СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 8749

Н.В.Красников, К.Г.Четыркин

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧЕЛЛЕНА-ЛЕМАНА

1975

P2 - 8749

Н.В.Красников,* К.Г Четыркин*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧЕЛЛЕНА-ЛЕМАНА

---

* Московский государственный университет.

I. В работе [I] Н.Н.Боголюбова, В.С.Владимирова и А.Н.Тавхелидзе был развит метод исследования асимптотик причинных функций квантовой теории поля, основанный на использовании представления Йоста-Лемана-Дайсона. Этим методом была доказана непротиворечивость гипотезы автомодельности общим принципам локальной квантовой теории поля.

В настоящей работе методика, развитая в работе [I], применяется к изучению асимптотики пропагатора в области больших пространственно-подобных импульсов. Найдено необходимое и достаточное условие существования обобщенно степенной асимптотики пропагатора в терминах свойств спектральной функции в представлении Челлена-Лемана. Тем самым доказана непротиворечивость широкого класса асимптотик пропагатора таким общим принципам, как лоренц-инвариантность и спектральность. Доказано взаимно однозначное соответствие обобщенно степенной асимптотики пропагатора структуры особенности вакуумного среднего коммутатора поля вблизи светового конуса. Таким образом, гипотеза об определяющей роли особенности на световом конусе для асимптотического поведения функций Грина подтверждена для случая двухточечных функций.

[I] Московский государственный университет.

2. Для простоты мы будем рассматривать теорию с одним скалярным полем $\varphi(x)$. Пропагатор поля φ определяется выражением:

$$F^c(x) = i \langle 0 | T(\varphi(x), \varphi(0)) | 0 \rangle .$$

Предполагая, что представление Челлена-Лемана для фурье-образа $F(x)$ сходится без вычитаний, запишем:

$$\tilde{F}^c(p) = \int_0^\infty \frac{\rho(m^2)}{m^2 - p^2 - i\epsilon} dm^2 , \qquad /1/$$

где спектральная плотность $\rho(m^2)$ является неотрицательной мерой с носителем на положительной полуоси.

Из представления /1/ следует, что $\tilde{F}^c(p)$ есть аналитическая функция от p на всей комплексной плоскости p^2, за исключением разреза вдоль положительной полуоси. Введем обозначение:

$$G(\nu) = \tilde{F}^c(p) , \; p^2 = -\nu .$$

При $\nu > 0$, G есть монотонно убывающая функция, и мы будем интересоваться асимптотикой $G(\nu)$ при $\nu \to \infty$.

Эта асимптотика тесно связана с константой перенормировки поля $\varphi(x)$. В случае конечной перенормировки интеграл

$$\int_0^\infty \rho(m^2) dm^2 = Z_3^{-1}$$

сходится и асимптотика пропагатора есть $\frac{Z_3^{-1}}{\nu}$. Вакуумное среднее коммутатора поля $\varphi(x)$ вблизи светового конуса ведет себя как

$$F(x) = \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(0)] | 0 \rangle \underset{x^2 \to 0}{\sim} \frac{Z_3^{-1}}{2\pi i} \epsilon(x^0) \delta(x^2) .$$

Если интеграл $\int_0^\infty \rho(m^2) dm^2$ расходится, то константа Z_3^{-1} бесконечна и пропагатор убывает медленнее чем $1/\nu$. Интересно выяснить, какие бывают асимптотики пропагатора в случае бесконечной перенормировки и сохраняется ли при этом взаимно однозначное соответствие асимптотика пропагатора и особенности на световом конусе вакуумного среднего коммутатора, существующее для конечных перенормировок.

Прежде всего определим класс асимптотик, который мы будем рассматривать. Из теории возмущений мы знаем, что асимптотика пропагатора обычно бывает степенной с логарифмическими поправками. Поэтому мы будем рассматривать обобщенно-степенные асимптотики. Назовем функцию $\Psi(\nu)$ *обобщенно-степенной, если существует предел*

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\Psi(\alpha\nu)}{\Psi(\nu)}=K(\alpha) \qquad /2/$$

для всех $\alpha>0$, причем $K(\alpha)$ - непрерывная функция α. Функция $\Psi(\nu)$ представима в виде:

$$\Psi(\nu)=\nu^{\alpha}\varphi(\nu),$$

где $\varphi(\nu)$ - обобщенно-постоянная функция, т.е. удовлетворяющая условию /2/ с правой частью $K(\alpha)\equiv 1$. Класс обобщенно-однородных функций достаточно широк, в него входят все функции вида:

$$\Psi(\nu)=\nu^{\alpha}\ln^{\beta_1}(\nu)\ln^{\beta_2}\ln\nu \qquad /3/$$

Для рассматриваемого класса асимптотик /3/ удается доказать следующую важную теорему.

Теорема I. Для того, чтобы у пропагатора $G(\nu)$ была асимптотика $\nu^{\alpha}\varphi(\nu)$, необходимо и достаточно, чтобы первообразная первого порядка от $\rho(m^2)$ имела асимптотику $\qquad C(\alpha)\,\nu^{\alpha+1}\varphi(\nu)$

при $\nu\to\infty$.

Качественно эту теорему можно понять, записывая $G(\nu)$ в виде:

$$\frac{G(\nu)}{\nu}=\int_0^{\infty}\frac{\rho(m^2)}{1+\frac{m^2}{\nu}}\,dm^2 \qquad /4/$$

и считая, что множитель $\frac{1}{1+m^2/\nu}$ эффективно обрезает интеграл /4/ на верхнем пределе порядка ν.

С помощью теоремы 1 установим связь между асимптотикой пропагатора при $\nu\to\infty$ и сингулярностью на световом конусе вакуумного среднего коммутатора поля $\varphi(x)$. Для $F(x)$ справедливо представление Челлена-Лемана:

$$F(x) = \frac{1}{i}\int_0^\infty \mathcal{D}(x,m^2)\rho(m^2)\,dm^2, \qquad /5/$$

где $\mathcal{D}(x,m^2)$ есть перестановочная функция для свободного поля массы m:

$$\mathcal{D}(x,m^2) = \frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\theta(x^2)J_0\left(\sqrt{x^2m^2}\right)\right].$$

Лоренц-инвариантная нечетная обобщенная функция $F(x)$ может быть представлена в виде:

$$F(x) = \epsilon(x^0)\,\Phi(x^2),\quad \Phi(x^2)=0 \text{ при } x^2<0\ . \qquad /6/$$

Сравнивая /5/ и /6/, получаем явное соотношение:

$$\Phi(x^2) = \frac{1}{2\pi i}B[\rho](x^2), \qquad /7/$$

где B есть B-преобразование, введенное и исследованное в работе /2/. Из свойств B-преобразования, теоремы I и формулы /7/ вытекает наша основная теорема, доказанная в приложении 2.

Теорема 2. Следующие два утверждения эквивалентны:

а. пропагатор $G(\nu)$ имеет асимптотику $\nu^{\alpha}\varphi(\nu)$, $\alpha<0$;

б. вакуумное среднее коммутатора имеет на световом конусе главную особенность вида:

$$F(x)\underset{x^2\to 0}{\sim}\frac{\epsilon(x^0)\,4^{\alpha+1}}{2\pi i\,(\Gamma(-\alpha))^2}\frac{d}{dx^2}\left[\theta(x^2)(x^2)^{-\alpha-1}\varphi(1/x^2)\right].$$

Из теоремы 2 следует, что характерная для конечных перенормировок взаимно однозначная связь между асимптотикой пропагатора и особенностью вакуумного среднего коммутатора поля вблизи светового конуса сохраняется и в общем случае.

3. Пусть рассматриваемая теория инвариантна при преобразованиях вида:

$$x \to x' = \rho x, \quad \varphi(x) \to \varphi'(x') = \rho^{-d} \varphi(x),$$

где $d = 1+\gamma$ – размерность поля $\varphi(x)$ в единицах массы. В такой теории пропагатор определяется однозначно и равен

$$G(\nu) = \frac{c}{\nu} \left(\frac{\nu}{m^2}\right)^{\gamma}. \qquad /8/$$

Если предположить только приближенную масштабную инвариантность теории при больших импульсах, то можно утверждать, что асимптотика пропагатора будет иметь вид /8/. Из теоремы 2 следует, что тогда можно определить главную особенность на световом конусе вакуумного среднего коммутатора поля. Приведем некоторые примеры.

а. нормальная размерность поля $\gamma = 0$:

$$G(\nu) \underset{\nu \to \infty}{\sim} 1/\nu,$$

$$\Delta(x) \underset{x^2 \to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi i} \epsilon(x^0) \delta(x^2)$$

б. аномальная размерность поля $\gamma > 0$

$$G(\nu) \underset{\nu \to \infty}{\sim} \frac{1}{\nu} \left(\frac{\nu}{m^2}\right)^{\gamma}$$

$$\Delta(x) \underset{x^2 \to 0}{\sim} \frac{\epsilon(x^0)}{2\pi i} \frac{\gamma}{(\Gamma(1-\gamma))^2} \left[\theta(x^2)(x^2 m^2)^{-\gamma}\right]'.$$

в. пропагатор в теории с лагранжианом взаимодействия

$\mathcal{L}_I(x) = g\,\bar{\psi}\psi\varphi$, найденный во втором порядке теории возмущений.

$$G(\nu) \underset{\nu\to\infty}{\sim} \frac{1}{\nu}\left(1+ \frac{g^2}{8\pi^2}\ln\frac{\nu}{m^2}\right),$$

$$F(x) \underset{x^2\to 0}{\sim} \frac{\epsilon(x^0)}{2\pi i}\,\frac{d}{dx^2}\left[\Theta(x^2)\left(1+\frac{g^2}{8\pi^2}\ln\frac{1}{m^2x^2}\right)\right].$$

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А.Н.Тавхелидзе за постоянный интерес к работе и стимулирующие дискуссии, а также В.С.Владимирову и Б.И.Завьялову за ценные замечания и дополнения.

Приложение I.

Сходимость представления Челлена-Лемана без вычитаний означает, что сходится интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\rho(x)}{1+x}\,dx \; . \qquad /I.1/$$

Рассмотрим пространство T функций $f(x)$, непрерывных на полуоси $[0,\infty)$, для которых существует предел вида

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)f(x) = c$$

/ постоянная c может зависеть от функции $f(x)$/. С введением нормы

$$\|f\|_T = \sup_{x\in[0,\infty)} |(1+x)f(x)| \qquad /I.2/$$

T, оказывается полным нормированным пространством. Ясно, что

$$\rho_K(x) = \frac{\rho(Kx)}{K^\alpha\,\varphi(K)}$$

продолжается на T как линейный непрерывный положительный функционал. Справедливо следующее утверждение.

Лемма I. Для того, чтобы левая часть сходящегося без вычитаний представления Челлена-Лемана имела на бесконечности асимптотику $\nu^{\alpha}\varphi(\nu)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$\rho_K(x) = \frac{\rho(Kx)}{K^{\alpha}\varphi(K)} \qquad /I.3/$$

слабо сходилась в пространстве T'_+, сопряженному к T_+, к отличному от нуля пределу.

Доказательство. Достаточность вытекает из формулы

$$\frac{G(K)}{K^{\alpha}\varphi(K)} = \frac{1}{K^{\alpha}\varphi(K)}\int_0^{\infty}\frac{\rho(x)}{K+x}dx = \int_0^{\infty}\frac{\rho_K(x)}{1+x}dx \qquad /I.4/$$

и из того факта, что функция $\frac{1}{1+x}$ принадлежит T_+.

Докажем необходимость. Существует теорема Банаха-Штейнгауза /3/, утверждающая, что для слабой сходимости последовательности непрерывных функционалов $\rho_K(x)$ над полным нормированным пространством необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а. существование предела

$$\lim_{K\to\infty}(\rho_K, f) \qquad /I.5/$$

для всех основных функций f из некоторого множества, плотного в пространстве T

б. ограниченность последовательности норм функционалов.

$$|\rho_K|_T = \sup_{\varphi\in T,\ \|\varphi\|_T=1}|(\rho_K,\varphi)|$$

Далее вспомним, что предел вида /I.5/ существует для всех функций из пространства T, представляющихся в виде конечной линейной комбинации функций вида $\frac{1}{\alpha x + b}$,

/I.6/

где a и b – ... не положительные константы. Доказательство, что такие линейные комбинации образуют плотное в Т множество, дано ниже. Тем самым условие "а" выполняется.

Для проверки условия "б" заметим, что если $\|f\|_T = 1$, то $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x}$ при $x \in [0, \infty)$ и справедлива следующая цепочка неравенств, показывающая условие "б":

$$|(\rho_k, f)| \leq (\rho_k, |f|) \leq \left(\rho_k, \frac{1}{1+x}\right) < const. \qquad /I.7/$$

Последнее неравенство следует из того, что предел $\left(\rho_k, \frac{1}{1+x}\right)$ существует и равен I.

Докажем, что конечные линейные комбинации функций вида /I.6/ образуют множество, плотное в пространстве Т+. Для этого рассмотрим пространство С непрерывных на отрезке [0,1] функций $\bar{f}(z)$ с нормой

$$\|\bar{f}\|_c = \sup_{z \in [0,1]} |\bar{f}(z)|.$$

Заменой переменных устанавливаем изоморфизм между пространствами T_+ и С:

$$y = \frac{1}{z} - 1, \quad z = \frac{1}{1+y},$$

$$\varphi(y) \to \bar{\varphi}(z) = \frac{1}{z}\, \varphi\left(\frac{1}{z} - 1\right),$$

$$\bar{\varphi}(z) \to \varphi(y) = \frac{1}{y+1}\, \bar{\varphi}\left(\frac{1}{1+y}\right),$$

$$\|\varphi\|_T = \|\bar{\varphi}\|_c .$$

При этом изоморфизме функции вида /I.6/ переходят в функции вида

$$\frac{1}{z(\ell\, a)+a} \qquad /1.8/$$

В работе[4] показано, что линейные комбинации функций вида /1.8/ образуют плотное множество в пространстве C. В силу изоморфизма между пространствами T и C то же утверждение справедливо и для функций вида /1.6/ в пространстве T. Лемма I доказана.

Рассмотрим пространство S_+ основных функций $f(x)$ таких, что каждая f определена при $x \in (1,\infty)$, бесконечно дифференцируема на этом множестве и убывает вместе со всеми своими производными быстрее любой отрицательной степени x при $x \to \infty$. Будем говорить, что последовательность $\varphi_n \in S_+$ сходится к функции $\varphi \in S_+$, если стремятся к нулю все последовательности вида:

$$\sup_{x \in (1,\infty)} \left| (1+x^{\ell}) \left(\frac{d}{dx}\right)^{k} (\varphi_n(x) - \varphi(x)) \right|_{\ell,k}$$

где ℓ и k – произвольные неотрицательные целые числа. Пространство, сопряженное к пространству S_+, обозначим как S'_+. Легко видеть, что S'_+ состоит из всех функций $\varphi \in S'(R_1)$ с носителем на положительной полуоси.

Так как $S_+ \in T_+$, то сужение на S_+ любого функционала $\rho \in T'_+$ есть функционал из S'_+, который мы будем обозначать как ρ_S. Любую функцию $\rho \in T'_+$ можно однозначно представить в виде

$$\rho(x) = \rho_S(x) + a\,\delta_\infty(x), \qquad /1.9/$$

где $\delta_\infty(x)$ есть специальная обобщенная функция из T'_+, задаваемая формулой:

$$(\delta_\infty, \varphi) = \lim_{x \to \infty} (x+1)\,\varphi(x).$$

Пусть последовательность $\rho_n(x)$

сходится в пространстве T к предельной функции $\bar{\rho}(x)$. Покажем, что $\bar{\rho}(x)$ однозначно определяется показателем степени α / с точностью до постоянного коэффициента /. В самом деле, из соотношения

$$\frac{\rho(a\kappa x)}{\kappa^{\alpha}\,\varphi(\kappa)} = \frac{\varphi(a\kappa)(a\kappa)^{\alpha}}{\varphi(\kappa)\,\kappa^{\alpha}} \cdot \frac{\rho(a\kappa x)}{\varphi(a\kappa)\,(a\kappa)^{\alpha}} \qquad /I.10/$$

вытекает, что $\bar{\rho}(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\bar{\rho}(ax) = a^{\alpha}\rho(x), \quad a>0 \qquad /I.11/$$

Из /I.11/ следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_{S'}, \quad \alpha \neq 0, \\ \bar{\rho} &= a\cdot\delta_{\infty}, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \qquad /I.12/$$

Уравнение /I.11/ имеет в пространстве S'_{+} единственное решение, определяемое формулой: $\bar{\rho}(x) = \lambda\, f_{\alpha+1}(x)$, $\lambda \neq 0$,

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0, \\ \dfrac{d}{dx}(f_{\alpha}) = f_{\alpha-1}. \end{cases} \qquad /I.13/$$

Таким образом, последовательность $\rho_{\kappa}(x)$ / при $-1\leqslant\alpha<0$ / сходится как в пространстве T'_{+}, так и в пространстве S'_{+} к предельной функции, равной

$$\lambda\, f_{\alpha+1}(x) \not\equiv 0 \qquad /I.14/$$

Постоянная λ определяется из условия

$$\lim_{k\to\infty}\left(\rho_k, \frac{1}{1+x}\right) = \lambda\left(f_{\alpha+1}, \frac{1}{1+x}\right) = 1, \qquad /I.15/$$

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Для выяснения асимптотики первообразной

$$\rho^1(k) = \int_0^k \rho(x)\,dx, \qquad /I.16/$$

запишем /I.16/ в виде:

$$\frac{\rho^1(k)}{k^{\alpha+1}\varphi(k)} = \int_0^{+\infty} \rho_k(x)\,\theta(1-x)\,dx \qquad /I.17/$$

Так как функция $\theta(1-x)$ не принадлежит T_+, мы не можем непосредственно утверждать, что последовательность /I.17/ сходится к пределу, равному $(\bar{\rho}, \theta(1-x))$.

Однако справедливо следующее утверждение, которое мы заимствуем из работы/5/ в удобной для нас форме. Если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция, а $\rho_k(x)$ – последовательность положительных мер из S'_+, сходящаяся к предельной мере $\bar{\rho}(x)$, то последовательность интегралов (ρ_k, f) заведомо сходится к пределу равному $(\bar{\rho}, f(x))$ при условии, что функция $f(x)$ непрерывна в точках сингулярности предельной меры $\bar{\rho}(x)$. В рассматриваемом случае предельная мера может иметь сингулярность только в нуле, где функция $\theta(1-x)$ непрерывна. Следовательно, из /I.17/ вытекает, что

$$\rho^1(k) \underset{k\to\infty}{\sim} c\,k^{\alpha+1}\varphi(k), \quad c = \lambda\,\lambda_1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}. \qquad /I.18/$$

Пусть первообразная $\rho^1(k)$ имеет асимптотику $c\,k^{\alpha+1}\varphi(k)$, где

Докажем, что в этом случае последовательность

$$f_k(x) = \frac{f(kx)}{k^{\lambda}\psi(k)}$$

сходится в пространстве S'_+ к функции $\frac{C}{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x)$.

Для этого необходимо и достаточно показать сходимость последовательности $I(k) = (f_k, \varphi)$ к числу $\frac{C}{\lambda+1}(f_{\lambda+1}, \varphi)$ для любой функции $\varphi \in S_+$. Запишем

$$I(k) = -\frac{1}{k^{\lambda+1}\psi(k)} \int_0^{\infty} f^1(kx)\,\varphi'(x)\,dx = I_1(k,\epsilon) + I_2(k,\epsilon),$$

$$I_1(k,\epsilon) = -\frac{1}{k^{\lambda+1}\psi(k)} \int_0^{\epsilon} f^1(kx)\,\varphi'(x)\,dx, \qquad /I.19/$$

$$I_2(k,\epsilon) = -\frac{1}{k^{\lambda+1}\psi(k)} \int_{\epsilon}^{\infty} f^1(kx)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Из монотонности $f^1(kx)$ вытекает неравенство:

$$0 \leqslant f^1(kx) \leqslant C\,(k\epsilon)^{\lambda+1}\psi(k\epsilon)(1+\delta(k\epsilon)), \qquad /I.20/$$
$$0 \leqslant x \leqslant \epsilon$$

где $\delta(k\epsilon) \to 0$, $k\epsilon \to \infty$.

Подставляя эту оценку в выражение для $I_1(k,\epsilon)$, имеем:

$$0 \leqslant \left|\overline{\lim_{k\to\infty}}\, I_1(k,\epsilon)\right| + \left|\underline{\lim_{k\to\infty}}\, I_1(k,\epsilon)\right| \leqslant \mathrm{const}\,\epsilon^{\lambda+2}. \qquad /I.21/$$

Аналогичная оценка справедлива и для $I_2(k,\epsilon)$ при $x \geqslant \epsilon$:

$$C\,(kx)^{\lambda+1}\psi(kx)(1-\delta(k\epsilon)) \leqslant f^1(kx) \leqslant C\,(kx)^{\lambda+1}\psi(kx)(1+\delta(k\epsilon)). \qquad /I.22/$$

Пользуясь /I.22/ получаем, что:

$$\lim_{k\to\infty} I_2(k,\epsilon) = -C \cdot \int_{\epsilon}^{\infty} x^{\lambda+1}\varphi'(x)\,dx. \qquad /I.23/$$

Сопоставляя /1.21/ и /1.23/, имеем

$$\lim_{k \to \infty} I(k) = C/\lambda \, \left(f_{\alpha+1}, \frac{1}{1+x}\right) \qquad /1.24/$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства необходимости условия теоремы 1 достаточно доказать сходимость последовательности интегралов

$$I(k) = \left(\rho_k, \frac{1}{1+x}\right) = \int_0^{\infty} \rho_k(x) \frac{1}{1+x} \, dx \qquad /1.25/$$

к единице, если первообразная имеет асимптотику /1.18/. Введем функцию $R(x) \in C^{\infty}$ со свойствами:

$$R(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 1$$

$$R(x) = 1 \quad \text{при} \quad x > 2 \ .$$

Формулу /1.25/ можно переписать в виде:

$$I(k) = \left(\rho_k, \frac{R(x)}{1+x}\right) + \left(\rho_k, \frac{1-R(x)}{1+x}\right) = I_1(k) + I_2(k) \qquad /1.26/$$

Последовательность $I_2(k)$ сходится к числу $\lambda\left(f_{\alpha+1}, \frac{1-R}{1+x}\right)$, т.к. функция $\left(\frac{1-R(x)}{1+x}\right) \in S_{+}^{1}$.

Интегрируя первое слагаемое в сумме /1.26/, имеем

$$I_1(k) = \frac{-1}{k^{\alpha+1} \varphi(k)} \int_0^{\infty} \rho^{1}(kx) \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{1+x}\right) dx \qquad /1.27/$$

Заметим, что на всем пути интегрирования в /1.27/ для справедлива оценка /1.22/ с $\epsilon = 1$. Пользуясь этой оценкой, получаем:

$$\lim_{K\to\infty} I_1(K) = \lambda \int_0^\infty f_{\alpha+1} \frac{R(x)}{1+x} dx,$$

$$\lim_{K\to\infty} I_1(K)+I_2(K) = \lambda \int_0^\infty f_{\alpha+1} \frac{1}{1+x} dx;$$

поскольку $\lambda^{-1} = \int_0^\infty f_{\alpha+1} \frac{1}{1+x} dx$ постольку

$$\lim_{K\to\infty} I(K) = 1.$$

Теорема I доказана.

Приложение 2

Для доказательства теоремы 2 прежде всего сформулируем, что мы понимаем под особенностью вакуумного среднего коммутатора поля $\varphi(x)$ вблизи светового конуса. Мы говорим, что $F(x)$ имеет особенность типа

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \epsilon(x^0) \left(\frac{d}{dx^2}\right)^2 \left[\theta(x^2)(x^2)^{-\alpha-1} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],$$

при $x^2 \to 0$, если существует предел в смысле сходимости в пространстве S'_+ последовательности обобщенных функций

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\Phi(y/K)}{K^{(\alpha+n)+1}\varphi(K)} = f_{-n-\alpha}(y). \qquad /2.1/$$

Но функция $\Phi(y)$ связана со спектральной плотностью $\rho(x)$ формулой

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i} B[\rho](y) \qquad /2.2/$$

Как показано в работе[2], B-преобразование является непрерывным автоморфизмом пространства S'_+, причем справедлива формула

$$B[f_\alpha] = 4^\alpha f_{-\alpha} \qquad /2.3/$$

Прямо из определения В-преобразования устанавливаем тождество:

$$B[\rho(kx)](y) = \frac{1}{k^2} B[\rho](y/k) \qquad /2.4/$$

Из выражений /2.2/, /2.3/, /2.4/ непосредственно вытекает эквивалентность следующих двух утверждений:

а. последовательность функционалов $\rho_k(x)$ сходится к $\lambda f_{\alpha+1}(x)$ в пространстве S_+';

б. последовательность В-преобразований от ρ_k стремится к $4^{\alpha+1}\lambda f_{-\alpha-1}$ в пространстве S_+'.

Но в приложении I была установлена эквивалентность первого утверждения наличию у пропагатора асимптотики $V^\alpha \varphi(V)$ / при $\alpha < 0$ /. Таким образом доказана теорема.

Теорема 2. Следующие три утверждения эквивалентны:

а. пропагатор имеет асимптотику $V^\alpha \varphi(V)$, $\alpha < 0$;

б. последовательность функционалов

$$\rho_k(x) = \frac{\rho(kx)}{k^\alpha \varphi(k)}$$

сходится к $\lambda f_{\alpha+1}(x)$, при $k \to \infty$, $\alpha < 0$;

в. вакуумное среднее коммутатора поля $\varphi(x)$ имеет вблизи светового конуса особенность вида

$$F(x) \underset{x^2 \sim 0}{\sim} \frac{\epsilon(x^0)}{2\pi i} \frac{4^{\alpha+1}}{(\Gamma(-\alpha))^2} \frac{d}{dx^2}\left[\theta(x^2)(x^2)^{-\alpha-1}\varphi(1/x^2)\right].$$

Литература:

1. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12, 3 /1972/.
Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12, 305 /1972/.
2. Б.И.Завьялов. ТМФ, 17, 178 /1973/.
3. В.С.Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных, Наука, Москва, 1964.
4. Р.Эдвардс. Функциональный анализ, Мир, Москва, 1969.
5. ...варц. Анализ, т. 1, Мир, Москва, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1975 г.