объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-868

В.К.Мельников

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА - ДЕ ВРИСА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1987

В настоящей работе получены точные решения системы уравнений [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u\varphi = E\varphi, \tag{I}$$

где $\varkappa$ и E – вещественные параметры, причем $\varkappa^2 = 1$, а $E > 0$. Уравнения (I) вместе с равенствами

$$v = u(x,t), \quad \psi = \varphi(x,t)\exp(-iEy) \tag{2}$$

определяют инвариантное многообразие нелинейной эволюционной системы [2]

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3v^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8\varkappa|\psi|^2\right)\right] = 0,$$
$$i\frac{\partial \psi}{\partial y} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{3}$$

Легко видеть, что уравнения (I) и равенства (2) определяют инвариантное многообразие системы (3) и в том случае, когда E является произвольной вещественной функцией времени t. Однако в данной работе будет рассмотрен только случай, когда E от t не зависит.

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что система (I) обладает решением типа бегущей волны

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma t)+\delta]}, \quad \varphi = c\,\frac{\exp(i\omega t)}{ch[\mu(x+2\sigma t)+\delta]}, \tag{4}$$

где вещественные параметры μ, σ и комплексная величина c удовлетворяют соотношениям

$$\mu^2 = E, \quad 2\varkappa|c|^2 + (\sigma + 2\mu^2)\mu^2 = 0, \tag{5}$$

а параметры δ и ω принимают произвольные вещественные значения. Таким образом, определенные посредством (4), (5) волны при $\varkappa = 1$ распространяются вдоль оси x только в одном направлении, именно слева направо, однако при $\varkappa = -1$ эти волны могут распространяться в обоих направлениях.

Приводимые ниже решения системы (I) описывают эволюцию одной волны вида (4) в другую волну этого же вида, но с другим набором параметров σ, ω и c. При этом начальная и конечная волны распространяются в одном и том же направлении, если $\varkappa = 1$. Однако если $\varkappa = -1$, то начальная волна и конечная волна могут распространяться в прямо противоположных направлениях. Таким образом, в этом случае получаемые здесь решения описывают отражение волны (4). Ранее это явление уже наблюдалось в ряде других нелинейных эволюционных систем, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния [3,4].

Для получения названных выше решений системы (I) воспользуемся результатами работы [5], в которой найдено многосолитонное решение системы (3). Выбрав специальным образом параметры многосолитонного решения системы (3), мы получим искомые решения системы (I). Делается это следующим образом.

Возьмем вектор-столбец ζ с N компонентами ζ_m вида

$$\zeta_m = a_m \exp[\mu x - i\mu^2 y - 4(\mu^3 + \bar\rho_m^3)t], \tag{6}$$

где μ – вещественный параметр, а величины $a_m \neq 0$ и ρ_m могут принимать комплексные значения. Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Пусть, далее, P и Q – квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$P_{m,n} = \frac{1}{2\mu}\zeta_m\bar\zeta_n, \quad Q_{m,n} = \frac{\varkappa}{\rho_m^3 + \bar\rho_n^3}. \tag{7}$$

Положим

$$D = \det\begin{vmatrix} 1 & -Q \\ P & 1 \end{vmatrix}, \quad \Psi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde e \\ 0 & 1 & -Q \\ \zeta & P & 1 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

где 1 – единичная матрица порядка N, а e – вектор-столбец с N компонентами e_m, равными единице. Здесь и всюду в дальнейшем знак "$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Согласно результатам работы [5] функции

$$v = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D\,, \quad \psi = \frac{\Psi}{D} \tag{9}$$

удовлетворяют системе (3), т.е. являются ее решением. С другой стороны, из равенств (6), (7) следует, что элементы матриц P, Q не зависят от y, а компоненты ζ_m вектора ζ допускают представление

$$\zeta_m = \lambda_m \exp(-i\mu^2 y), \tag{10}$$

где компоненты λ_m вектора λ от y не зависят. В соответствии с (8) и (10) получаем

$$\frac{\partial D}{\partial y} \equiv 0\,, \quad \Psi = \Phi\exp(-i\mu^2 y), \tag{11}$$

где

$$\Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde e \\ 0 & 1 & -Q \\ \lambda & P & 1 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

и, следовательно, Φ от y не зависит. На основании (9), (11) пара функций

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D\,, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \tag{13}$$

удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\varkappa|\varphi|^2 = C, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + u\varphi = \mu^2\varphi, \tag{14}$$

где величина C от x не зависит. Из равенств (6), (10) следует, что при любом фиксированном t и $x \to \infty$ имеем $\lambda_m \to 0$, если $\mu < 0$, а если $\mu > 0$, то $\lambda_m \to 0$ при любом фиксированном t и $x \to -\infty$. Далее, с помощью (7), (8) и (10)-(13) убеждаемся, что $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при $x \to \infty$, если $\mu < 0$, а если $\mu > 0$, то имеем $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при $x \to -\infty$. На этом основании константу C в правой части первого из равенств (14) нужно положить равной нулю, т.е. функции u, φ вида (13) удовлетворяют системе (1) при $E = \mu^2$.

Выясним теперь, каково поведение этого решения системы (1). С этой целью убедимся прежде всего в справедливости равенств

$$D = 1 + \frac{1}{2\mu}\sum_{m,n=1}^{N} Q_{m,n}\bar\lambda_m\lambda_n\,, \quad \Phi = -\sum_{m=1}^{N}\lambda_m. \tag{15}$$

Действительно, в силу (8), (12) имеем

$$D = \det(1+PQ)\,, \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde e \\ \lambda & 1+PQ \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Возьмем матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$. С учетом (7), (10) имеем

$$\Lambda e = \lambda\,, \quad \Lambda^{-1}P\bar\Lambda^{-1} = \frac{1}{2\mu}U\,, \quad \bar\Lambda Q\Lambda = 2\mu R,$$

где U и R – квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$U_{m,n} = 1\,, \quad R_{m,n} = \frac{\varkappa\bar\lambda_m\lambda_n}{2(\rho_m^3 + \bar\rho_n^3)\mu}. \tag{17}$$

Отсюда согласно (16) вытекают равенства

$$D = \det(1+UR)\,, \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde\lambda \\ e & 1+UR \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Возьмем теперь ортогональную матрицу H порядка N с элементами $H_{m,n}$, такую, что $H_{1,n} = N^{-1/2}$, $n = 1,\ldots,N$. Очевидно, что остальные элементы этой матрицы удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{N} H_{m,n} = 0\,, \quad m > 1.$$

На этом основании получаем равенства

$$V = HU\tilde H = \mathrm{diag}(N,0,\ldots,0)\,, \quad He = N^{1/2}e_1\,, \quad H\lambda = h, \tag{19}$$

где e_1 – вектор-столбец с компонентами $1, 0, \ldots, 0$, а h – вектор-столбец с компонентами $h_1,\ldots,h_N$, причем

$$h_1 = N^{-1/2}\sum_{m=1}^{N}\lambda_m. \tag{20}$$

Возьмем, далее, матрицу $S = HR\tilde H$. Нетрудно видеть, что элемент $S_{1,1}$ этой матрицы, стоящий в левом верхнем углу, имеет вид

$$S_{1,1} = \frac{1}{N}\sum_{m,n=1}^{N} R_{m,n}. \tag{21}$$

В соответствии с (18) имеем

$$D = \det(1+VS); \quad \Phi = \det\begin{vmatrix} 0 & \tilde{h} \\ N^{1/2} e_1 & 1+VS \end{vmatrix},$$

т.е. согласно (I9) справедливы равенства

$$D = 1 + N S_{1,1}, \quad \Phi = -N^{1/2} h_1 .$$

Отсюда в силу (7), (I7), (20) и (2I) следует справедливость (I5).

Положим теперь

$$\rho_m^3 = -\mu^3 - \frac{\mu}{2}\sigma_m + \frac{i}{4}\omega_m, \quad m = 1, \dots, N, \qquad (22)$$

где σ_m и ω_m – вещественные параметры, и предположим, что выполнено условие

$$(\sigma_m + 2\mu^2)\varkappa < 0, \quad m = 1, \dots, N. \qquad (23)$$

Предположим, далее, что все величины $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ разные, а их нумерация такова, что при любых $m, n = 1, \dots, N$ справедливо неравенство

$$(\sigma_m - \sigma_n)\mu < 0, \text{ если } m < n. \qquad (24)$$

С учетом (7) отсюда следует, что эрмитова матрица μQ положительно определена. Это значит, что квадратичная форма

$$K = \mu \lambda^* Q \lambda \qquad (25)$$

принимает положительные значения при любом выборе $\lambda \neq 0$. Здесь и всюду в дальнейшем звездочка означает эрмитово сопряжение, т.е. транспонирование и комплексное сопряжение, выполняемые одновременно. Таким образом, с помощью (I5) получаем, что при любых вещественных значениях x, t справедливо неравенство $D \geq 1$. Следовательно, условие (23) гарантирует отсутствие особенностей у нашего решения при любых вещественных значениях x, t. Наконец, возьмем вектор-столбец η с N компонентами $\eta_m = a_m \exp[-4(\mu^3 + \bar{\rho}_m^3)t]$.
Согласно (6), (I0) и (25) справедливы равенства

$$K = L \exp(2\mu x), \quad \Phi = M \exp(\mu x),$$

где в силу равенств

$$L = \mu \eta^* Q \eta, \quad M = -\sum_{m=1}^{N} \eta_m$$

величины L и M не зависят от x, причем $L > 0$ при любом

$\eta \neq 0$. С учетом (I3) и (I5) отсюда следует, что при любом фиксированном t и $x \to \pm\infty$ имеем $u \to 0$, $\varphi \to 0$, т.е. найденное нами решение системы (I) является уединенной волной.

Посмотрим теперь, какова динамика этой уединенной волны. Возьмем для этого произвольное $\sigma \in (-\infty, \infty)$ и положим $z = x + 2\sigma t$. В соответствии с (6),(I0) и (22) выражение для компонент λ_m вектора λ примет вид

$$\lambda_m = a_m \exp(\mu z + i\omega_m t)\exp[2(\sigma_m - \sigma)\mu t]. \qquad (26)$$

На основе (24) отсюда следует, что если $(\sigma_1 - \sigma)\mu > 0$, то при любом фиксированном z и $t \to -\infty$ имеем $\lambda_m \to 0$, $m = 1, \dots, N$. Аналогичным образом убеждаемся, что если $(\sigma_N - \sigma)\mu < 0$, то при любом фиксированном z и $t \to \infty$ справедливо соотношение $\lambda_m \to 0$, $m = 1, \dots, N$. Таким образом, с помощью (I5) получаем, что $D \to 1$, $\Phi \to 0$ при любом фиксированном z и $t \to -\infty$, если $(\sigma_1 - \sigma)\mu > 0$; а если $(\sigma_N - \sigma)\mu < 0$, то соотношения $D \to 1$, $\Phi \to 0$ выполняются при любом фиксированном z и $t \to \infty$. Согласно (I3) отсюда следует, что $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при любом фиксированном z и $t \to -\infty$, если $(\sigma_1 - \sigma)\mu > 0$; а если $(\sigma_N - \sigma)\mu < 0$, то имеем $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при любом фиксированном z и $t \to \infty$. Это значит, что при $t \to -\infty$ в нашем решении нет бегущих волн с фазовой скоростью -2σ, такой, что $(\sigma_1 - \sigma)\mu > 0$, а при $t \to \infty$ в этом решении отсутствуют бегущие волны с фазовой скоростью -2σ, если $(\sigma_N - \sigma)\mu < 0$. Далее, с учетом (I5), (24) и (26) убеждаемся, что при любом фиксированном z справедливы пределы

$$\lim_{t \to -\infty}\{D \exp[4(\sigma - \sigma_1)\mu t]\} = -\frac{\varkappa |a_1|^2}{2(\sigma_1 + 2\mu^2)\mu^2}\exp(2\mu z),$$

$$\lim_{t \to -\infty}\{\Phi \exp[2(\sigma - \sigma_1)\mu t - i\omega_1 t]\} = -a_1 \exp(\mu z),$$

если $(\sigma_1 - \sigma)\mu < 0$, а если $(\sigma_N - \sigma)\mu > 0$, то при любом фиксированном z справедливы пределы

$$\lim_{t \to \infty}\{D \exp[4(\sigma - \sigma_N)\mu t]\} = -\frac{\varkappa |a_N|^2}{2(\sigma_N + 2\mu^2)\mu^2}\exp(2\mu z),$$

$$\lim_{t \to \infty}\{\Phi \exp[2(\sigma - \sigma_N)\mu t - i\omega_N t]\} = -a_N \exp(\mu z).$$

В силу (I3) отсюда следует, что $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при любом фиксированном z и $t \to -\infty$, если $(\sigma_1 - \sigma)\mu < 0$; а если $(\sigma_N - \sigma)\mu > 0$, то имеем $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при любом фиксированном z и $t \to \infty$. Это значит, что при $t \to -\infty$ в нашем решении нет бегущих волн с фазовой скоростью -2σ, такой, что $(\sigma_1 - \sigma)\mu < 0$, а при $t \to \infty$ в этом решении отсутствуют бегущие волны с фазовой скоростью -2σ, если $(\sigma_N - \sigma)\mu > 0$. Таким образом, мы видим, что при $t \to -\infty$ в нашем решении нет бегущих волн с фазовой скоростью -2σ, если $\sigma \neq \sigma_1$, а при $t \to \infty$ в этом решении отсутствуют бегущие волны с фазовой скоростью -2σ, если $\sigma \neq \sigma_N$.

С другой стороны, с помощью (I3) и (I5) нетрудно убедиться, что при $t \to -\infty$ в рассматриваемом нами решении присутствует бегущая волна вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\sigma_1 t) + \delta_1]}, \quad \varphi = c_1 \frac{\exp(i\omega_1 t)}{ch[\mu(x + 2\sigma_1 t) + \delta_1]}, \tag{27}$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{-\varkappa |a_1|^2}{2(\sigma_1 + 2\mu^2)\mu^2}\right], \quad c_1 = -\frac{1}{2} a_1 \exp(-\delta_1). \tag{28}$$

В соответствии с (28) величины μ, σ_1 и c_1 удовлетворяют соотношению (5), т.е.

$$2\varkappa |c_1|^2 + (\sigma_1 + 2\mu^2)\mu^2 = 0. \tag{29}$$

Далее, находим, что при $t \to \infty$ интересующее нас решение содержит вторую бегущую волну

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\sigma_N t) + \delta_N]}, \quad \varphi = c_N \frac{\exp(i\omega_N t)}{ch[\mu(x + 2\sigma_N t) + \delta_N]}, \tag{30}$$

где

$$\delta_N = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{-\varkappa |a_N|^2}{2(\sigma_N + 2\mu^2)\mu^2}\right], \quad c_N = -\frac{1}{2} a_N \exp(-\delta_N). \tag{31}$$

На основе (31) величины μ, σ_N и c_N также удовлетворяют соотношению (5), т.е.

$$2\varkappa |c_N|^2 + (\sigma_N + 2\mu^2)\mu^2 = 0. \tag{32}$$

Таким образом, найденное нами решение системы (I) действительно описывает эволюцию бегущей волны (27) в бегущую волну (30). Эволюция волны (27) в волну (30) сопровождается изменением фазовой скорости волны и квадрата амплитуды источника. При этом из соотношений (29) и (32) следует, что приращение $\sigma_N - \sigma_1$ фазовой скорости уединенной волны связано с приращением $|c_N|^2 - |c_1|^2$ квадрата амплитуды источника простым соотношением

$$2\varkappa(|c_N|^2 - |c_1|^2) + (\sigma_N - \sigma_1)\mu^2 = 0.$$

Положим теперь в нашем решении

$$a_1 = \varepsilon a, \quad \sigma_1 = -2\mu^2 - \frac{\varkappa |a|^2 \varepsilon^2}{2\mu^2}, \quad a \neq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. С помощью несложных вычислений убеждаемся, что при $t \to -\infty$ рассматриваемое нами решение имеет в качестве своей асимптотики солитон уравнения Кортевега-де Вриса [6]

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x - 4\mu^2 t)]}, \quad \varphi = 0, \tag{33}$$

а при $t \to \infty$ справедлива асимптотика (30). Таким образом, в этом случае полученное нами решение системы (I) описывает эволюцию солитона (33) в бегущую волну (30). Эволюция солитона (33) сопровождается появлением источника φ. При этом квадрат амплитуды $|c_N|^2$ источника φ связан с фазовой скоростью бегущей волны (30) соотношением (32).

Аналогичным образом, полагая в нашем решении

$$a_N = \varepsilon a, \quad \sigma_N = -2\mu^2 - \frac{\varkappa |a|^2 \varepsilon^2}{2\mu^2}, \quad a \neq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, легко находим, что при $t \to -\infty$ полученное нами решение имеет асимптотику (27), а при $t \to \infty$ справедлива асимптотика (33). Следовательно, в этом случае интересующее нас решение описывает эволюцию бегущей волны (27) в солитон (33). Эволюция бегущей волны (27) в солитон (33) сопровождается исчезновением источника φ. При этом квадрат амплитуды $|c_1|^2$ источника φ связан с фазовой скоростью бегущей волны (27) соотношением (29).

В заключение укажем на одно интересное применение полученных выше результатов. С этой целью рассмотрим систему уравнений [7]

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + 6v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 8\varkappa \frac{\partial}{\partial y}|\psi|^2 = 0,$$
$$i\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \tag{34}$$

играющую важную роль в ряде областей математической физики. Будем искать решение этой системы в виде

$$\upsilon = \varepsilon^2 u(\varepsilon y, \varepsilon^3\tau), \quad \psi = \varepsilon^{3/2}\varphi(\varepsilon y, \varepsilon^3\tau)\exp(-i\varepsilon^2 E\tau),$$

где $\varepsilon > 0$ и $E > 0$ – константы. Подставляя эти выражения в систему (34), получаем систему уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0, \qquad (35)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + u\varphi = E\varphi + i\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

где $x = \varepsilon y$, $t = \varepsilon^3\tau$. Нетрудно видеть, что система (I) получается из системы (35) при $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что найденные нами точные решения системы (I) могут быть использованы для получения приближенного решения системы (34).

Литература

1. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.-Physica D, 1986, v. 18D, N1, p. 455-463.
2. Mel'nikov V.K.-Lett.Math.Phys., 1983, v. 7, N2, p. 129-136.
3. Calogero F., Degasperis A.-Lett.Nuovo Cimento, 1976, v. 16, N14, p. 425-433.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-87-136, Дубна, ОИЯИ, 1987.
5. Mel'nikov V.K.-Commun.Math.Phys., 1987, v. 112, N4, p. 639-652.
6. Gardner C.S. et al.-Phys.Rev.Lett., 1967, v. 19, N19, p. 1095-1097.
7. Nishikawa K. et al.-Phys.Rev.Lett., 1974, v. 33, N3, p. 148-151.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 декабря 1987 года.

Мельников В.К. Р2-87-868

Точные решения уравнения Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником

Найдены точные решения уравнения Кортевега – де Вриса с источником, удовлетворяющим стационарному уравнению Шредингера. Каждое из этих решений описывает эволюцию начальной бегущей волны с одной фазовой скоростью в конечную бегущую волну с другой фазовой скоростью. Указаны условия, при которых фазовые скорости этих волн могут отличаться знаком. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы, физики твердого тела и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-87-868

Exact Solutions of the Korteweg – de Vries Equation with a Self-Consistent Source

Exact solutions are found for the Korteweg – de Vries equation with a source satisfying the stationary Schroedinger equation. Each solution describes the evolution of the initial moving wave with one phase velocity to the final wave with another phase velocity. The conditions are pointed out under which the phase velocities of these waves may differ in sign. The obtained results are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, solid state physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987