

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

1 7.13

P2-87-855

**Г.В.Ефимов, С.Н.Неделько**

**УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА - ШВИНГЕРА В КХД  
И ИНФРАКРАСНЫЕ АСИМПТОТИКИ  
ГЛЮОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА**

**1987**

## ВВЕДЕНИЕ

Существует довольно большое число работ<sup>/1-9/</sup>, в которых в качестве инструмента для изучения аналитической структуры точных низших функций Грина квантовой хромодинамики (КХД) -пропагаторов глюонов и кварков, в инфракрасной (ИК) области используются уравнения Дайсона - Швингера (УШ).

Вопрос об ИК - асимптотиках глюонного и кваркового пропагаторов естественно вытекает из ключевой проблемы физики сильных взаимодействий - проблемы конфайнмента. Существует два наиболее распространенных определения<sup>/10/</sup>:

1) под конфайнментом понимается убывание вильсоновской петли:

$$\langle Sp T exp \{ i g \oint_L dx_\mu A_\mu(x) \} \rangle \sim exp \{ -const. S \},$$

где  $S$  - площадь, охватываемая петлей  $L$ . С этим определением связан потенциальный подход, в котором пропагатор глюонного поля определяет линейно растущий потенциал между кварком и антикварком;

2) под конфайнментом понимается исчезновение простого полюса у функции Грина кварка в точке  $p^2 = m_q^2$  в результате взаимодействия с глюонным полем.

С первым определением связана широко распространенная точка зрения, что ИК-асимптотика пропагатора глюонного поля вида

$$D(k^2) \sim 1/(k^2)^2 \quad (1)$$

ведет к конфайнменту кварков.

В результате многочисленных усилий<sup>/1-9/</sup> удалось лишь показать, что как в аксиальной, так и в ковариантных калибровках (1) не противоречит УШ.

С другой стороны, в<sup>/3/</sup> сделано предположение об осуществлении ИК-поведения глюонного пропагатора вида:

$$D(k^2) = \frac{-k^2}{(k^2)^2 - 2a^2 k^2 + b^4} \quad (2)$$

и показано, что и такая функция также не противоречит УДШ.  $D(k^2)$  в (2) - функция, аналитическая в нуле.

Таким образом, УДШ допускают как сингулярное, так и аналитическое поведение пропагатора глюонного поля при  $k^2 \rightarrow 0$ . Формально это объясняется наличием существенного произвола в выборе вида трехглюонной вершины. Заметим, что в аксиальной калибровке он связан с поперечной частью вершины, в то время как в ковариантных калибровках из-за наличия духов и продольная часть тоже оказывается неопределенной. Максимум, что можно сделать, это выразить продольную часть, решая тождество Сладнова - Тейлора, через другие неизвестные функции, определяющие вершину дух-дух-глюон<sup>/II/</sup>. Возможно, что более глубокий ответ состоит в том, что УДШ непосредственно связаны с теорией возмущений (ТВ), а потому не могут быть эффективно использованы в случае, когда ТВ принципиально неприменима, в частности, при решении вопроса о структуре глюонного вакуума в режиме конфайнмента.

В работах<sup>/I2, I3/</sup> высказано достаточно обоснованное сомнение в правильности асимптотики (I) и, как следствие, предположение о неполном конфайнменте, а в<sup>/I0/</sup> показано, что если сингулярность пропагатора дается (I), то сформулированные два определения конфайнмента противоречивы. В<sup>/4/</sup> указывается, что пертурбативная КХД не может дать каких-либо указаний к решению проблемы конфайнмента, по крайней мере, по двум причинам: во-первых, ИК-структура КХД качественно не отличается от ИК-структуры КЭД, и, во-вторых, ТВ не может обеспечить необходимой для конфайнмента особенности по константе связи в  $S$ -матрице.

В настоящей работе покажем, что произвол в определении вершин глюон-глюон-глюон и дух-дух-глюон допускает решение системы УДШ для глюонного и духового пропагаторов в виде целых функций:

$$D(k^2) = b \exp\{k^2/\Lambda^2\}$$

$$\Delta(k^2) = a \exp\{k^2/\Lambda^2\}, \quad (3)$$

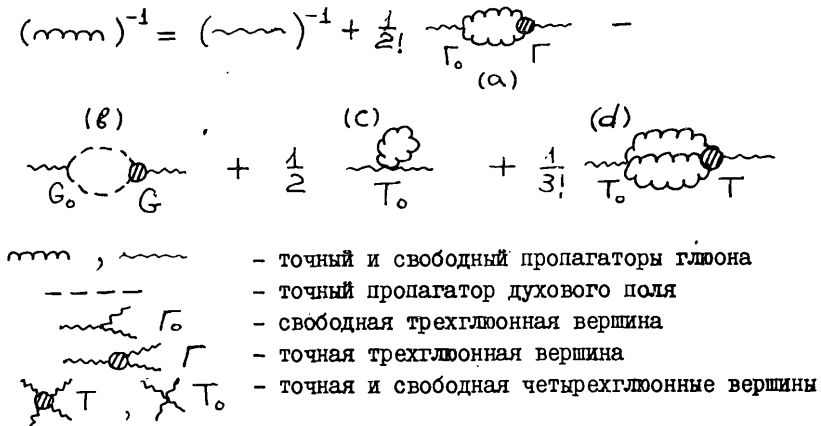
где  $b$ ,  $a$  и  $\Lambda$  - размерные константы, причем:  $b = b(\Lambda, g)$ ,  $a = a(\Lambda, g)$ .  $g$  - константа связи.

Проведенное в работе модельное рассмотрение в дополнение к результатам<sup>/8/ и /3/</sup> указывает на то, что формально не нарушая никаких принципов, из УДШ можно извлекать самые разные решения. Следовательно, в этих уравнениях содержится слишком мало физической информации. С нашей точки зрения для успешного применения УДШ к низкоэнергетиче-

ской физике сильных взаимодействий необходимо переформулировать их с учетом конкретного представления о структуре вакуума КХД в режиме конфайнмента.

## I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В чистой глюодинамике уравнение Дайсона - Швингера для глюонного пропагатора в графическом виде представлено на рис. I<sup>/3/</sup>.



Р и с. I.

Введем обозначения:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = i\delta^{ab} t_{\mu\nu}(q) D_T(q) = i\delta^{ab} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) D_T(q^2)$$

$D_{\mu\nu}^{ab}(q)$  - точный пропагатор глюона;

$D_{\mu\nu}^{0ab}(q) = \delta^{ab} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{i}{q^2}$  - свободный пропагатор глюона.

$\Delta^{ab}(q^2)$  - будет обозначать точный духовый пропагатор, а  $\Delta_0^{ab}(q^2)$  - соответственно свободный ( $\Delta_0^{ab}(q^2) = \delta^{ab} \Delta_0(q^2)$ ).

Из рис. I видно, что решение вопроса об аналитической структуре  $D_T(q^2)$ , удовлетворяющей УДШ, требует знания вида вершин  $\Gamma$ ,  $G$ ,  $T$ , а также функции  $\Delta(q^2)$ . Причем, если мы хотим иметь замкнутую, самосогласованную в рамках глюодинамики картину, то необходимо, чтобы  $\Delta(q^2)$  удовлетворяла своему УДШ (для духового пропагатора), приведенному в диаграммном виде на рис. 2, и включающему  $D_T(q^2)$  и  $G$ .

Что мы знаем о  $\Gamma$ ,  $G$  и  $T$  ?

$$\left( \text{---} \right)^{-1} = \left( \text{---} \right)^{-1} + \text{---} \text{---} \text{---}$$

Р и с. 2.

1) Вершина имеет следующий общий вид<sup>/II/</sup>:

$$\Gamma_{\rho\sigma\nu}^{abc}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = f^{abc} \Gamma_{\rho\sigma\nu}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma\nu}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = & F_1(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) g_{\rho\sigma}(\rho_1 - \rho_2)_\nu + \\ & F_2(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) g_{\rho\sigma}(\rho_1 + \rho_2)_\nu + F_3(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) (\rho_1 - \rho_2)_\nu \times \\ & \times (\rho_{1\sigma} \rho_{2\rho} - g_{\rho\sigma}(\rho_1 \rho_2)) + \frac{1}{3} F_4(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) \times \\ & \times (\rho_{1\nu} \rho_{2\rho} \rho_{3\sigma} + \rho_{1\sigma} \rho_{2\nu} \rho_{3\rho}) + F_5(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) (g_{\rho\sigma}(\rho_1 \rho_2) - \\ & - \rho_{1\sigma} \rho_{2\rho}) (\rho_{1\nu}(\rho_2 \rho_3) - \rho_{2\nu}(\rho_1 \rho_3)) + F_6(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) \times \\ & \times (-g_{\rho\sigma}(\rho_{1\nu}(\rho_2 \rho_3) - \rho_{2\nu}(\rho_1 \rho_3)) + \frac{1}{3} (\rho_{1\nu} \rho_{2\rho} \rho_{3\sigma} - \\ & - \rho_{1\sigma} \rho_{2\nu} \rho_{3\rho})) + c.p. \end{aligned} \quad (I.1)$$

Здесь  $c.p.$  означает циклические перестановки пар  $(\rho_1, \rho)$ ,  $(\rho_2, \sigma)$ ,  $(\rho_3, \nu)$ .

2) При этом из требования бозе-симметричности вершины  $\Gamma_{\rho\sigma\nu}^{abc}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  следуют определенные свойства симметрии скалярных функций  $F_i(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2)$ <sup>/II/</sup>: функции с  $i = 1, 3, 5$  симметричны относительно перестановки первых двух аргументов, с  $i = 2, 4$  - антисимметричны по всем трем аргументам, а с  $i = 6$  - симметрична по всем трем аргументам. Кроме этих свойств симметрии  $F_1, F_2, F_3$

и  $F_4$  должны удовлетворять тождеству Славнова - Тейлора (ТСТ) для  $\Gamma_{\rho\sigma\nu}$ <sup>/II/</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\sigma\nu}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \rho_{3\nu} = & \rho_3^2 \Delta(\rho_3^2) \left[ \frac{t_{\rho\alpha}(\rho_1) G_{\alpha\sigma}(\rho_1, \rho_3, \rho_2)}{D_T(\rho_1^2)} \right. \\ & \left. - \frac{t_{\sigma\beta}(\rho_2) G_{\beta\rho}(\rho_2, \rho_3, \rho_1)}{D_T(\rho_2^2)} \right], \end{aligned} \quad (I.2)$$

3)  $G_{\alpha\beta}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  - вспомогательная амплитуда, связанная с точной вершиной дух-дух-глюон  $G_\beta$  соотношением:

$$G_\beta(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \rho_{1\alpha} G_{\alpha\beta}(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \quad (I.3)$$

имеет следующий общий вид<sup>/II/</sup>:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\rho_3, \rho_2, \rho_1) = & g_{\alpha\beta} G_1(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) - \\ & - \rho_{2\beta} \rho_{1\alpha} G_2(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) + \rho_{1\beta} \rho_{3\alpha} G_3(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) + \\ & + \rho_{1\alpha} \rho_{3\beta} G_4(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2) + \rho_{3\beta} \rho_{2\alpha} G_5(\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2). \end{aligned} \quad (I.4)$$

Итак, формально получается следующая ситуация. Имеется 13 функций:  $D_T, \Delta, F_i (i=1, \dots, 6), G_j (j=1, \dots, 5)$ , которые связаны между собой тремя соотношениями: УДШ для  $D_T$  (рис.1), УДШ для  $\Delta$  (рис.2) и тождество (I.2), при этом  $F_i (i=1, \dots, 6)$  удовлетворяют указанным выше требованиям симметрии.

Таким образом, схема применения УДШ к исследованию ИК-структуры КХД по существу состоит в следующем.

Исходя из конкретного представления о конфайменте, сделать *ansatz* для  $D_T$ , после чего все остальные функции подобрать так, чтобы удовлетворить имеющимся уравнениям и требованиям симметрии. Так поступают и в<sup>/8/</sup> ( $D_T(q^2) \sim 1/q^4$ ), и в<sup>/3/</sup> ( $D_T(q^2) = -q^2/(q^4 - 2a^2 q^2 + b^4)$ ).

В настоящей работе поставим себе целью показать, что пропагатор  $D_T(q^2) = \mathcal{V} \exp\{q^2/\Lambda^2\}$  также не противоречит УДШ для глюонного и духового пропагаторов.

Последовательность действий такова: фиксируем вид  $D_T$  и  $\Delta$ , а затем подберем  $\Gamma$  и  $G$  так, чтобы УШД, тождество Славнова - Тейлора и требования симметрии удовлетворялись. Рассмотрение будем проводить в калибровке Ландау.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА - ШВИНГЕРА ДЛЯ ПРОПАГАТОРА ДУХА

В интегральной форме УШД для  $\Delta(k^2)$  в евклидовой метрике имеет вид:

$$\Delta^{-1}(-k^2) + k^2 = \frac{3g^2}{(2\pi)^4} \int d^4q D_{\mu\nu}(q) G_\mu^0(p) \Delta(-p^2) G_\nu(-k, p, -q) \quad (2.1)$$

Пользуясь (I.3), (I.4) и тем, что  $p = q + k$ , найдем:

$$\begin{aligned} G_\nu(-k, p, -q) = & -k_\nu [G_1(q^2, p^2, k^2) + \\ & + qk(G_2(q^2, p^2, k^2) + G_4(q^2, p^2, k^2)) + \\ & + G_5(q^2, p^2, k^2)] - q_\nu [k^2 G_3(q^2, p^2, k^2) + \\ & + qk G_2(q^2, p^2, k^2)] ; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$G_\mu^0(p) = -p_\mu / \Lambda^4 \text{ и } q_\nu D_{\mu\nu}(q) = 0.$$

С учетом этого, подставляя в (2.2) ansatz для  $D_T$  и  $\Delta$ :

$$D_T(-q^2) = v(g, \Lambda) \exp\{-q^2/\Lambda^2\} \quad (2.3)$$

$$\Delta(-p^2) = a(g, \Lambda) \exp\{-p^2/\Lambda^2\} \quad (2.4)$$

и безразмерная подинтегральное выражение заменой:

$$\begin{aligned} q^2 & \rightarrow q^2 = q^2/\Lambda^2 \\ p^2 & \rightarrow p^2 = p^2/\Lambda^2 \\ k^2 & \rightarrow k^2 = k^2/\Lambda^2, \end{aligned}$$

получаем:

$$\frac{1}{a} e^{k^2} + \Lambda^2 k^2 = \frac{3g^2}{(2\pi)^4} \Lambda^6 a v \int d^4q \left( k^2 - \frac{(qk)^2}{q^2} \right) \times \\ \times (G_1 + qk(G_2 + G_4) + G_5) e^{-q^2 - p^2}$$

Функции  $G_1, G_2$  и  $G_4$  связаны со скалярными функциями  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) трехглюонной вершины тождеством (I.2), а  $G_5$  произвольна. С учетом этого заметим, что каковы бы ни были  $G_1(\dots)$ ,  $G_2(\dots)$  и  $G_4(\dots)$ , для  $\forall f(\dots)$  найдется такая  $G_5(\dots)$ , что:

$$\begin{aligned} G_1(q^2, p^2, k^2) + qk[G_2(q^2, p^2, k^2) + \\ G_4(q^2, p^2, k^2)] + G_5(q^2, p^2, k^2) = f(q^2, p^2, k^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

будем иметь

$$\frac{1}{a} e^{k^2} + \Lambda^2 k^2 = \frac{3g^2}{(2\pi)^4} \Lambda^6 a v \int d^4q \left( k^2 - \frac{(qk)^2}{q^2} \right) f(q^2, p^2, k^2) e^{-q^2 - p^2}$$

Пусть, например:

$$\begin{aligned} f(q^2, p^2, k^2) = & \frac{q^2}{k^2} \lambda_1(q) e^{-(q^2 + k^2) + 2p^2} + \\ & + q^2 \lambda_2 e^{\frac{1}{3}(q^2 + k^2 + p^2)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

тогда после необходимых преобразований получим

$$\frac{1}{a} e^{k^2} + \Lambda^2 k^2 = \frac{3g^2}{(2\pi)^4} \Lambda^6 a v (2\lambda_1 e^{k^2} + 2\lambda_2 k^2) \quad (2.7)$$

и при  $a(g, \Lambda^2) = 8/15g\Lambda^2$ ,

$$b(q, \Lambda^2) = \pi^2 \sqrt{2} / g \Lambda^2,$$

$$\lambda_1 = \frac{225}{4\sqrt{2}} g,$$

$$\lambda_2 = 8\sqrt{2}$$

(2.8)

получаем равенство правой и левой частей (2.7). Ясно, что (2.6) и (2.8) не единственны. Итак, мы видим, что при  $D_T(q^2)$  и  $\Delta(p^2)$ , определенных в (2.3) и (2.4), существует  $G_\nu$ , удовлетворяющая всем имеющимся требованиям, такая, что равенство в УДШ (2.1) имеет место.

### 3. УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА - ШВИНГЕРА ДЛЯ ГЛЮОННОГО ПРОПАГАТОРА

Обратимся снова к рис. I. Видим, что УДШ для  $D_T$  существенно сложнее уравнения для  $\Delta$ . Из соображений простоты, аналогично работе [3], опустим член ( $d$ ), содержащий вершину  $T$ , учет которого в нашем случае, как и в [3], есть вопрос техники, и принципиально картину не меняет. Вклад диаграммы (С) тривиален, и поэтому его учитывать тоже не будем, а лишь укажем в нужном месте, как это сделать. В рамках таких упрощений УДШ для глюонного пропатора в интегральной форме приводится умножением на  $\delta^{ab} t_{\mu\nu}(k)$  к виду:

$$\begin{aligned} D_T^{-1}(k^2) - k^2 = & \frac{i}{2\pi^4} g^2 \int d^4 q \left\{ \Gamma_{\mu\kappa\lambda}^0(k, -p, q) t_{\mu\nu}(k) \times \right. \\ & t_{\kappa\rho}(p) t_{\lambda\sigma}(q) D_T(p^2) D_T(q^2) \Gamma_{\rho\sigma\nu}(p, -q, -k) + \\ & \left. + \frac{1}{2} G_\mu^0(p) \Delta(p^2) \Delta(q^2) G_\mu(p, -q, k) \right\} = \\ & = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пользуясь ansatz-ем (2.4), (I.3) и (I.4), получим после обезразмеривания подинтегрального выражения в евклидовой метрике

$$I_2 = \frac{g^2}{2\pi^4} a^2 \Lambda^6 \int d^4 q \left\{ p^2 G_1(k^2, q^2, p^2) + \right.$$

$$\left. + (pq)(pk) G_2(k^2, q^2, p^2) + p^2(pk)(G_3(k^2, q^2, p^2) + G_4(k^2, q^2, p^2)) + p^4 G_5(k^2, q^2, p^2) \right\} e^{-p^2 - q^2}.$$

Снова возникла ситуация, аналогичная той, которая была в случае УДШ для  $\Delta$ : каковы бы ни были функции  $G_1, G_2, G_4, G_5$ , для  $\forall \varphi(k^2, q^2, p^2)$  найдется такая функция  $G_3$ , что:

$$p^2 G_1 + pq G_2 + p^2 pk (G_3 + G_4) + p^4 G_5 = \varphi, \quad (3.2)$$

так что:

$$I_2 = \frac{g^2}{2\pi^4} a^2 \Lambda^6 \int d^4 q \varphi(k^2, q^2, p^2) e^{-p^2 - q^2}.$$

Дальше можно действовать так же, как в (2.5), а можно для простоты положить

$$\varphi(k^2, q^2, p^2) \equiv 0. \quad (3.3)$$

Используя ansatz (2.3), проделав стандартные преобразования, после перехода к евклидовой метрике, получим для  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{g^2}{2\pi^4} \int d^4 q D_T(-q^2) D_T(-p^2) \left[ C_1 f F_1(p^2, q^2, k^2) + \right. \\ & C_2 f F_1(k^2, p^2, q^2) + C_3 f F_1(q^2, k^2, p^2) + C_4 f F_2(p^2, q^2, k^2) + \\ & C_5 h F_3(p^2, q^2, k^2) + C_6 h F_3(k^2, p^2, q^2) + C_7 h F_3(q^2, k^2, p^2) + \\ & C_8 t F_4(p^2, q^2, k^2) + C_9 s F_5(p^2, q^2, k^2) + C_{10} s F_5(k^2, p^2, q^2) + \\ & \left. C_{11} s F_5(q^2, k^2, p^2) + C_{12} u F_6(p^2, q^2, k^2) \right]. \end{aligned}$$

При выводе (3.3) использовалось выражение (I.1). Подробности можно найти в Приложении I, где выписаны скалярные комбинации  $f, h, t, s$  и  $u$  импульсов  $p, q, k$ .  $C_1, \dots, C_{12}$  - известные вещественные числа.

Заметим теперь, что дальше можно идти двумя путями:

1) Выразить  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  через  $G_1, G_2, G_4, \Delta$  и  $D_T$ , решив тождество (I.2) относительно  $F_i$  ( $i = 1, 4$ ). Затем сделать ansatz для  $\Delta$  и  $D_T$  и найти такие  $G_1, G_2, G_4, F_5, F_6$ , что равенство в (3.1) будет выполняться.

2) Сделать ansatz для  $D_T$  и найти такие  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  и  $F_6$ , что уравнение (3.1) будет справедливо, при этом мы можем решить (I.2) уже относительно  $G_1, G_2$  и  $G_4$ , и тем самым обеспечить выполнение ТСТ. При этом все предыдущее рассмотрение вкладов в УЩ (3.1) и УЩ для духового пропагатора остается в силе, если для  $\psi$  и  $\varphi$  функции  $G_5$  и  $G_3$ , соответственно выбраны так, чтобы условия (2.5) и (3.2) выполнялись для  $G_1, G_2$  и  $G_4$ , удовлетворяющих тождеству (I.2).

Будем следовать второму способу. Пусть:

$$1) F_1(p^2, q^2, k^2) = p^2 q^2 R_1(p^2, q^2, k^2; \xi_{21}, \dots, \xi_{24}) \times \\ \times \exp\{-(p^2+q^2)+2k^2\} + p^2 q^2 k^2 [P_1(p^2, q^2, k^2; \xi_1, \dots, \xi_4) \times \\ \times \exp\{-(p^2+q^2)+2k^2\} + Q_1(p^2, q^2, k^2; \zeta_1, \dots, \zeta_4)] \times \\ \times \exp\{\frac{1}{3}(p^2+q^2+k^2)\}. \quad (3.4)$$

$F_3$  получается из  $F_1$  заменой:

$$R_1 \rightarrow R_3(p^2, q^2, k^2; \xi_{25}, \dots, \xi_{28})$$

$$P_1 \rightarrow P_3(p^2, q^2, k^2; \xi_5, \dots, \xi_8)$$

$$Q_1 \rightarrow Q_3(p^2, q^2, k^2; \zeta_6, \dots, \zeta_9).$$

2)  $j = 2, 4, 5, 6$

$$F_j(p^2, q^2, k^2) = P_j(p^2, q^2, k^2) e^{-(p^2+q^2)+2k^2} + Q_j(p^2, q^2, k^2) e^{\frac{1}{3}(p^2+q^2+k^2)}, \quad (3.5)$$

где

$$P_2 = 0, P_4 = 0, P_6 = 0$$

$$P_5 = P_5(p^2, q^2, k^2; \xi_9, \dots, \xi_{19})$$

$$Q_2 = Q_2(p^2, q^2, k^2; \zeta_5)$$

$$Q_4 = Q_4(p^2, q^2, k^2; \zeta_{10})$$

$$Q_5 = Q_5(p^2, q^2, k^2; \zeta_{11}, \dots, \zeta_{21})$$

$$Q_6 = Q_6(p^2, q^2, k^2; \zeta_{22}, \dots, \zeta_{29}).$$

Здесь  $\xi_1, \dots, \xi_{28}$  и  $\zeta_1, \dots, \zeta_{29}$  - параметры. Явный вид функций  $P, Q$  и  $R$  приведен в Приложении II.

Подставляя выражения (3.4), (3.5) и (2.3) в (3.3), получим после взятия всех интегралов (их характерный вид выписан в Приложении III):

$$\frac{1}{V} e^{k^2} + \Lambda^2 k^2 = \frac{g^2}{2\pi^4} V^2 \Lambda^6 \left[ \left\{ \sum_{h=0}^9 k^{2(h-1)} \sum_{i_n} a_{i_n} \xi_{i_n} \right\} e^{k^2} + \right. \\ \left. + \left\{ \sum_{h=10}^{17} (k^2)^{h-11} \sum_{i_n} a_{i_n} \xi_{i_n} \right\} e^{-3k^2} + \left\{ \sum_{h=18}^{27} (k^2)^{h-19} \sum_{i_n} d_{i_n} \zeta_{i_n} \right\} + \right. \\ \left. + \left\{ \sum_{h=28}^{35} (k^2)^{h-29} \sum_{i_n} d_{i_n} \zeta_{i_n} \right\} e^{\frac{2}{3}k^2} \right]. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы (3.6) выполнялось, необходимо, чтобы:

$$V = \pi^2 \sqrt{2} / g \Lambda^2,$$

а параметры  $\xi_i$  и  $\zeta_i$  удовлетворяли системам линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i_n} a_{i_n} \xi_{i_n} = \delta_1^n \frac{g}{\pi^2 \sqrt{2}} \quad (n = \overline{0, 17}) \quad (3.7)$$

$$\sum_{i_m} d_{i_m} \zeta_{i_m} = \delta_{20}^m \quad (m = \overline{18, 35}). \quad (3.8)$$

Всего на 28 параметров  $\xi_i$  и 29 параметров  $\zeta_i$  требуется наложить по 18 линейных связей.

При этом в системе (3.7) имеется подсистема из восьми уравнений:

$$\sum_{i_k} a_{i_k} \xi_{i_k} = 0 \quad (k = \overline{10, 17}) \quad (3.9)$$

$i_k = \overline{20, 28, 14, 19}$ , т.е. в этой подсистеме фигурирует 15 параметров  $\xi$ , а в системе (3.8) - подсистема также из 8 уравнений на 12 параметров  $\zeta$ :

$$\sum_{i_l} d_{i_l} \zeta_{i_l} = 0 \quad (l = \overline{28, 35}) \quad (3.10)$$

$i_l = \overline{5, 10, 16, 21, 26, 29}$ .

(3.7), (3.8) имеют бесконечно много решений, так что, выбирая  $F_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) в виде (3.4), (3.5), можно решить уравнение (3.1), делая ansatz:

$$D_T(q^2) = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{g \Lambda^2} \exp\{q^2/\Lambda^2\},$$

$\Lambda$  имеет физический смысл масштаба.

Учет диаграммы (С) рис. I привел бы лишь к тому, что уравнения с  $m = \overline{19, 20}$  системы (3.8) изменились бы в правой части на константу.

Таким образом, предположение, что глюонный пропагатор в инфракрасной области имеет вид:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = i \delta^{ab} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) D_T(q^2) \quad (3.11)$$

$$D_T(q^2) = \beta \exp\{q^2/\Lambda^2\},$$

не противоречит УДП.

В заключение укажем, что экспоненциальное поведение пропагатора (3.11) и формфакторов трехглюонной вершины (3.4), (3.5) соответствует нелокальной квантовой теории поля<sup>15/</sup>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Пользуясь (I.1), вычисляем

$$\begin{aligned} T_{\nu\sigma\rho}(p, q, k) \Gamma_{\rho\sigma\nu}(p, -q, -k) &= E', \\ \text{где } T_{\nu\sigma\rho}(p, q, k) &= \Gamma_{\mu\kappa\lambda}^0(k, -p, q) t_{\mu\nu}(k) t_{\kappa\rho}(p) t_{\lambda\sigma}(q) = \\ &= 2\delta_{\nu\rho} k_\sigma - 2\delta_{\rho\sigma} q_\nu + \delta_{\nu\rho} q_\sigma \left[ -2 \frac{q_\kappa}{q^2} \right] + \delta_{\rho\sigma} k_\nu \left[ 2 \frac{q_\kappa}{k^2} \right] + \\ &+ \delta^{\nu\sigma} k_\rho \left[ \frac{k^2 - q^2}{p^2} - 1 \right] + \delta_{\nu\sigma} q_\rho \left[ \frac{k^2 - q^2}{p^2} + 1 \right] + \left( \frac{q^2}{k^2 p^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{p^2} \right) (k_\rho k_\nu k_\sigma + q_\rho k_\nu k_\sigma) + \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} - \right. \\ &\left. - \frac{k^2}{q^2 p^2} \right) (q_\rho q_\sigma q_\nu + k_\rho q_\nu q_\sigma) + \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{kq}{p^2 q^2} + \right. \\ &\left. + \frac{kq}{k^2 q^2} + \frac{kq}{k^2 p^2} \right) (q_\rho q_\sigma k_\nu + k_\rho k_\nu q_\sigma). \end{aligned}$$

$E'$  (подинтегральное выражение в (3.3)) оказывается зависящим от следующих скалярных комбинаций импульсов  $p, q, k$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= q^2 & f_6 &= (qk)^2/k^2 & f_{10} &= q^2(qk)^2/k^2 p^2 \\ f_2 &= k^2 & f_7 &= q^2 qk/p^2 & f_{11} &= (qk)^3/k^2 p^2 \\ f_3 &= qk & f_8 &= k^2 qk/p^2 & f_{12} &= (qk)^3/q^2 p^2 \\ f_4 &= (qk)^2/q^2 & f_9 &= (qk)^2/p^2 & f_{13} &= (qk)^3/q^2 k^2 \\ f_5 &= k^2 qk/q^2 & & & & \\ h_1 &= q^2 k^2 & h_9 &= (qk)^3/k^2 & h_{16} &= k^2 q^2 qk/p^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
h_2 &= k^2 q k & h_{10} &= k^4 q^2 / p^2 & h_{17} &= q^6 / p^2 \\
h_3 &= q^2 q k & h_{11} &= q^4 k^2 / p^2 & h_{18} &= q^2 (qk)^3 / k^2 p^2 \\
h_4 &= (qk)^2 & h_{12} &= k^4 q k / p^2 & h_{19} &= q^4 (qk)^2 / k^3 p^2 \\
h_5 &= q^4 & h_{13} &= q^4 q k / p^2 & h_{20} &= (qk)^4 / p^2 q^2 \\
h_6 &= k^2 (qk)^2 / q^2 & h_{14} &= k^2 (qk)^2 / p^2 & h_{21} &= k^2 (qk)^3 / p^2 q^2 \\
h_7 &= (qk)^3 / q^2 & h_{15} &= q^2 (qk)^2 / p^2 & h_{22} &= (qk)^4 / k^2 q^2 \\
h_8 &= q^2 (qk)^2 / k^2 & & & & \\
t_1 &= k^4 & t_5 &= (qk)^2 & t_9 &= k^2 q^2 q k / p^2 \\
t_2 &= q^2 k^2 & t_6 &= q^2 k^4 / p^2 & t_{10} &= q^4 q k / p^2 \\
t_3 &= k^2 q k & t_7 &= k^2 q^4 / p^2 & t_{11} &= (qk)^3 / p^2 \\
t_4 &= q^2 q k & t_8 &= k^4 q k / p^2 & t_{12} &= q^2 (qk)^3 / k^2 p^2 \\
s_1 &= k^4 q^2 & s_4 &= q^2 (qk)^2 & s_7 &= q^4 (qk) \\
s_2 &= q^4 k^2 & s_5 &= (qk)^3 & s_8 &= k^4 (qk) \\
s_3 &= k^2 (qk)^2 & s_6 &= q^2 k^2 (qk) & & \\
u_1 &= q^2 k^2 & u_2 &= k^2 q k & u_3 &= (qk)^2 \\
c_e \cdot f &= \sum_{i=1}^{13} c_e^i f_i \quad (l = \overline{1,4}); & c_k \cdot h &= \sum_{i=1}^{22} c_k^i h_i \quad (k = \overline{5,7}); \\
c_g \cdot t &= \sum_{i=1}^{12} c_g^i t_i; & c_m \cdot s &= \sum_{i=1}^8 c_m^i s_i \quad (m = \overline{9,11}); & c_{12} \cdot u &= \sum_{i=1}^3 c_{12}^i u_i \\
c_i^j & - \text{некоторые известные вещественные числа.}
\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II.

$$\begin{aligned}
P_1 &= \xi_1 + \xi_2 (p^2 + q^2) + \xi_3 (p^2 + q^2)^2 + \xi_4 (p^2 + q^2)^3 \\
P_3 &= \xi_5 + \xi_6 (p^2 + q^2) + \xi_7 (p^2 + q^2)^2 + \xi_8 (p^2 + q^2)^3 \\
P_5 &= \xi_9 + \xi_{10} (p^2 + q^2) + \xi_{11} (p^2 + q^2)^2 + \xi_{12} (p^2 + q^2)^3 + \\
&+ \xi_{13} (p^2 + q^2)^4 + \xi_{14} (p^2 + q^2) \frac{1}{k^2} + \xi_{15} (p^2 + q^2) \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \\
&+ \xi_{16} (p^2 + q^2)^2 \frac{1}{k^2} + \xi_{17} (p^2 + q^2)^2 \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \\
&+ \xi_{18} \frac{1}{k^2} + \xi_{19} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \\
R_1 &= \xi_{20} + \xi_{21} (p^2 + q^2) + \xi_{22} (p^2 + q^2)^2 + \xi_{23} (p^2 + q^2)^3 + \\
&+ \xi_{24} (p^2 + q^2)^4 \\
R_3 &= \xi_{25} + \xi_{26} (p^2 + q^2) + \xi_{27} (p^2 + q^2)^2 + \\
&+ \xi_{28} (p^2 + q^2)^3 \\
Q_1 &= \tau_1 + \tau_2 (p^2 + q^2) + \tau_3 (p^2 + q^2)^2 + \tau_4 (p^2 + q^2)^3 \\
Q_2 &= \tau_5 (p^2 - k^2)(q^2 - k^2)(p^2 - q^2) \\
Q_3 &= \tau_6 + \tau_7 (p^2 + q^2) + \tau_8 (p^2 + q^2)^2 + \\
&+ \tau_9 (p^2 + q^2)^3 \\
Q_4 &= \tau_{10} (p^2 - k^2)(p^2 - q^2)(q^2 - k^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 = & \bar{b}_{11} + \bar{b}_{12}(p^2+q^2) + \bar{b}_{13}(p^2+q^2)^2 + \bar{b}_{14}(p^2+q^2)^3 + \\
& + \bar{b}_{15}(p^2+q^2)^4 + \bar{b}_{16} \frac{1}{k^2} + \bar{b}_{17} \left( \frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2} \right) + \\
& + \bar{b}_{18} (p^2+q^2) \frac{1}{k^2} + \bar{b}_{19} (p^2+q^2) \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \\
& + \bar{b}_{20} (p^2+q^2)^2 \frac{1}{k^2} + \bar{b}_{21} (p^2+q^2) \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \\
Q_6 = & \bar{b}_{22} + \bar{b}_{23}(p^2+q^2+k^2) + \bar{b}_{24}(p^2+q^2+k^2)^2 + \\
& \bar{b}_{25}(p^2+q^2+k^2)^3 + \bar{b}_{26}(p^2+q^2+k^2) \left( \frac{1}{p^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2} \right) + \bar{b}_{27} (p^2+q^2+k^2)^2 \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2} \right) + \\
& + \bar{b}_{28} (p^2+q^2+k^2) \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2} \right) + \bar{b}_{29} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2} \right)
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III.

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(2q+k)^2+k^2\}}{p^2} \sim \frac{1}{k^2} (1-e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(q+2k)^2+k^2\}}{p^2} \sim \frac{1}{k^2} (1-e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(q-k)^2+k^2\}}{p^2} \sim \frac{1}{k^2} (e^{-3k^2} - e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(2q+k)^2+k^2\}}{q^2} \sim \frac{1}{k^2} (1-e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(q+2k)^2+k^2\}}{q^2} \sim \frac{1}{k^2} (e^{-3k^2} - e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-(q-k)^2+k^2\}}{q^2} \sim \frac{1}{k^2} (1-e^{k^2})$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-\frac{1}{3}(2q+k)^2\}}{p^2} \sim \frac{1}{k^2} (e^{-\frac{1}{3}k^2} - 1)$$

$$\int d^4q \frac{\exp\{-\frac{1}{3}(2q+k)\}}{q^2} \sim \frac{1}{k^2} (e^{-\frac{1}{3}k^2} - 1)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Baker M. et all., Nucl.Phys., B186, p.531-572, 1981.
2. Mandelstam S., Phys.Rev., 1979, D20, p. 3223.
3. Stingl M., Phys.Rev., 1986, D34, p. 3863.
4. Pagels H., Phys.Rev., 1977, D15, p. 2991.
5. Baker M., Zachariassen F., Phys.Lett., 108B, 1982, p. 206.
6. Натрошвили К.Р. и др. ТМФ, 65, № 3, 1985, с. 360.
7. Atkinson D. et all., Nuovo Cim., 77A, No.2 (1983), p. 197.
8. Arbusov B.A., ИЯФ 87-28, Serpuukhov, 1987.
9. Алексеев А.И., ЯФ, 1981, 33, с.516.
10. Ефимов Г.В., P2-84-716, препринт ОИЯИ, 1984.
11. Ball J.S., Chiu T.-W., Phys.Rev., 1980, D22, p.2550.
12. Арбузов Б.А., препринт ИФВЭ, 83-31, Серпухов, 1983.
13. Арбузов Б.А., Байков В.А., Боос Э.Э., препринт ИФВЭ, 83-195, Серпухов, 1983.
14. Индурайн Ф., Квантовая хромодинамика, - М.: Мир, 1986.
15. Ефимов Г.В. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий, "Наука", М., 1985, с.186-212.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 декабря 1987 года.

Ефимов Г.В., Неделько С.Н.

P2-87-855

Уравнения Дайсона — Швингера в КХД  
и инфракрасные асимптотики  
глюонных функций Грина

Показано, что уравнения Дайсона — Швингера в поперечной калибровке при определенном виде вершин глюон-глюон-глюон и дух-дух-глюон допускают решение для глюонного и духового пропагаторов в виде целых аналитических функций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Efimov G.V., Nedelko S.N.

P2-87-855

Dyson-Schwinger Equations of QCD  
and Infrared Behaviour  
of the Gluonic Green Functions

It is shown that Dyson-Schwinger equations in the transversal gauge admit solution for ghost's and gluonic propagator in the view of entire analytical functions under certain form of exact gluon-gluon-gluon and ghost-ghost-gluon vertices.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987