сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-875

Э.Капусцик, А.Хожеля

О ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ

Доклад на VIII Международном совещании
по проблемам квантовой теории поля
/Алушта, 1987 г./

1987

Целью настоящего сообщения является исследование некоторых особенностей волновых уравнений первого и второго порядков, инвариантных относительно расширенной группы Галилея, определенной как группа преобразований пятимерного пространства-времени с координатами $\vec{x}$, t и θ где $\vec{x}$ и t - обычные пространственно-временные координаты, а θ является параметром расширения группы Галилея. Исторически[1] параметр θ был введен в квантовой механике для устранения фазового фактора в законе группового умножения представлений группы Галилея. В классической физике параметр θ определяет единственность синхронизации часов в нерелятивистском варианте[2] радиолокационного метода Эйнштейна и одновременно играет роль первой релятивистской поправки к абсолютному времени t[3]. Это приводит к необходимости моделирования нерелятивистского пространства-времени в виде пятимерного многообразия, в котором галилеев принцип относительности записывается в виде следующего закона преобразования координат:

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a},$$

$$t \to t' = t + b, \qquad /1/$$

$$\theta \to \theta' = \theta + \vec{v}\cdot R\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}t + \omega ,$$

где $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, b, ω - параметры трансляции, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ - скорость относительного движения, R - матрица поворота осей координат двух систем отсчета.

Линейный дифференциальный оператор второго порядка, инвариантный относительно преобразований /1/, имеет общий вид

$$L_2(c^2) = c^{-2}(2\partial_t \partial_\theta - \Delta) - \partial_\theta^2, \qquad /2/$$

где c^2 - произвольная константа размерности квадрата скорости. Волновое уравнение свободной скалярной частицы с массой m и энергией покоя Ω вида

$$L_2\left(\frac{\Omega}{m}\right) \psi(t,\theta,\mathbf{x}) = -\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \psi(t,\theta,x), \qquad /3/$$

однако, не обеспечивает ни нерелятивистского соотношения между энергией и импульсом

$$E = \Omega + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \qquad /4/$$

ни существования тока вероятности, т.е. сохраняющегося тока с положительно определенной временной компонентой. Для получения соотношения /4/ необходимо к уравнению /3/ добавить второе волновое уравнение вида

$$L_2(\infty)\,\psi(t,\theta,\vec{x}) = +\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \psi(t,\theta,\vec{x}), \qquad /5/$$

из которого следует, что

$$\psi(t,\theta,\vec{x}) = \exp\left(\frac{im\theta}{\hbar}\right)\phi_+(t,\vec{x}) + \exp\left(-\frac{im\theta}{\hbar}\right)\phi_-(t,\vec{x}), \qquad /6/$$

где $\phi_\pm(t,\vec{x})$ удовлетворяют обычному уравнению Шредингера с положительной или отрицательной массой и энергией соответственно. Отсюда следует, что аналогично релятивистским волновым уравнениям галилеевы волновые уравнения /3/ и /5/ в совокупности описывают и частицы, и античастицы. Однако для общего решения /6/ нельзя получить сохраняющийся ток со знакоопределенной временной компонентой. Поэтому, так же, как и в релятивистском случае, необходимо рассмотреть волновые уравнения первого порядка.

Применяя метод Дирака [4] к оператору /2/, получаем два линейно независимых дифференциальных оператора первого порядка

$$L_{1\pm}(c) = c^{-1}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + c^{-2}(\gamma^0 \pm \gamma_5)\partial_t \mp \gamma_5\partial\theta. \qquad /7/$$

Поэтому галилеева частица со спином 1/2 описывается не одним, а двумя уравнениями Дирака:

$$L_{1\pm}\left(\frac{\Omega}{m}\right)\psi_\pm(t,\theta,\vec{x}) = \frac{im}{\hbar}\,\psi_\pm(t,\theta,\vec{x}). \qquad /8/$$

Необходимость одновременного учета обоих уравнений /8/ следует также из того, что в отдельности каждое уравнение не является инвариантным относительно дискретных преобразований типа P, C и T. Соответственно этому все физические величины, построенные из спинорных волновых функций, должны быть симметричны относительно замены ψ_+ на ψ_-. В частности, физический ток с точностью до нормировки имеет компоненты

$$j^t = \bar\psi_+(\gamma^0+\gamma_5)\psi_+ + \bar\psi_-(\gamma^0-\gamma_5)\psi_-,$$

$$j^\theta = -c^2\bar\psi_+\gamma_5\psi_+ + c^2\bar\psi_-\gamma_5\psi_-, \qquad /9/$$

$$j^k = c\bar\psi_+\gamma^k\psi_+ + c\bar\psi_-\gamma^k\psi_-$$

с явно положительной временной компонентой.

Так же, как и в скалярном случае, для получения из пары уравнений /8/ соотношения /4/ необходимо дополнить их еще одним дифференциальным уравнением типа /5/. Переход от /5/ к уравнению первого порядка типа

$$L_{1\pm}(\infty)\,\psi_\pm = \pm\frac{im}{\hbar}\,\psi_\pm \qquad /10/$$

нецелесообразен, так как это нарушает симметричное описание частиц и античастиц.

Максимальной группой симметрии галилеево-инвариантных волновых уравнений /3/ и /8/ является группа $O(4,1) \oplus T_5$, где $O(4,1)$ - группа де Ситтера и T_5 - абелева группа пятимерных трансляций. Группа $O(4,1) \oplus T_5$ в качестве подгрупп, кроме расширенной группы Галилея, содержит также группу Пуанкаре $O(3,1) \oplus T_4$ и четырехмерную группу Евклида $E(4)$. Поэтому все галилеевы волновые уравнения, на соответствующих классах решений [4], сводятся или к пуанкаре- или к евклидово-инвариантным волновым уравнениям. В терминах дифференциальных операторов выбор соответствующего класса решений, а тем самым выбор соответствующей физической группы относительности, можно осуществить, вводя, кроме L_2 или $L_{1\pm}$, еще один инвариантный дифференциальный оператор первого порядка, вид которого зависит от рассматриваемой группы относительности. Для галилеевой теории инвариантным является оператор ∂_θ, для пуанкаре-инвариантной теории - оператор $\partial_t - c^2\partial_\theta$, где c - скорость света, а для евклидовой теории - оператор ∂_t. При этом во всех случаях, за исключением галилеевой теории, рассматриваются только собственные функции этих операторов, принадлежащие нулевым собственным значениям.

Единое описание всех случаев можно получить с помощью оператора

$$L(\alpha) = \cos\alpha\,\partial_\theta - c^{-2}(\alpha)\sin\alpha\,\partial_t, \qquad /11/$$

в котором угол α определяет степень смешивания нерелятивистского времени t с первой релятивистской поправкой $\frac{1}{c^2}\theta$, причем галилееву теорию получаем для $\alpha = 0$ и $c(0) = \frac{\Omega}{m}$, теорию Пуанкаре - для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $c(\frac{\pi}{4}) = c$, а евклидову теорию - для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и произвольного $c(\frac{\pi}{2})$.

Общую теорию галилеевых волновых уравнений можем, таким образом, записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$L(\alpha)\psi = g(\psi;\phi;t,\theta,\vec{x};\alpha),$$

$$L_n\psi = g_n(\psi;\phi;t,\theta,\vec{x};\alpha), \quad n=1,2, \qquad /12/$$

где $L(\alpha)$ имеет вид /11/, L_n дано выражением /2/ или /7/, а правые стороны этих уравнений описывают действие внешних полей $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_N)$ на изучаемый волновой процесс. Для свободных теорий интересны только уравнения типа

$$L(\alpha)\psi = i\ell(\alpha)\psi,$$
$$L_n\psi = i^n\ell_n(\alpha)\psi, \qquad /13/$$

где

$$\ell(0) = \pm\frac{m}{\hbar}, \quad \ell\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ell\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\ell_2(0) = \ell_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ell_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \qquad /14/$$

и

$$\ell_1(\alpha) = \sqrt{\ell_2(\alpha)}\,.$$

Физическое содержание теории легко видеть в новых временных переменных

$$\tau = N(\alpha)(t\cos\alpha + c^{-2}(\alpha)\theta\sin\alpha),$$
$$T = N^{-1}(\alpha)(-t\sin\alpha + c^{-2}(\alpha)\theta\cos\alpha) \qquad /15/$$

с нормировочным множителем $N(\alpha)$, таким, что

$$N(0) = N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,. \qquad /16/$$

В этих переменных первое уравнение /13/ имеет вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} = iN(\alpha)\ell(\alpha)c^2(\alpha)\psi, \qquad /17/$$

из которого следует, что

$$\psi(\tau,T,\vec{x}) = \exp(iN(\alpha)\ell(\alpha)c^2(\alpha)T)\phi(\tau,\vec{x})\,. \qquad /18/$$

В случае скалярной частицы функция $\phi(\tau,\vec{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{N^2(\alpha)}{c^2(\alpha)}\sin\alpha(2\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} + i(2\cos2\alpha-\sin2\alpha)N(\alpha)\ell(\alpha)\frac{\partial\phi}{\partial\tau} -$$
$$-\Delta\phi = -[c^2(\alpha)\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)\ell^2(\alpha)+\ell_2(\alpha)]\phi, \qquad /19/$$

а в случае спинорной частицы спиноры $\phi_\pm(\tau,\vec{x})$ удовлетворяют уравнениям

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\phi_\pm + \frac{N(\alpha)}{c(\alpha)}[\gamma^0\cos\alpha \pm \gamma_5(\cos\alpha-\sin\alpha)]\frac{\partial\phi_\pm}{\partial\tau} =$$
$$= i\{\ell(\alpha)c(\alpha)[\gamma^0\sin\alpha \pm \gamma_5(\sin\alpha+\cos\alpha)] + \ell_1(\alpha)\}\phi_\pm. \qquad /20/$$

Уравнения /19/ и /20/ приводят к следующему соотношению между энергией и импульсом:

$$-E\hbar(2\cos2\alpha-\sin\alpha)N(\alpha)\ell(\alpha) + \frac{N^2(\alpha)}{c^2(\alpha)}E^2\sin\alpha(\sin\alpha-2\cos\alpha) +$$
$$+\vec{p}^2 + \hbar^2c^2(\alpha)\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)\ell^2(\alpha) + \hbar^2\ell_2(\alpha) = 0, \qquad /21/$$

из которого видно, что нерелятивистская формула /4/ получается не только для первоначального значения угла $\alpha = 0$, но и для угла α_0, определенного условием

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 2, \qquad /22/$$

причем нормировочный множитель $N(\alpha_0)$ и собственное значение $\ell(\alpha_0)$ удовлетворяют условию

$$N(\alpha_0)\ell(\alpha_0) = -\ell(0)\,. \qquad /23/$$

Этот неожиданный результат требует дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levy-Leblond J.M. In: Group Theory and Its Application, ed. T.M.Loebl, Academic Press, N.Y., 1972, vol.2.
2. Kapuscik E. - Acta Phys.Pol., 1986, B17, p.569.
3. Kapuscik E. - Acta Phys.Pol., 1981, B12, p.81.
4. Kapuscik E. - Acta Phys.Pol., 1985, B16, p.937.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1987 года.

Капусцик Э., Хожеля А. P2-87-875
О волновых уравнениях, инвариантных относительно расширенной группы Галилея

Рассматриваются общие свойства волновых уравнений первого и второго порядков, инвариантных относительно расширенной группы Галилея. Определяется непрерывный путь перехода от этих уравнений к релятивистским волновым уравнениям.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Kapuścik E., Horzela A. P2-87-875
About Wave Functions Invariant with Respect to the Extended Galillean Group

We consider the general properties of the first and second order wave equations invariant with respect to the extended Galillean group. The continuous transition between these equations and the relativistic ones is defined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987