,}75 \text{ ГэВ}^2. \; S_0 \simeq 0{,}8 \text{ ГэВ}^2. \quad S_0 \simeq 1{,}2 \text{ ГэВ}^2. \quad S_0 \simeq 1{,}6 \text{ ГэВ}^2.$$

Отметим, что значение второго момента $\langle \xi^2 \rangle \simeq 0{,}32$ в (40) оказалось близким к среднему значению $\langle \xi^2 \rangle_L = 0{,}34 \pm 0{,}17$ /5/, полученному недавно численным расчетом на решетке. Указанный в (40) интервал ошибок для $\langle \xi^N \rangle$ соответствует изменению масштаба обратных ширин C_i в 0,75 I,5 раза, что в принципе допускается используемыми у нас приближениями и неопределенностью задания λ_q^2. Конечно, с увеличением C_i значения моментов уменьшаются. Оцененные нами в разделе 2 значения C_i меньше, чем принятый в демонстрационных ПС работы /I/ общий масштаб $\lambda_q^2/2$, а используемые анзацы (32) приводят к более медленному падению моментов с N (см. (33 б, в), чем в случае дельта - функций (3I) (см. /I/). Поэтому значения моментов (40) лежат между предельным случаем Черняка и Житницкого /6/ и примером работы /I/. Напомним, однако, что при получении (40) мы использовали, по сути, билокальные анзацы трилокальных распределений, учитывающие лишь эффект наиболее резкого убывания по одному из аргументов функций $\tilde f_i$. Более полный учёт нелокальности должен приводить к уменьшению значений ξ -моментов. Поэтому величины в (40) нужно рассматривать скорее как верхние границы для моментов. Последние хорошо аппроксимируются формулой

$$\sup \langle \xi^N \rangle \approx \frac{1}{N+1} \tag{4I}$$

функция, буквально удовлетворяющая (4I), имеет вид $\varphi_\pi(x) = 1$, что на самом деле означает, что истинная $\varphi_\pi(x)$ близка к const в средней области x. Один из возможных вариантов, удовлетворяющий (4I) и условиям на границах, есть

$$\varphi_\pi^{mod}(x) = \frac{(x\bar x)^a \, 2^{(2a+1)}}{B(1+a, 1/2)}$$

при достаточно малом значении a.

Заключение

В работе развивается метод КХД ПС, основанный на нелокальных ВС, предложенный в работе /1/. Вычислены кварковые ВС размерности 8. На основании этих расчетов строятся и анализируются анзацы для функций распределения f_{0-3}, связанных с билокальными и трилокальными ВС. По вкладу ВС $\langle\bar q \nabla^2 q\rangle\langle\bar q q\rangle$, характеризующего среднюю виртуальность вакуумных кварков, проведена оценка ширин функций f_i.

Из обработки ПС с учётом A_1-резонанса получены оценки (40) (сверху) для первых моментов волновой функции. Эти оценки ниже значений ξ-моментов Черняка и Житницкого /6/, но выше, чем в нашем модельном примере в /1/ (см. конец раздела 8). Волновая функция, соответствующая (40), близка к const в средней области значений x.

Мы благодарны А.Р. и И.Р. Житницким за обсуждение ряда аспектов работы и А. Умникову за помощь в расчётах.

Приложение

Кратко рассмотрим здесь вычисление элемента a_0, определяющего нормировку функции f_0. Умножив обе части равенства (1) на γ^{μ}_{km}, получим

$$\langle\bar q \gamma^{\mu}(\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho)_S q\rangle = i\, P_{(\alpha\beta\rho\mu)}\, a_0\,, \qquad (\text{П}1)$$

где тензор $P_{(\alpha\beta\rho\mu)}$ определен в (5а) и $P^2 \equiv P_{(\alpha\beta\rho\mu)} P^{(\alpha\beta\rho\mu)} = 72$.

Использовав уравнения движения (УД) (12а), придем к равенству для a_0,

$$a_0 = -i\,\frac{P^{(\alpha\beta\rho\mu)}}{P^2}\langle\bar q \gamma_\mu \nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\rho q\rangle = -i\,\frac{\langle\bar q \nabla_\alpha \hat\nabla \nabla^\alpha q\rangle}{72}. \qquad (\text{П}2)$$

Применяя к (П2) соотношение коммутации

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]_- = ig\,\hat G_{\rho\sigma} \quad ; \quad [\nabla_\sigma, \hat G_{\rho\sigma}]_- = \hat G_{\rho\sigma;\sigma} = -g\,\hat J_\rho$$

и УД (12б), найдем окончательное выражение для a_0,

$$a_0 = \frac{g^2}{144}\langle J^a_\mu J^\mu_a\rangle \simeq \alpha_s \frac{\pi}{81}\langle\bar q q\rangle^2. \qquad (\text{П}3)$$

На последнем этапе мы применили гипотезу вакуумной доминантности.

Перейдем к выявлению структуры матричных элементов размерности 8 (см. формулу (5)). Наиболее общее выражение для элемента $\hat M_1$ принимает форму.

$$\begin{aligned}\hat M_1 \equiv \langle\bar q_\ell \hat G_{\mu\nu;(\rho\beta)_S}\nabla_\alpha q_m\rangle &= \left(Q_{(\rho\beta\alpha\nu)}\gamma_\mu - Q_{(\rho\beta\alpha\mu)}\gamma_\nu\right)_{m\ell} + L_{(\mu\nu\rho\beta)}(\gamma_\alpha)_{m\ell} - \\ &-i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}(\gamma^\lambda\gamma^5)_{m\ell}\, g_{\rho\beta}\frac{E_1}{4} + i\left(\varepsilon_{\rho\mu\alpha\lambda} g_{\beta\nu} - \varepsilon_{\rho\nu\alpha\lambda} g_{\beta\mu}\right)(\gamma^\lambda\gamma^5)_{m\ell}\frac{E_2}{4} \qquad (\text{П}4)\\ &+ i\left(\varepsilon_{\beta\mu\alpha\lambda} g_{\rho\nu} - \varepsilon_{\beta\nu\alpha\lambda} g_{\rho\mu}\right)(\gamma^\lambda\gamma^5)_{m\ell}\frac{E_3}{4}\,.\end{aligned}$$

Здесь $L_{(\mu\nu\rho\beta)} = (g_{\mu\rho} g_{\nu\beta} - g_{\nu\rho} g_{\mu\beta})\frac{L}{4}$ и

$$Q_{(\rho\beta\alpha\nu)} = g_{\rho\beta} g_{\alpha\nu}\frac{B_1}{4} + g_{\nu\beta} g_{\alpha\rho}\frac{C_1}{4} + g_{\alpha\beta} g_{\nu\rho}\frac{D_1}{4}\,.$$

Из симметрии по индексам ρ и β сразу следует $L = 0$. Воспользовавшись уравнениями движения (12а)

$$\gamma^\alpha_{nm}\hat M_1 = 0 \qquad (\text{П}5)$$

и соотношением $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^5 = i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$, получим из (П5)

$$\begin{aligned}&(B_1 - E_1)(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\, g_{\rho\beta} + (C_1 - D_1)(g_{\rho\mu} g_{\beta\nu} - g_{\rho\nu} g_{\beta\mu}) + \\ &i(\sigma_{\rho\mu} g_{\beta\nu} - \sigma_{\rho\nu} g_{\beta\mu})(C_1 - 2E_1) + i(\sigma_{\beta\mu} g_{\rho\nu} - \sigma_{\beta\nu} g_{\rho\mu})(D_1 - 2E_3). \qquad (\text{П}6)\end{aligned}$$

Следовательно, $B_1 = E_1,\ C_1 = D_1 = 2E_2 = 2E_3$. Применяем теперь уравнение движения для дуального псевдотензора $\tilde G_{\gamma\sigma}$:

$$\tilde G_{\gamma\sigma;\gamma} \equiv g_{\rho\gamma}\,\varepsilon^{\gamma\sigma\mu\nu}\hat G_{\mu\nu;\rho} = 0\,, \qquad (\text{П}7)$$

$$g_{\rho\gamma}\,\varepsilon^{\gamma\sigma\mu\nu}\hat M_1 = 0\,. \qquad (\text{П}8)$$

Из последнего равенства (П8), используя для сверток тензоров выражение типа

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} = 2\left(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right) \qquad \text{и т.п.,}$$

нетрудно получить, что $B_1 = C_1$, что и дает формулу (5) для $\hat{M}_1$. Структуры прочих матричных элементов $\hat{M}_i$ получаются применением к общим выражениям типа (П4) уравнений движения (П2), (П7) и учётом свойств симметрии по индексам.

Литература

1. Михайлов С.В., Радюшкин , Препринт ОИЯИ, Р2-88-103, Дубна, 1987.
2. Ioffe B.L., Smil a A.V. Nucl. Phys., B, 1983, 216, 373.
3. Nikolaev S.N., Radyuskin A.V. Nucl. Phys., B, 1983, 213, 285.
4. Житницкий А.Р., Житницкий И.Р., Черняк В.Л. ЯФ, 1983, 38, 1074.
5. Martinelli and Sachraida C.T. - Preprint CERN-TH 4637/87, Geneva.
6. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R. Nucl. Phys., B, 1982, 201, 492.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 февраля 1988 года.

Михайлов С.В., Радюшкин А.В. Р2-88-104

Нелокальность кварковых конденсатов и волновая функция пиона в КХД. Модельное рассмотрение

Вычислены некоторые кварковые вакуумные средние размерности 8. На их основе строятся анализы для билокальных $\langle q(o)\gamma_\mu q(z)\rangle$ и трилокальных $\langle q(o)\gamma_\mu \hat{A}_\upsilon(y) q(z)\rangle$ кварковых конденсатов, введенных в нашей предыдущей работе [1]. Получены правила сумм и найдены новые ограничения на первые моменты волновой функции пиона /с учетом A_1-резонанса/. Обсуждается форма волновой функции.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Mikhailov S.V., Radyushkin A.V. P2-88-104

Nonlocality of Quark Condensates and Pion Wave Function in QCD. Model Consideration

The ansatzes for bilocal $\langle q(o)\gamma_\mu q(z)\rangle$ and three-local $\langle q(o)\gamma_\mu \hat{A}_\upsilon(y) q(z)\rangle$ quark condensates are build based on computation of some VEV 8 dimension. The new sum rules are obtained, and new constraints for first moments of the pion wave function $\Phi_\pi(x)$ taking into account A_1-resonance) are found. A possible form of the wave function is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988