ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 8776

В.Л.Любошиц

СООТНОШЕНИЕ УНИТАРНОСТИ И $\rho^0-\omega$ -СМЕШИВАНИЕ

1975

P2 - 8776

В.Л.Любошиц

СООТНОШЕНИЕ УНИТАРНОСТИ И $\rho^0-\omega$ -СМЕШИВАНИЕ

Направлено в ЯФ

1. Как известно, полюсной вклад двух перекрывающихся резонансов ρ° и ω в амплитуды различных процессов описывается матричным пропагатором $P(m) = (\hat{M}-m)^{-1}$, где $\hat{M}$ – массовая матрица /1,2/. Ввиду изотропности пространства массовая матрица диагональна по проекциям спина ρ° – и ω –мезонов на произвольную ось. В соответствии с этим элементы $\hat{M}$ имеют структуру

$$\langle t\lambda \mid \hat{M} \mid t'\lambda'\rangle = M_{tt'}\ \delta_{\lambda\lambda'}\ , \qquad (1)$$

где t и t' – изотопические спины базисных состояний ($t,t' = 0,\ 1$), λ и λ' – проекции обычного спина ($\lambda,\lambda' = 0,\ \pm 1$), δ – символ Кронекера. Недиагональные матричные элементы M_{01} и M_{10}, отвечающие электромагнитному перемешиванию состояний с изотопическими спинами 0 и 1 и противоположными G-чётностями, пропорциональны константе $\alpha = e^2/\hbar c$.

Из требования инвариантности сильного и электромагнитного взаимодействий относительно обращения времени вытекает, что в представлении чистых изоспиновых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ массовая матрица симметрична ($M_{01} = M_{10}$). С учётом этого собственные состояния матрицы $\hat{M}$, которые ассоциируются с полюсами S – матрицы при комплексных значениях эффективной массы m и соответствуют физическим резонансам ρ° и ω, представляют собой суперпозиции /1–7/:

$$|\rho^\circ\rangle_\lambda = (1+|\epsilon|^2)^{-\frac{1}{2}}(|1\rangle_\lambda - \epsilon|0\rangle_\lambda),$$
$$|\omega\rangle_\lambda = (1+|\epsilon|^2)^{-\frac{1}{2}}(|0\rangle_\lambda + \epsilon|1\rangle_\lambda). \tag{2}$$

Здесь ϵ – параметр смешивания; при этом, в связи с малостью электромагнитной константы, $|\epsilon| \ll 1$. В первом приближении

$$\epsilon = \frac{M_{01}}{M_{00}-M_{11}}. \tag{3}$$

Так как ϵ – комплексная величина, нестабильные состояния $|\rho^\circ\rangle$ и $|\omega\rangle$ с одинаковыми спиновыми квантовыми числами неортогональны друг другу:

$$\langle\rho^\circ_\lambda|\omega_\lambda\rangle = \langle\rho^\circ|\omega\rangle\,\delta_{\lambda\lambda'},$$
$$\langle\rho^\circ|\omega\rangle = 2i\frac{\operatorname{Im}\epsilon}{1+|\epsilon|^2} \approx 2i\operatorname{Im}\epsilon. \tag{4}$$

Подчеркнем, что равенство нулю реальной части $\langle\rho^\circ|\omega\rangle$ является следствием T-инвариантности теории.

2. Рассмотрим теперь следствия из условия унитарности, которое в применении к нестабильным частицам просто означает, что число "исчезнувших" частиц равно числу актов распада. Введем эрмитовскую матрицу

$$\hat\Gamma = i(\hat M - \hat M^+).$$

С учётом T-инвариантности все элементы этой матрицы в представлении состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ действительны. Согласно условию унитарности, матрица $\hat\Gamma$ выражается через амплитуды распада чистых изоспиновых состояний:

$$\Gamma_{tt'} = i(M_{tt'} - M^*_{t't}) = \sum_n a^*_{t\to n}a_{t'\to n} = \sum_n a_{t\to n}a'^*_{t\to n}. \tag{5}$$

Знак $\sum_n$ означает суммирование по всем возможным каналам распада, включая интегрирование по фазовому объему конечных частиц.

На основе уравнений

$$\hat M|\rho^\circ\rangle = (m_{\rho^\circ} - i\frac{\Gamma_{\rho^\circ}}{2})|\rho^\circ\rangle, \quad \hat M|\omega\rangle = (m_\omega - i\frac{\Gamma_\omega}{2})|\omega\rangle, \tag{6}$$

$$(t, t' = 0,1)$$

где m_{ρ° и m_ω – массы, а Γ_{ρ° и Γ_ω – ширины ρ° – и ω –мезонов, нетрудно получить выражение

$$\langle\rho^\circ|\omega\rangle = \frac{\langle\rho^\circ|\Gamma|\omega\rangle}{(\Gamma_{\rho^\circ}+\Gamma_\omega)/2 + i(m_\omega - m_{\rho^\circ})}.$$

С помощью (2) и (5) эта формула приводится к виду:

$$\langle\rho^\circ|\omega\rangle = \frac{\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n}A_{\omega\to n}}{(\Gamma_{\rho^\circ}+\Gamma_\omega)/2 + i(m_\omega - m_{\rho^\circ})}. \tag{7}$$

Здесь

$$A_{\rho^\circ\to n} = (1+|\epsilon|^2)^{-1/2}(a_{1\to n} - \epsilon a_{0\to n}),$$
$$A_{\omega\to n} = (1+|\epsilon|^2)^{-1/2}(a_{0\to n} + \epsilon a_{1\to n}) - \tag{8}$$

амплитуды распада резонансов ρ° и ω, удовлетворяющие равенствам $\sum_n |A_{\rho^\circ\to n}|^2 = \Gamma_{\rho^\circ}$, $\sum_n |A_{\omega\to n}|^2 = \Gamma_\omega$. Билинейные комбинации $A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n}$, входящие в числитель правой части (7), вместе с амплитудами рождения резонансов характеризуют вклад $\rho^\circ-\omega$ -интерференции в распределение эффективных масс системы частиц с квантовыми числами n.

Сравнивая (4) и (7), получаем окончательно:

$$|\mathrm{Im}\,\epsilon| = |\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n}|\,[(\Gamma_{\rho^\circ}+\Gamma_\omega)^2+4(m_\omega-m_{\rho^\circ})^2]^{-1/2}, \qquad (9)$$

$$\psi = \arg(\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n}) = \arg\{\pm[m_{\rho^\circ}-m_\omega+\frac{i}{2}(\Gamma_{\rho^\circ}+\Gamma_\omega)]\}. \qquad (10)$$

При этом $\mathrm{tg}\,\psi = -\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma_{\rho^\circ}+\Gamma_\omega}{m_\omega - m_{\rho^\circ}}$.

Заметим, что соотношение (7) совпадает с известным правилом сумм Белла-Штейнбергера, установленным первоначально для нейтральных K -мезонов [8]. По смыслу своего вывода формула Белла-Штейнбергера должна быть справедлива для любых нестабильных частиц с общими каналами распада [9,10]. При этом величина $\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n}$ обращается в нуль только при условии, что нестабильные частицы имеют разные внутренние квантовые числа, сохраняющиеся в процессах распада. В рассматриваемом случае у ρ° - и ω -мезонов одинаковые спины, чётности и проекции спина, так что правая часть (7) не равна нулю (см. также [6,11]).

3. Если предположить, что прямые переходы с изменением G четности подавлены и ими можно пренебречь (т.е. $|\Gamma_{10}| \ll 2|\mathrm{Re}M_{10}|$), то на основе соотношения Белла-Штейнбергера или просто с помощью формулы (3) легко получить оценку для фазы параметра смешивания [6]:

$$\arg\epsilon = \arg\{\pm[m_{\rho^\circ}-m_\omega+\frac{i}{2}(\Gamma_{\rho^\circ}-\Gamma_\omega)]\}.$$

В данной работе мы не будем пользоваться этим предположением, которое вряд ли можно строго обосновать [7], и рассмотрим, какие утверждения можно сделать, опираясь на общие требования унитарности и T -инвариантности и экспериментальные данные о парциальных ширинах и массах ρ° - и ω -резонансов. Для этого оценим относительный вклад различных каналов распада в сумму $\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n}$. Если ввести парциальные ширины распада, мы можем написать:

$$\sum_n A^*_{\rho^\circ\to n} A_{\omega\to n} = (\Gamma_{\rho^\circ\to\pi^+\pi^-}\,\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-})^{\frac{1}{2}} \times \times\{e^{i\psi_{\pi^+\pi^-}} + \kappa_{\pi^\circ\gamma}\,e^{i\psi_{\pi^\circ\gamma}} + \kappa_{3\pi}\,e^{i\psi_{3\pi}} + \xi\}, \qquad (11)$$

где

$$\psi_{\pi^+\pi^-} = \arg\frac{A_{\omega\to\pi^+\pi^-}}{A_{\rho^\circ\to\pi^+\pi^-}}, \quad \kappa_{\pi^\circ\gamma} = \left(\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^\circ\gamma}\,\Gamma_{\rho^\circ\to\pi^\circ\gamma}}{\Gamma_{\rho^\circ\to\pi^+\pi^-}\,\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\psi_{\pi^\circ\gamma} = \arg\frac{A_{\omega\to\pi^\circ\gamma}}{A_{\rho^\circ\to\pi^\circ\gamma}},$$

параметры $\kappa_{3\pi}$ и $\psi_{3\pi}$ соответствуют процессам ρ°, $\omega\to\pi^+\pi^-\pi^\circ$, а комплексная величина ξ описывает вклад других распадов. Заметим, что отношение амплитуд трехпионного распада ρ° - и ω -мезонов, вообще говоря, может зависеть от конфигурации конечных π -мезонов; в любом случае

$$\kappa_{3\pi} < \left(\frac{\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-\pi^\circ} \quad \Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-\pi^\circ}}{\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-} \quad \Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно экспериментальным данным [12], $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-} \approx \Gamma_{\rho^\circ} = (150,4 \pm 2,9)$ МэВ, $\Gamma_\omega = (10 \pm 0,04)$ МэВ, $m_\omega - m_{\rho^\circ} = (12,7 \pm 1,2)$ МэВ, $\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-} = (0,013 \pm 0,003)\,\Gamma_\omega$,

$\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-\pi^\circ} = (0,9 \pm 0,006)\,\Gamma_\omega$, $\Gamma_{\omega \to \pi^\circ\gamma} = (0,087 \pm 0,005)\,\Gamma_\omega$. Недавно методом Примакова была определена парциальная ширина распада $\rho^- \to \pi^-\gamma$ [13]; оказалось, что $\Gamma_{\rho^- \to \pi^-\gamma} = (35 \pm 10)$ кэВ [13]. Как известно, в низшем порядке по константе $\alpha = 1/137$ справедливо равенство $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^\circ\gamma} = \Gamma_{\rho^- \to \pi^-\gamma}$ [14]. С учётом этого $\kappa_{\pi^\circ\gamma} \approx \approx 4 \cdot 10^{-2}$ *. Парциальная ширина $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-\pi^\circ}$ в настоящее время неизвестна, но разумно считать, что поскольку распад $\rho^\circ \to \pi^+\pi^-\pi^\circ$, так же как и распад $\omega \to \pi^+\pi^-$, запрещен по G-чётности, то $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-\pi^\circ} \sim \Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-\pi^\circ} \dfrac{\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-}}{\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^+\pi^-}}$. Это приводит к оценке $\kappa_{3\pi} < 1/10$. Что касается остальных каналов распада (4π, $2\pi\gamma$, $3\pi\gamma$, $\eta\gamma$, e^+e^-, $\mu^+\mu^-$), то экспериментальные данные вместе с теоретическими оценками показывают, что их вклад в (11) пренебрежимо мал ($|\xi| < 10^{-2}$). Таким образом, доминирующую роль в сумме (11) играет двухпионный распад, и в пределах точности порядка 10% справедливо соотношение

---

*Результат эксперимента [13] не согласуется с теоретическим значением $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^\circ\gamma} \sim 0,1\,\Gamma_{\omega \to \pi^\circ\gamma} \approx 100$ кэВ, которое следует из кварковых моделей (см., напр., [15]). Если принять $\Gamma_{\rho^\circ \to \pi^\circ\gamma}$ равным 100 кэВ, то для параметра $\kappa_{\pi^\circ\gamma}$ мы получим значение $\sim 7 \cdot 10^{-2}$.

$$\langle \rho^\circ | \omega \rangle \approx 2i\,\mathrm{Im}\,\epsilon \approx \frac{\sqrt{\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-} \Gamma_{\rho^\circ}}\, e^{i\psi_{\pi^+\pi^-}}}{(\Gamma_{\rho^\circ} + \Gamma_\omega)/2 + i(m_\omega - m_{\rho^\circ})}. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что

$$|\langle \rho^\circ | \omega \rangle| \approx \left(\frac{4\Gamma_{\rho^\circ}\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-}}{(\Gamma_{\rho^\circ} + \Gamma_\omega)^2 + 4(m_\omega - m_{\rho^\circ})^2} \right)^{1/2}, \qquad (13)$$

$$\psi_{\pi^+\pi^-} \approx \psi = \arg\{ \pm [m_{\rho^\circ} - m_\omega + \frac{i}{2}(\Gamma_{\rho^\circ} + \Gamma_\omega)]\}. \qquad (14)$$

Подставляя в (13) и (14) значения $\Gamma_{\rho^\circ} = 150$ МэВ, $\Gamma_\omega = 10$ МэВ, $\Gamma_{\omega \to \pi^+\pi^-} = 0,13$ МэВ, $m_\omega - m_{\rho^\circ} = 13$ МэВ, получаем:

$$|\langle \rho^\circ | \omega \rangle| \simeq 2\,|\mathrm{Im}\,\epsilon| = 0,054;$$

$$\mathrm{tg}\,\psi_{\pi^+\pi^-} \approx -\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma_\omega + \Gamma_{\rho^\circ}}{m_\omega - m_{\rho^\circ}} \approx -6,15; \qquad (15)$$

$$\psi_{\pi^+\pi^-} = \begin{cases} +99^\circ \\ -81^\circ \end{cases}.$$

4. Мы приходим к следующим выводам:

а) Фаза параметра двухпионной $\rho^\circ-\omega$ -интерференции

$$\eta_{\pi^+\pi^-} = \frac{A_{\omega\to\pi^+\pi^-}}{A_{\rho^\circ\to\pi^+\pi^-}}$$

близка к $\frac{\pi}{2}$ (или $-\frac{\pi}{2}$), причём $\mathrm{tg}\,\psi_{\pi^+\pi^-} < 0$*

б) Мнимая часть параметра смешивания составляет около 0,03 или (-0,03); с точностью до членов порядка

---

*В области $\rho^\circ-\omega$ -интерференции распределение эффективных масс $(\pi^+\pi^-)$-системы имеет вид:

$$dW(m) \sim dm\,\Big\{ \frac{1}{(m_{\rho^\circ}-m)^2+\Gamma_{\rho^\circ}^2/4} + \frac{D\,|\eta_{\pi^+\pi^-}|^2}{(m_\omega-m)^2+\Gamma_\omega^2/4} + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{B\,\eta_{\pi^+\pi^-}}{(m_{\rho^\circ}-m+\frac{i}{2}\Gamma_{\rho^\circ})(m_\omega-m-i\frac{\Gamma_\omega}{2})} \Big\}.$$

Если не фиксировать углов вылета π -мезонов, то

$$D = \sum_\lambda \sum_{\{\beta\}} |g_{\omega_\lambda}^{\{\beta\}}|^2 \Big/ \sum_\lambda \sum_{\{\beta\}} |g_{\rho^\circ_\lambda}^{\{\beta\}}|^2,$$

$$B = \sum_\lambda \sum_{\{\beta\}} g_{\omega_\lambda}^{\{\beta\}} g_{\rho^\circ_\lambda}^{*\{\beta\}} \Big/ \sum_\lambda \sum_{\{\beta\}} |g_{\rho^\circ_\lambda}^{\{\beta\}}|^2 \quad (|B| \le \sqrt{D}).$$

Здесь $g_{\omega_\lambda}^{\{\beta\}}$ и $g_{\rho^\circ_\lambda}^{\{\beta\}}$ - амплитуды рождения ω - и ρ° -мезонов со спиральностью λ, $\{\beta\}$ - совокупность кинематических параметров и квантовых чисел других частиц, по которым проводится усреднение. Амплитуды g_ω и g_{ρ° связаны с амплитудами перехода в состояния $|0>$ и $|1>$ соотношениями

$$g_\omega = g_0 + \epsilon g_1, \quad g_{\rho^\circ} = g_1 - \epsilon g_0.$$

$\Gamma_\omega/\Gamma_{\rho^\circ} \approx \frac{1}{15}$, $\left(\frac{2(m_\omega - m_{\rho^\circ})}{\Gamma_{\rho^\circ}}\right)^2 \approx \frac{1}{35}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Im}\,\epsilon \approx \mathrm{Im}\,\eta_{\pi^+\pi^-} \approx \left(\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{\rho^\circ}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (16)$$

Заметим, что без потери общности (не нарушая симметричности массовой матрицы) мы всегда можем выбрать фазы состояний $|0>$ и $|1>$ так, чтобы знак $\mathrm{Im}\,\epsilon$ был положительным. При таком соглашении перед квадратными скобками в формулах (10) и (14) следует оставить знак "плюс", и тем самым фазы ψ и $\psi_{\pi^+\pi^-}$ определяются однозначно: $\psi_{\pi^+\pi^-} \approx \psi \approx 99°$.

Еще раз подчеркнем, что полученные результаты вытекают только из правила сумм Белла-Штейнбергера, требования T -инвариантности теории и данных о резонансных параметрах ρ° - и ω -мезонов. Они согласуются с предположением о малости амплитуды прямого перехода $0 \to \pi^+\pi^-$ с изменением G -чётности, в рамках которого $|a_{0\to\pi^+\pi^-}/a_{1\to\pi^+\pi^-}| \ll |\eta_{\pi^+\pi^-}|$, и, следовательно [2,4,5],

$$\eta_{\pi^+\pi^-} = \left(\epsilon + \frac{a_{0\to\pi^+\pi^-}}{a_{1\to\pi^+\pi^-}}\right) \Big/ \left(1 - \epsilon\,\frac{a_{0\to\pi^+\pi^-}}{a_{1\to\pi^+\pi^-}}\right) \approx \epsilon.$$

Однако на основе пунктов а) и б) все же нельзя исключить возможность другой ситуации: когда вклад амплитуды $a_{0\to\pi^+\pi^-}$ является существенным. Мы можем лишь утверждать, что

$$| \mathrm{Im} \frac{a_{0\to\pi^+\pi^-}}{a_{1\to\pi^+\pi^-}} | \ll \left(\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{\rho^\circ}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$| \mathrm{Re}\, \epsilon + \mathrm{Re} \frac{a_{0\to\pi^+\pi^-}}{a_{1\to\pi^+\pi^-}} | \ll \left(\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-}}{\Gamma_{\rho^\circ}} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Оценки для фазы $\psi_{\pi^+\pi^-}$ были также получены другим методом в работе /3/ ; формула (14) отличается от соответствующего выражения в /3/ членами порядка $\Gamma_\omega/\Gamma_{\rho^\circ}$. Анализ экспериментов по изучению $\rho^\circ - \omega$ - интерференции в процессе $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ показывает, что $\psi_{\pi^+\pi^-} = (95\pm15)^\circ - \psi_{e^+e^-}$, где $\psi_{e^+e^-} = \arg \frac{A_{\omega\to e^+e^-}}{A_{\rho^\circ\to e^+e^-}}$ /5/. Это значение в пределах ошибок согласуется с (14), если считать, что в соответствии с моделью векторной доминантности фаза $\psi_{e^+e^-}$ близка к нулю.

Автор выражает глубокую благодарность Б.Н.Валуеву и М.И.Подгорецкому за интерес к работе и полезные замечания.

Литература

1. J.Harte and R.G.Sachs. Phys.Rev., 135, 459 (1964).
2. A.S.Goldhaber, G.C.Fox and C.Quigg.Phys. Lett., 30B, 249 (1969).
3. M.Gourdin, L.Stodolsky and F.M.Renard. Phys.Lett., 30B, 347 (1969).
4. D.Horn. Phys.Rev., D1, 1421 (1970).
5. J.L.Lemke and R.G.Sachs. Phys.Rev., D5, 590 (1972).
6. T.T.Gien. Phys.Rev., D5, 1773 (1972).
7. A.Rabl and N.W.Reay. Phys.Lett., 47B,29 (1973).

8. J.S.Bell, J.Steinberger. Proc. of the Intern. Conf. on Elementary Particles, Oxford, 1965.
9. В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 57, 157 (1969).
10. В.Л.Любошиц. Сообщение ОИЯИ, P2-5328,Дубна,1970.
11. T.T.Gien.Canad.Jorn.Phys., 51, 1915(1973).
12. Review of Particle Properties. Phys.Lett., 50B, N 1, p.77-80 (1974).
13. B.Gobbi, J.L.Rosen, H.A.Scott, S.L.Shapiro, L.Strawezynski and C.M.Meltzer. Phys.Rev.Lett., 33, 1450 (1974).
14. G.Feinberg, A.Pais. Phys.Rev.Lett., 9, 45 (1962).
15. W.E.Thirring.Phys.Lett., 16, 335 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел 9 апреля 1975 года.