сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-88-10

Р.М.Ямалеев

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В СПИНОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1988

Введение

Как известно /I/, используя скалярные произведения спиноров с весовыми функциями – матрицами алгебры Клиффорда, можно образовать различные векторные, тензорные величины: $\mathcal{X}_{\mu\ldots\nu} = (\overline{\Psi}, \gamma_{\mu\ldots\nu}\Psi)$. Эта билинейная связь является основным математическим источником идей перехода от векторных (тензорных) величин к объектам, имеющим спинорную природу. В /2-4/ был предложен формализм перехода от обычных 4-мерных векторов пространства $\{\mathcal{X}_\mu\}$ к спинорам $\{\psi\}$. В /5-7/ рассматривались квадратичные преобразования координат, связанные с расслоением Хопфа. Их можно также понимать как переход от декартовых координат к спинорным. В последнее время спинорное представление приобрело особое значение в связи с развитием теории твисторов /8/.

Однако во всех этих подходах спинорное пространство рассматривается как более удобное, обладающее интересными алгебраическими, геометрическими свойствами. Здесь,на самом деле, речь идет о такой квадратично нелинейной замене координат, которая практически не меняет (и не ставит под сомнение) традиционное пространство Минковского как пространство, в котором происходят реальные физические процессы. В настоящей работе, как и в /9,II/, основной акцент делается на то, что переход к спинорным (равно как кватернионным /I0/, октанионным /II/) переменным есть необходимость, диктуемая неполнотой, незаконченностью теории движения частиц со спином.

Для частиц со спином имеет место закон сохранения полного углового момента, состоящего из суммы орбитального $\vec{M}$ и спинового $\vec{S}$ моментов:

$$\vec{J} = \vec{M} + \vec{S}.$$

Рассмотрим случай спина I. Тогда спиновый оператор есть

$$\vec{S}_{ij}(1) = -i\hbar\,[\vec{e}_i \times \vec{e}_j],$$

где $\vec{e}_i\ (i=1,2,3)$ – базисные векторы (реперы) 3-мерного пространства. В этом случае оператор полного углового момента может быть представлен в виде

$$\vec{J} = -i\hbar\, \vec{\tau}_{ik}\, (\hat{e}^i \hat{e}^k + r^i \partial/\partial r^k).$$

Из этого определения видно, что для частиц со спином I радиус-вектор $\vec{r}$ дополняется репером данного пространства. Если введем расширенные координаты $\vec{\rho} := (\vec{r}, R\vec{e})$ и соответственно импульсы $\vec{\pi} := (\vec{p}, -\frac{i\hbar}{R}\vec{e}^+)$, то величина $\hbar^2/2mR^2$ будет соответствовать энергии спина I.

Для частиц со спином $1/2$ эти соотношения обобщаются, если перейти в пространство S^3 и рассматривать $SU_2(2)$ -группы движения этого пространства /I0/. Релятивистское обобщение теории Дирака спина $1/2$ в спинорном пространстве, как будет показано ниже, приводит к аналогичному расширению спинорного пространства.

I. О ковариантных свойствах уравнения Дирака

Для определенности выберем следующее представление для γ -матриц Дирака:

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (k=1,2,3),$$

$$\gamma_5 := i\begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 := E_4; \qquad (I.I)$$

здесь σ_k $(k=1,2,3)$ - матрицы Паули, E_n - единичная матрица порядка n. Далее будем работать в импульсном пространстве в единицах $\hbar = 1$, $c = 1$.

Уравнение Дирака в этом случае имеет вид /I2/

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = m\psi, \qquad (I.2)$$

m - масса покоя частицы. (Индексы μ, ν пробегают значения 0, I,2,3).

Пусть $L_\mu{}^\nu$ есть матрица преобразования Лоренца для векторов пространства Минковского:

$$x'_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu, \quad (x' = Lx). \qquad (I.3)$$

Тогда существует матрица $\hat{U}$, удовлетворяющая соотношению

$$\hat{U}^{-1}\gamma_\mu \hat{U} = L_\mu{}^\nu \gamma_\nu. \qquad (I.4)$$

Это известное утверждение (см. /I3/), обеспечивающее ковариантность (I.2) относительно группы преобразования Лоренца. Действительно, в преобразованной системе координат имеем

$$\gamma_\mu p'^\mu \psi' = m\psi'. \qquad (I.5)$$

Подставляя (I.3), (I.4) в (I.5), получим

$$\gamma_\mu L^\mu{}_\nu p^\nu \hat{U}\psi = m\hat{U}\psi. \qquad (I.6)$$

Таким образом, для сохранения канонического вида уравнения необходимо выполнение условия

$$\hat{U}^{-1}\gamma_\mu L^\mu{}_\nu p^\nu \hat{U} = \gamma_\nu p^\nu, \qquad (I.7)$$

т.е. условия (I.4).

Такова принципиальная схема доказательства ковариантных свойств уравнения Дирака. Отметим некоторые особенности поведения уравнения (I.2) при преобразованиях координат. Как мы видим, γ - матрицы в результате преобразования Лоренца не меняются. Согласно (I.4) они выполняют своеобразную роль "трансмиссии", преобразуя векторную трансформацию в спинорную. Связь между матрицами $\hat{U}$ и $\hat{L}$, собственно, отражает связь между максимальным числом γ -матриц с их матричной размерностью.

Далее, при исследовании трансформационных свойств необходимо учитывать связь между ψ и p_μ, которую можно установить непосредственно из (I.2), решая систему линейных алгебраических уравнений. Вопрос здесь состоит в том, что решая (I.2), действительно ли получим функцию $\psi = \psi(p)$, имеющую структуру объекта, как "корня квадратного" от вектора?

Нашей целью является доказательство следующего утверждения:

"Решение (I.2) $\psi = \psi(p_\mu)$ только в том случае является спинором, если билинейная спинорная структура компонент импульса p_μ (μ = 0,I,2,3) заведомо предполагается".

Прежде всего покажем, что (I.2) имеет неспинорные решения. В качестве таких решений можно взять 4 столбца:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} m + p_0 \\ 0 \\ ip_1 \\ ip_2 - p_3 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 + m \\ ip_2 + p_3 \\ -ip_1 \end{pmatrix}, \qquad (I.8)$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} ip_1 \\ ip_2 - p_3 \\ -p_0 + m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} ip_2 + p_3 \\ -ip_1 \\ 0 \\ -p_0 + m \end{pmatrix}.$$

Допустим, что эти столбцы при преобразованиях Лоренца преобразуются как биспиноры Дирака. Тогда одни и те же физические величины – p_μ будут подвергаться различным изменениям в зависимости от того, куда они входят: в $\gamma_\mu p^\mu$ или в $\Psi(p_\mu)$.

Это противоречие может быть снято двумя способами. Первый способ состоит в представлении решения (I.2) не в виде столбцов, а в виде матрицы, состоящей из этих столбцов:

$$\hat{K} := E_4 m + p_\mu \gamma^\mu. \tag{I.9}$$

Тогда $\hat{K}' = U K U^{-1}$ и p_μ будут преобразовываться как компоненты 4 – импульса. Однако нам важно получить спинорные решения (I.2). Второй способ дает ответ на этот вопрос: спинорные решения получим, если предположим, что

$$-\delta^{ij} m + p^\mu \gamma_\mu^{\ ij} = \rho^i \pi^j + \ell^i \eta^j, \tag{I.10}$$
$$(i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Уравнение (I.2) в новых переменных принимает вид

$$(\rho^i \pi^j + \ell^i \eta^j)\Psi_j = 0. \tag{I.11}$$

Решение (I.11) имеет вид спинора:

$$\Psi_i = \varepsilon_{ijk} \pi^j \eta^k, \tag{I.12}$$

ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} =$ I.

Утверждение доказано.

Таким образом, для получения решений (I.2), преобразующихся как биспиноры, необходимо представление компонент импульса в виде билинейных комбинаций от спинорных величин. Обычно при построении решений (I.2) сначала строят решения в системе покоя ($\vec{p} = 0$), затем с помощью лоренцева буста, поворотов находят общее решение. Этот прием также приводит к билинейной спинорной структуре компонент p_μ, поскольку решение и p_μ в этом случае можно выражать через половинные углы. Тогда мы снова увидим квадратичную спинорную структуру p_μ.

Выражение (I.10) является исходным пунктом в теории твисторов для частиц с $m \neq 0$. Для безмассовых частиц подобное выражение имеет более простой вид [8]:

$$p^{AA'} := \begin{bmatrix} p_0 + p_1 & p_2 + ip_3 \\ p_2 - ip_3 & p_0 - p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \bar{\tau}_1 & \pi_1 \bar{\tau}_2 \\ \pi_2 \bar{\tau}_1 & \pi_2 \bar{\tau}_2 \end{bmatrix}. \tag{I.13}$$

Здесь справедливость (I.13) является следствием равенства

$$\det [p^{AA'}] = 0. \tag{I.14}$$

В предположении (I.13) решение системы

$$p^{AA'} \Psi_{A'} = 0, \tag{I.15}$$

действительно спинор:

$$\Psi_{A'} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_2 \\ -\bar{\tau}_1 \end{pmatrix}. \tag{I.16}$$

Можно найти решение (I.15) и в случае, когда $p^{AA'}$ есть матрица от дифференциальных операторов. В этом случае вводится еще один спинор

$$\omega^A = x^{AA'} \pi_{A'}$$

и образуется новый объект – твистор:

$$Z_\alpha := (\omega^A, \pi_{A'}).$$

Первичному квантованию $[x_i, p_k] = i\delta_{ik}$ в этой схеме соответствует квантование твисторов [8]. Норма твисторов есть оператор спиральности для частиц со спином. Необходимым условием нетривиальности спиральности является существование мнимой части у координат, т.е.

$$x^{AA'} = x^{AA'} + iy^{AA'},$$

тогда норма твистора есть

$$Z_\alpha \bar{Z}^\alpha = 2y^a p_a > 0.$$

При этом компоненты импульса вещественны. Допущение комплексности координат при вещественных импульсах, на наш взгляд, указывает на неполноту теории твисторов и делает ее применяемой только для описания безмассовых полей.

2. Уравнение Дирака в спинорных координатах

В самой форме записи уравнения (I.2) есть важная "подсказка" относительно скрытой структуры компонент импульса p_μ. В левой части уравнения (I.2) имеем инвариант, образованный из двух 4-векторов, γ_μ и p_μ, имеющих, вообще говоря, различную природу: γ_μ – как матрица имеет внутреннюю структуру, p_μ – не имеет. Умножая (I.2) скалярно на $\bar{\Psi}$ и учитывая, что $(\bar{\Psi}, \Psi) = 1$, получим

$$(\bar{\Psi}, \gamma_\mu \Psi) p^\mu = m. \qquad (2.1)$$

В системе покоя: $m = p_0(\bar{\Psi}, \gamma_0 \Psi)$. Сравнивая с обычными соотношениями

$$\frac{p_\mu}{m} p^\mu = m, \quad \frac{p_0}{m} p_0 = m, \qquad (2.2)$$

приходим к выводу, что

$$p_0 = m(\bar{\Psi}, \gamma_0 \Psi), \quad p_\mu = m(\bar{\Psi}, \gamma_\mu \Psi). \qquad (2.3)$$

Если принять билинейную спинорную природу 4-импульса в виде (2.3), то сразу возникает возможность перехода в 5-мерное пространство, поскольку в биспинорном представлении инвариантом является длина 5-мерного вектора /I3/.

Рассмотрим билинейную композицию, построенную из γ-матриц (I.I) и двух взаимосопряженных 4-компонентных спиноров ρ_i и π_j:

$$p_K = \gamma_K^{ij} \rho_i \pi_j, \quad (K=0,1,2,3,4;\ i,j=1,2,3,4). \qquad (2.4)$$

Существует замечательное соотношение для квадратов p_K:

$$p_4^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 + p_5^2. \qquad (2.5)$$

Таким образом, инвариант $I^2 = (\rho_i \pi^i)^2$ соответствует длине 5-мерного вектора.

Как показал Клейн /I4/, уравнение (2.5) можно привести к виду

$$K_{01}K_{23} + K_{02}K_{31} + K_{03}K_{12} = 0, \quad K_{ij} = x_i y_j - x_j y_i. \qquad (2.6)$$

Величины K_{ij} являются плюккеровыми координатами прямых, проходящих через точки $X(x_i)$ и $Y(y_i)$. Таким образом, координаты x_i, y_i являются проективными координатами. Это перенесение трехмерной проективной геометрии на пятимерную гиперболическую геометрию, абсолют которого имеет уравнение (2.6), называется "перенесением Плюккера". Отсюда, в частности, следует, что p_K из (2.4) суть видоизмененные плюккеровы координаты.

Для нас более важным является линеаризованное по p_K соотношение

$$p_4 \pi^i = p^K \gamma_K^{ij} \pi_j \quad (K=0,1,2,3,5). \qquad (2.7)$$

Подчеркнем, что соотношение (2.7) является первичным по отношению к (2.5); последнее получится, если (2.7) скалярно умножить на $\{\rho_i\}$. Аналогично имеем:

$$p_4 \rho^i = p^K \gamma_K^{ij} \rho_j. \qquad (2.8)$$

Условие квантования

Заметим, что p_K будут иметь ту же природу, что и матрицы γ_K, являясь жордановыми отображениями последних, если в квантовом случае определим ρ_i и π_i как бозонные операторы "рождения и уничтожения" с коммутационными соотношениями

$$[\pi_i, \rho_K] = \delta_{iK}. \qquad (2.9)$$

Как известно /I5/, отображение $\mathcal{L}_{n\times n}$ – матриц в бозонные операторы, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ и заданное формулой (2.4), сохраняет операцию коммутирования матриц. Следовательно, согласно определению /I6/, форма $p^K \gamma_K$ есть канонический инвариант.

Ясно, что оператор p_4 коммутирует со всеми операторами p_K из (2.4). Мы будем называть p_4 оператором Эйлера; так как он диагонален на подпространстве однородных полиномов из $\mathcal{H}_n$, то имеет собственные значения

$$p_4 \Psi_n(\xi) = n \Psi_n(\xi), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2.10)$$

Теперь рассмотрим обобщение соотношений (2.7), (2.8) в квантовом случае. Используя (2.9) нетрудно показать, что имеют место следующие операторные соотношения

$$(p^k\gamma_k)^{ij}\rho_j = (p_4\gamma_4 + 4\gamma_4)^{ij}\rho_j\,, \qquad (2.11)$$
$$(p^k\gamma_k)^{ij}\pi_j = (p_4\gamma_4)^{ij}\pi_j\,.$$

Соответственно,

$$\rho_i\,(p^k\gamma_k)^{ij} = \rho_i\,(p_4\gamma_4)^{ij}, \qquad (2.12)$$
$$\pi_i\,(p^k\gamma_k)^{ij} = \pi_i\,(p_4\gamma_4 + 4\gamma_4)^{ij}.$$

Эти операторные соотношения действуют на заданном пространстве $\mathcal{H}_n(\Psi_n)$. Поэтому 4-спиноры

$$\varphi_{i,n} = \rho_i\Psi_n\,,\quad \bar\varphi_{i,n} = \pi_i\Psi_n$$

можно рассматривать как решения системы (2.11). Причем, согласно (2.10),

$$p_4\,\varphi_{i,n} = (n-1)\,\varphi_{i,n}\,, \qquad (2.13)$$
$$p_4\,\bar\varphi_{i,n} = (n+1)\,\bar\varphi_{i,n}.$$

Систему (2.11) можно записать так:

$$(p^k\gamma_k)^{ij}\varphi_{j,n} = (n+3)\,\varphi_{j,n}\,, \qquad (2.14)$$
$$(p^k\gamma_k)^{ij}\bar\varphi_{j,n} = (n+1)\,\bar\varphi_{j,n}\,.$$

Трансформационные свойства

С оператором

$$\hat O := p^k\gamma_k - p_4\gamma_4$$

коммутируют операторы поворотов

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[p_\mu + \gamma_\mu\,,\, p_\nu + \gamma_\nu\right],$$

которые и определяют трансформационные свойства системы (2.11). Генераторы $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ задают повороты в плоскостях $\{p_\mu, p_\nu\}$, т.е. в 5-мерном пространстве де Ситтера. Они осуществляют двузначное представление группы де Ситтера. Матрица

$$\hat{\mathcal{U}} := \exp(\mathcal{J}_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu})$$

($\omega^{\mu\nu}$ – параметры преобразований)

есть однозначное представление подгруппы унимодулярной комплексной четырехмерной линейной группы.

Сумму

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \qquad (2.15)$$

будем называть полным генератором преобразований, а вектор

$$\Pi_\mu = p_\mu + \gamma_\mu \qquad (2.16)$$

полным вектором импульса. Таким образом, γ_μ в данной модели есть импульс покоя или собственный импульс. Соответственно, $\gamma_{\mu\nu}$ – собственный генератор поворотов. На спинорном уровне суммы (2.15), (2.16) можно рассматривать как следствие расширенного 4-спинорного представления, а именно:

$$\rho := (\rho_i\,, e^k{}_i), \qquad (2.17)$$
$$\pi := (\pi_i\,, \bar e^k{}_i),$$

где $e^k{}_i$, $\bar e^k{}_i$ – взаимосопряженные 4-спинорные тетрады.

3. Сравнение с уравнением Дирака. Монады

Уравнения (2.14) по существу являются 5-мерными уравнениями Дирака в пространстве де Ситтера /17-18/. Если работать только вещественными величинами, то сигнатура 5-мерного простарснтва $\{p_\mu\}$ такова (+ + + – –). Поскольку p_4 мы интерпретируем как оператор массы (в нашем случае он имеет целочисленный спектр), то p_0 в соответствии с уравнением Дирака является оператором энергии. Таким образом, требуемую сигнатуру получим только в результате введения комплексных величин. Для восстановления размерности импульса – энергии необходимо ввести константу размерности длины. В качестве такой константы возьмем радиус сферы R .

Тогда

$$\Pi_\mu = p_\mu + \frac{\hbar}{R}\gamma_\mu\,,$$
$$[\Pi_\mu\,, \Pi_\nu] = \frac{i\hbar}{R^2}\mathcal{J}_{\mu\nu}\,.$$

Таким образом, при $R \to \infty$ $\Pi_\mu \to p^0_\mu$, где p^0_μ – оператор 4-импульса, соответствующий пространственно-временным трансляциям, и мы получаем генераторы сдвига группы Пуанкаре.

Существенной особенностью изложенной выше схемы является квантованность оператора массы и то, что решениями уравнения движения являются сами координаты, в данном случае 4-спиноры ρ_i и π_i. Последние являются операторами "рождения" и "уничтожения" частиц с массой $2\hbar/R$ – монадами. Поскольку координаты сами являются решениями уравнений движения, то преобразование координат отождествляется с преобразованием в пространстве волновых функций.

Согласно теореме Нетер эти преобразования приводят к сохраняющимся токам /19/. В итоге концепция отождествления преобразований пространства волновых функций и координат приводит к интерпретации $\hbar\gamma_\mu/R$ как заряда энергии – импульса, $\hbar\gamma_{\mu\nu}$ – заряда момента импульса. Соответственно монады с массой $2\hbar/R$ можно трактовать как частицы, заряженные энергией – импульсом – моментом импульса. В этой модели монады, возможно, будут выполнять роль носителей энергии – импульса – момента импульса в токах Нетер, подобно тому, как электроны являются носителями заряда в электрических токах.

Тот факт, что в теории спина сохраняются энергия – импульс – момент импульса только в сумме с конечномерными операторами $\hbar\gamma_\mu/R$, $\hbar\gamma_{\mu\nu}$, указывает на возможность конечномерной формулировки теории. В этом случае операторы $J_{\mu\nu}$ и Π_μ можно заменить на конечную прямую сумму операторов $\hbar\gamma_\mu/R$ и $\hbar\gamma_{\mu\nu}$, подобно тому, как в теории углового момента состояние $|jm\rangle$ можно рассматривать как результат соответствующего сложения:

$$|(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle .$$

Литература

1. Желнорович В.А. Теория спиноров и ее применение в физике и механике. "Наука", М., 1982.
2. Weyl H.Zs.f.Phys., 1929, 56, p.330 .
3. Smrz P.Can.J.Phys., 1968, 46, p.2073, Tait W., Cornwell J.F.Lett. Nuovo Cim., 1972, 3, p.511 .
4. Nguen Thi Hong.Prog.Theor.Phys., 1976, 56, p.1647; ОИЯИ, Р2-12768, Дубна, 1979.
5. Kustaanheimo P., Stiefel E.Journ.f.reine u.angew.Math., Berlin, 1965, 218, p.204.
6. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. "Наука", М., 1975.
7. Полубаринов И.В. ОИЯИ, Р2-83-872, Дубна, 1983.
8. Пенроуз Р., Уорд Р.С. Твисторы в плоском и искривленном пространстве – времени. В кн.: Твисторы и калибровочные поля. "Мир", М., 1983, с. 78-130. Todorov I.T.Conformal Description of Spinning particles. Trieste preprint 1181/E, 1981 .
9. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-82-910, Дубна, 1982.
10. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-84-727, Дубна, 1984.
11. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-85-233, Дубна, 1985.
12. Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория, т.I, "Наука", М., 1978.
13. Фок В.А. Начала квантовой механики. М., "Наука", 1976.
14. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа). Пер. Д.М.Синцова. В кн.: Об основаниях геометрии, М., "Мир", с.399-434.
15. Биденхарн Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой физике, т.I, "Мир", М., 1984.
16. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-85-722, Дубна, 1985.
17. Гюрши Ф. Введение в теорию групп. Пер. Б.Н.Фролова. В кн.: Теория групп и элементарные частицы. М., "Мир", 1967.
18. Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий. ЭЧАЯ, т. II, вып. I, 1980.
19. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1988 года.