

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Ф 503

P2-87-737

П.П.Физиев, Т.М.Мишонов, Ц.Я.Физиева

ЭФФЕКТЫ НЕИНТЕГРИРУЕМОСТИ
В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ
НА ПРЯМОЙ

Направлено в Оргкомитет VIII Международного
совещания по проблемам квантовой теории поля
/Алушта, октябрь 1987 года/

1987

I. Введение

В последние годы наблюдается большой интерес к исследованиям интегрируемости динамических систем с небольшим числом степеней свободы. Возросло число изученных, вполне интегрируемых по Буру - Лиувиллю задач ^{1-3/}. Благодаря применению вычислительной техники открыт ряд новых эффектов, связанных с хаотическим движением в неинтегрируемых системах ^{4-6/}. Как мы покажем ниже, существуют и другие эффекты, связанные с неинтегрируемостью, которые имеют яркий физический характер.

Классическая задача трех частиц является старейшей проблемой динамики, изучение которой продолжается и в наши дни благодаря её многочисленным применениям в астрономии, химии, атомной, ядерной и физике элементарных частиц. Основной открытой проблемой в математическом плане является доказательство неинтегрируемости задачи и исследование глобального поведения разных типов траекторий вне рамок непригодной для этого теории возмущений.

В прошлом усилия были направлены на решение гравитационной задачи трех частиц, причем исследовались решения, допускающие применения в астрономии ^{6/}. Это привело к несколько одностороннему изучению ряда проблем, в частности к практически полному пренебрежению к целым классам решений. Например, коллинеарное движение по неподвижной прямой, не имеющее места в астрономии, изучалось только с точки зрения тройных соударений в ^{7/}. Недостаточно изучалась также и кулоновская классическая задача трех частиц, так как считалось, что интерес представляет только её квантовый вариант. Развитие квантовой механики, в частности её формулировки в терминах интегралов по путям, в последние годы возродило интерес к классическим решениям задач. Для построения интеграла по путям и квазиклассического приближения необходимо знать классические траектории во всей комплексной области значений переменных. Принципиальные проблемы, возникающие при этом в неинтегрируемых задачах, все ещё ждут своего изучения. Можно надеяться, что задача трех частиц сыграет свою роль для выяснения этих проблем как пример из физики фундаментальных взаимодействий.

Другая физическая сторона вопроса связана с тем, что квантовое описание необходимо и возможно только для достаточно низких энергетических состояний атомов и молекул. В серии работ последних лет (см. ссылки в ^{8-10/}) было показано, что процессы с высоковозбужденными состояниями хорошо описываются классической механикой, например в случае ридберговских состояний атомов. Физическая причина состоит в

том, что атомы с одним электроном на высокой орбите (например, H(110)) имеют большой размер и ведут себя как классические объекты по отношению к налетающей частице [8,10]. Задачу рассеяния на таком атоме нельзя решить в квантовом варианте на ЭВМ из-за нехватки памяти. С другой стороны, этого не нужно делать, поскольку в таких условиях основной вклад дают области, совпадающие с небольшой окрестностью классической траектории. В таких условиях классический расчет есть единственный способ решения задачи. Множество полученных с помощью классических расчетов результатов хорошо согласуется с экспериментальными данными [8-10]. При этом из-за сложности и недостаточной изученности самой классической задачи расчеты проводились в рамках упрощенных моделей.

Следует отметить также цикл работ последних лет по квантовой химии (см. ссылки в [11]), в которых множество экспериментальных данных с достаточной точностью объясняется рассмотрением квантовых коллинеарных задач трех частиц с разными феноменологическими потенциалами.

Коллинеарное движение реализуется на ускорителях ионов и элементарных частиц.

В математическом плане изучение коллинеарного движения гораздо проще и является необходимым этапом исследования общей задачи трех частиц. Изучая этот случай, в котором нет сил Кориолиса, можно понять многие качественные свойства трехчастичного взаимодействия и движения системы, а также ввести новые специальные функции, которые возникают и в более общих случаях.

В работах [12-15] было начато изучение коллинеарного движения классической системы трех частиц в гиперсферических координатах (относительно применения этих координат в общей задаче трех классических частиц см. также [17,18]). В настоящей работе мы излагаем дополнительные аналитические и численные результаты, позволяющие выделить специфические физические эффекты, связанные с неинтегрируемостью задачи трех частиц: образование трехчастичных резонансных состояний с конечным временем жизни и существование реакций с обменом или без обмена частицей.

2. Коллинеарное движение в гиперсферических координатах

Пусть три частицы с массами $m_{1,2,3}$ движутся по неподвижной оси Ox , начало которой совпадает с центром масс системы. Координаты частиц $x_{1,2,3}$, удовлетворяющие тождеству $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$, после исключения движения центра масс выражаются через гиперрадиус $\rho \in (0, \infty)$ и модифицированный угол Дельвеса $\varphi \in [0, 2\pi]$ в виде [11]

$$x_i = x_i(\rho, \varphi) = \rho(c_i / \sqrt{s_1 s_2 s_3}) \cos(\varphi - \varphi_{i,jk}), \quad (1)$$

где $\varphi_{i,jk} = \varphi_{jki} + \pi$ — это углы парных столкновений частиц с номерами j и k , $\varphi_{23,1} = \pi/6 - (\psi_2 - \psi_3)/3$, $\varphi_{3,12} = 3\pi/6 - (\psi_1 - \psi_2)/3$, $\varphi_{3,1,2} = 5\pi/6 - (\psi_3 - \psi_1)/3$; $s_i = \sin \psi_i$, $c_i = \cos \psi_i$; а углы $\psi_{1,2,3}$ определены соотношениями $\psi_i = \arctg(m_i/\mu) \in [0, \pi/2]$, где μ — это приведенная масса трехчастичной системы:

$$\mu = \sqrt{m_1 m_2 m_3 / (m_1 + m_2 + m_3)}. \quad (2)$$

Мы рассмотрим задачи, потенциал которых удовлетворяет двум условиям: 1) $V(x_1, x_2, x_3)$ зависит только от расстояний $r_{ij} = |x_i - x_j| = \rho \sqrt{s_k / s_i s_j} |\sin(\varphi - \varphi_{i,jk})|$ между частицами; 2) $V(x_1, x_2, x_3)$ — это однородная функция координат. Второе требование имеет "технический" характер и сводится к условию $V(sx_1, sx_2, sx_3) = s^n V(x_1, x_2, x_3)$. В результате потенциал V в гиперсферических координатах имеет вид

$$V = g \rho^n \alpha(\varphi), \quad (3)$$

где n — это степень однородности, $\alpha(\varphi) = \alpha(\varphi + 2\pi)$ — это произвольная безразмерная функция, а $g > 0$ — это размерная константа.

Класс этих потенциалов содержит ряд физически интересных задач с $V = V_{12} + V_{23} + V_{31,2}$, например: 1) задача с осцилляторными потенциалами $V_{ij} \sim r_{ij}^2$, в которой $\alpha(\varphi) = \sum_{k=1}^3 s_k^2 \sin^2(\varphi - \varphi_{i,jk}) = a \cos 2(\varphi - \varphi_0) + \text{const}$; 2) задача Коллоджеро с $V_{ij} \sim r_{ij}^{-2}$, в которой $\alpha(\varphi) = -\sum_{k=1}^3 1/s_k^2 \sin^2(\varphi - \varphi_{i,jk})$; 3) задача с кулоновским взаимодействием и самая знаменитая трехчастичная задача — с ньютоновским гравитационным взаимодействием, в которых $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$, $\alpha(\varphi) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k |\sin^{-1}(\varphi - \varphi_{i,jk})|$; α_k выражаются соответственно через заряды частиц $e_{1,2,3}$ или через их массы $m_{1,2,3}$ в виде $\alpha_k^{(e)} = (e_i e_j / e_k^2)^{1/3} s_k^{-1}$ и $\alpha_k^{(m)} = -c_k s_k^{-2}$ [12-16, 18]. Известно, что первые две задачи являются полностью интегрируемыми по Бурю — Лиувиллю, а последние две, по-видимому, неинтегрируемы, хотя строгое доказательство в общем случае произвольных масс (зарядов) отсутствует.

В системе центра масс гамильтониан задач с потенциалом (3) в гиперсферических координатах имеет вид

$$H = \frac{1}{2\mu} (\rho^2 + \dot{\rho}^2) + g \rho^n \alpha(\varphi). \quad (4)$$

Физический смысл гиперрадиуса ρ проясняется формулой $I = \mu \rho^2$ для момента инерции системы.

Введем безразмерную энергию ε и безразмерный гиперрадиус ξ :

$$\varepsilon = E/R^n g, \quad \xi = R^{-1} \rho, \quad (5)$$

где R есть произвольный фиксированный масштаб длины.

Тогда, применяя закон сохранения энергии $H = \text{const} = E$, можно провести редукцию Уиттекера задачи и найти уравнение траектории $\xi(\varphi)$ на изоэнергетической поверхности $M^{(3)}(\varepsilon)$ с уравнением $\varepsilon = \text{const}$:

$$(\xi'/\xi)' - (1 + \xi'^2/\xi^2) [\omega + (\alpha'/2\alpha)(\xi/\xi) - \varepsilon \alpha \xi^{2\omega-2}] (1 - \varepsilon/\alpha \xi^{2\omega-2})^{-1} = 0, \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по φ , а $\omega = 1 + n/2$.

Введя координаты

$$\eta = \ln \xi \in (-\infty, \infty), \quad \chi = \arctg(\rho p_\rho / p_\varphi) \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

на изоэнергетической поверхности, мы видим, что она имеет структуру

$$M^{(3)}(\varepsilon) = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^{(2)}, \quad (8)$$

где $\mathbb{T}^{(2)}$ есть 2-мерный тор с координатами $\chi, \varphi \in [0, 2\pi]$.

Введем регуляризирующий параметр $\tau = \tau(t)$:

$$d\tau = (1 + \varepsilon^2) [2b \cos \chi (a - \varepsilon b e^{-n\eta}) (1 + \varepsilon e^{n\eta})]^{-1} \dot{\varphi} dt, \quad (9)$$

где $a = a(\varphi) = a(\varphi + 2\pi)$ и $b = b(\varphi) = b(\varphi + 2\pi)$ есть целые аналитические функции, через которые $\alpha(\varphi)$ выражается в виде $\alpha(\varphi) = a(\varphi)/b(\varphi)$ после описанного в /15,16/ аналитического продолжения потенциала, связанного с удалением модулей в r_{ij} . Например, для гравитационной задачи $\alpha(\varphi) = \text{const} \cdot \sin(\varphi - \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_2) / [\sin(\varphi - \varphi_3) \sin(\varphi - \varphi_4) \sin(\varphi - \varphi_5)]$ /14/.

Тогда уравнение (6) эквивалентно автономной аналитической системе первого порядка на $\mathbb{C}_{\eta, \chi, \varphi}^{(3)}$ /16/:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{X}_{\omega, \varepsilon} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\vec{X}_{\omega, \varepsilon}$ есть аналитическое векторное поле вида

$$\vec{X}_{\omega, \varepsilon} = \alpha_+(\varepsilon) \vec{X}_\omega - \alpha_-(\varepsilon) \vec{Y}, \quad (11)$$

$$\alpha_+(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon e^{n\eta}}{1 + \varepsilon^2}, \quad \alpha_-(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon^{-1} e^{-n\eta}}{1 - \varepsilon^{-2}}, \quad (12)$$

а

$$\vec{X}_\omega = 2a\beta [\cos \chi (\partial_\chi + \partial_\varphi) + \sin \chi \partial_\eta] + [na\beta \cos \chi - (a'\beta - a\beta') \sin \chi] \partial_\chi, \quad (13)$$

$$\vec{Y} = 2\beta^2 [\cos \chi (\partial_\chi + \partial_\varphi) + \sin \chi \partial_\eta]. \quad (14)$$

3. Классификация движений. Прimitивные движения

Однородность потенциалов (3) приводит к механическому подобию /19/ в рассматриваемых нами задачах /13,15,16/, в результате которого имеются только три существенно разных случая движений, в зависимости от значения полной энергии ε : $|\varepsilon| = 0$, $|\varepsilon| = 1$ и $|\varepsilon| = \infty$ /13,16/. При рассмотрении комплексных траекторий в фазовом пространстве случаи $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ различаются несущественной сменой положений вещественной и мнимой осей, т.е. разница между ними подобна разнице между тригонометрическими и гиперболическими функциями и сводится в точности к ней, например для специальных движений либрационного типа с $\varphi = \text{const}$ в гравитационной и кулоновской задачах трех частиц /13/.

Для всех потенциалов (3) движения с $|\varepsilon| = 0$ и $|\varepsilon| = \infty$ играют особую роль. В /16/ предложено называть эти движения примитивными на основании следующих свойств (см. также /15/):

1) Понижение порядка уравнения траектории (6), которое переходит в уравнение первого порядка для $v = \xi'/\xi$. Для системы (10) это сводится к отщеплению уравнения для $\eta(\tau)$.

2) Существование глобальной симметрии фазового потока на $M^{(3)}(|\varepsilon| = 0, \infty)$, которая связана с глобальным векторным полем

$$\vec{N} = \xi \partial_\xi = \partial_\eta, \quad (15)$$

коммутирующим с векторным полем $\vec{X}_{\omega, \varepsilon}$ при $|\varepsilon| = 0, \infty$.

3) В результате указанной симметрии возникает возможность спроектировать траектории в $M^{(3)}(|\varepsilon| = 0, \infty)$ на тор $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ без

пересечения их проекций (см. рис I а,б) . Это соответствует существованию уравнения первого порядка для ψ (см. свойство I).

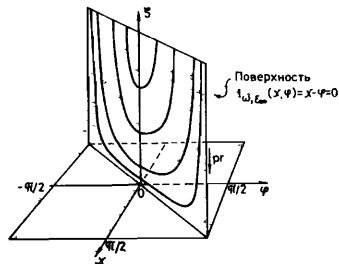


Рис. I а

Инвариантное многообразие $I_{\omega, \epsilon}^{(1)} = 0$ и семейство траекторий на нём, проекция которых на $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$ есть прямая $\chi = \psi$, $\xi = 0$.

4) Существует независящий от гиперрадиуса ρ (и от η) первый интеграл $I_{\omega, \epsilon=0, z=\infty}^{(1)}(x, \varphi)$.

5) Имеет место нестандартное разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби распадаемых задач. Оно связано с факторизацией действия $W(\rho, \varphi)$ в виде $W(\rho, \varphi) = W_1(\rho) \cdot W_2(\varphi)$ вместо обычного представления его в виде суммы двух функций разных аргументов: $W = W_1(\rho) + W_2(\varphi)$.

6) Решение задачи можно получить в квадратурах.

Эти свойства напоминают свойства вполне интегрируемых по Бурю - Лиувиллю задач, однако имеются и существенные различия. В частности, тор $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$, за исключением случая $\rho \equiv 0$, не есть инвариантное многообразие фазового потока системы и траектории не лежат на нём. Считая эквивалентными траектории с одинаковыми проекциями на $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$ (см. рис. I а,б), можно рассматривать этот тор как многообразие классов эквивалентных траекторий. Это многообразие раньше частично изучалось в связи с тройными столкновениями в коллинеарной ньютоновской задаче [17].

Между случаями примитивных движений с $|\epsilon| = 0$ и с $|\epsilon| = \infty$ имеются, однако, существенные различия.

Устремление $|\epsilon|$ к ∞ соответствует пренебрежению взаимодействием между частицами, т.е. рассмотрению системы трех свободных частиц. Тогда фазовый поток совпадает с потоком вполне интегрируе-

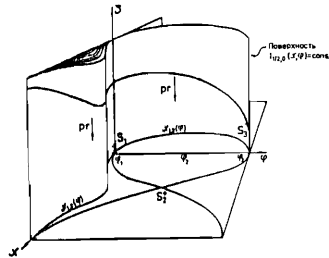


Рис. I б

Траектории на инвариантном многообразии многолистном многообразии $I_{\omega, \epsilon}^{(1)} = \text{const}$ и её проекция на $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$.

мой по Бурю - Лиувиллю системы и на $M^{(3)}(|\epsilon| = \infty)$ имеется полный набор дополнительных глобальных первых интегралов $I_{\omega, |\epsilon| = \infty}^{(1)}(x, \varphi) = \varphi - \chi$, $I_{\omega, |\epsilon| = \infty}^{(2)}(x, \varphi, \eta) = e^{\eta |\cos \chi|} = \xi |\cos \chi|$. Уравнение первого порядка для проекций траекторий на $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$ тривиально и интегрируется при помощи одной единственной квадратуры. Кроме нестандартного разделения переменных в уравнении Гамильтона - Якоби, когда $W(\rho, \varphi) \sim \sqrt{2\mu E} \rho \sin(\varphi - \varphi_0)$, где $E \rightarrow \infty$, а $\varphi_0 = \text{const}$, возможно и стандартное разделение переменных, при котором $W(\rho, \varphi) \sim \sqrt{2\mu E} (\rho_0 \sqrt{\rho^2/\rho_0^2 - 1} - \arctg \sqrt{\rho^2/\rho_0^2 - 1} + \rho_0 \varphi)$, где $\rho_0 = \text{const}$. Точка, изображающая трехчастичную систему в плоскости $\mathbb{R}_{\rho, \varphi}^{(2)}$, движется по прямой линии $\rho = \rho_0 / \cos(\varphi - \varphi_0)$ с постоянной скоростью $\sqrt{2E/\mu}$, т.е. как свободная частица.

Случай $|\epsilon| = 0$ существенно сложнее, за исключением некоторых специальных потенциалов: осцилляторы или потенциалы степени однородности $\eta_0 = -2$ ($\omega = 0$), когда задача вполне интегрируема при любой функции $\alpha(\varphi) \sim 1/3, 15/$ (частный случай есть коллоджеровское взаимодействие). Другие потенциалы, например кулоновские или ньютоновские, требуют введения новых специальных функций для описания решений [14-16]. Для них получается нетривиальное уравнение на торе $\mathbb{T}_{x, \varphi}^{(2)}$, которое есть нелинейное уравнение Абеля и имеет множество неподвижных и подвижных особых точек. Решения имеют подвижные критические полюса, т.е. они не обладают свойством Пенлеве [14].

В этом случае существует только нестандартный способ разделения переменных в уравнении Гамильтона - Якоби, при котором

$$W(\rho, \varphi) = \sqrt{2\mu g} \rho^\omega f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ удовлетворяет уравнению [14-16/

$$f'^2 + \omega^2 f^2 = -\alpha(\varphi). \quad (16)$$

Кроме интеграла $I_{\omega, 0}^{(1)}(x, \varphi)$ в этом случае имеется и интеграл

$$I_{\omega, 0}^{(2)}(x, \varphi, \eta) = \eta - \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\tilde{\varphi} \text{tg } \chi_0 [\tilde{\varphi}, I_{\omega, 0}^{(1)}(x, \varphi)]; \quad (17)$$

где $\chi_0(\varphi, I)$ определяется из уравнения $I = I_{\omega, 0}^{(1)}(x, \varphi)$.

Интегралы $I_{\omega, 0}^{(1,2)}(x, \varphi, \eta)$ функционально независимы и задают полный набор локальных первых интегралов на $M^{(3)}(\epsilon = 0)$.

Случай $\omega = 0$ вполне интегрируем и $I_{\omega, 0}^{(1)}(x, \varphi) = [-\alpha(\varphi)]^{1/2} \sin \chi$. Однако для $\alpha(\varphi)$ общего вида при $\omega \neq 0$ требуется бесконечное количество квадратур для нахождения $I_{\omega, 0}^{(1)}(x, \varphi)$ [15]. Это отно-

сится и к функции

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 \sin(\varphi - \varphi_4) \sin(\varphi - \varphi_5) / \sin(\varphi - \varphi_1) \sin(\varphi - \varphi_3) \sin(\varphi - \varphi_5), \quad (18)$$

которая возникает в ньютоновской и в кулоновской задачах после аналитического продолжения потенциала $/I4/$. Здесь для удобства мы ввели обозначения $\varphi_1 = \varphi_{23,1}$; $\varphi_3 = \varphi_{3,12}$; $\varphi_5 = \varphi_{31,2}$; углы $\varphi_{4,6}$ определяются из уравнения $\alpha'(\varphi) = 0$, а $\alpha_0 = const.$

При рассмотрении глобальных свойств интегралов $I_{\omega,0}^{(1,2)}(\chi, \varphi, \eta)$ и эффектов, связанных с неинтегрируемостью, мы ограничимся потенциалами разных степеней однородности n (т.е. с разными ω), но с фиксированной функцией $\alpha(\varphi)$ вида (18).

4. Особые точки и свойства первых интегралов при $\varepsilon = 0$

Для функций $\alpha(\varphi)$ вида (18) на $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ имеется 24 особые точки проекции системы (10). Это точки $S_{\kappa; n_1, n_2}$ ($\kappa = 1, 3, 4, 5, 6$; $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$) с координатами

$$\varphi_{\kappa; n_1, n_2} = \varphi_{\kappa} + n_1 \pi; \quad \chi_{\kappa; n_1, n_2} = \chi_{\kappa} + n_2 \pi; \quad \kappa = 1, 3, 4, 5, 6, \quad \chi_{2; n_1, n_2} = \pi/2 + n_2 \pi,$$

причем $\varphi_2 = \varphi^{(1)}$ есть вещественное решение уравнения $\alpha'(\varphi) = 0$. Это уравнение имеет кроме него ещё 4 (по $\text{modd}(\pi)$), вообще говоря, комплексных решения $\varphi^{(n)}$: $n = 2, \dots, 5$, которые задают особые точки либрационного типа $/I4/$ в $\mathbb{C}_{\chi\varphi}^{(2)}$.

Вещественные особые точки на $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ гиперболические. Для них собственные значения матрицы Якоби $J_{\kappa; n_1, n_2}$ линеаризованной системы имеют вид $J_{\kappa; n_1, n_2}^{\pm} = (-1)^{n_1+n_2} N_{\kappa} D_{\kappa}^{\pm}$, N_{κ} есть нормировочные множители (см. $/I4/$), а

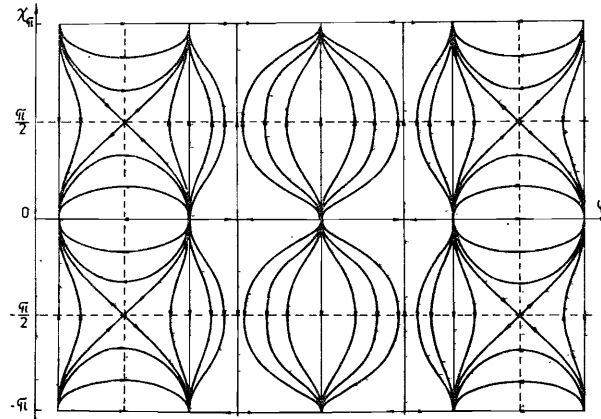
$$D_{\kappa}^{+} = 2, \quad D_{\kappa}^{-} = (-1)^{\kappa+1}; \quad \kappa = 1, 3, 4, 5, 6, \quad (19)$$

$$D_2^{\pm} = -\omega \pm \sqrt{\omega^2 + 2\nu(\varphi_2)}, \quad (20)$$

где $\nu(\varphi) = \alpha''(\varphi)/\alpha(\varphi)$. По формуле (20) получаем и собственные значения в остальных особых точках либрационного типа в $\mathbb{C}_{\chi\varphi}^{(2)}$, меняя $\nu(\varphi_2) \equiv \nu(\varphi^{(1)})$ на $\nu(\varphi^{(n)})$ с $n = 2, \dots, 5$.

Видно, что $S_{\kappa; n_1, n_2}$ с нечетными значениями κ , которые соответствуют парным столкновениям в системе трех частиц, есть узлы, а $S_{\kappa; n_1, n_2}$ с четными κ являются седлами. Фазовые портреты проекции системы (10) на тор $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ при $\varepsilon = 0$ показаны на рис. 2 (а, б) для вполне интегрируемого случая $\omega = 0$ и для случая

Рис. 2 а



Фазовый портрет на $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ при $\omega = 0$.

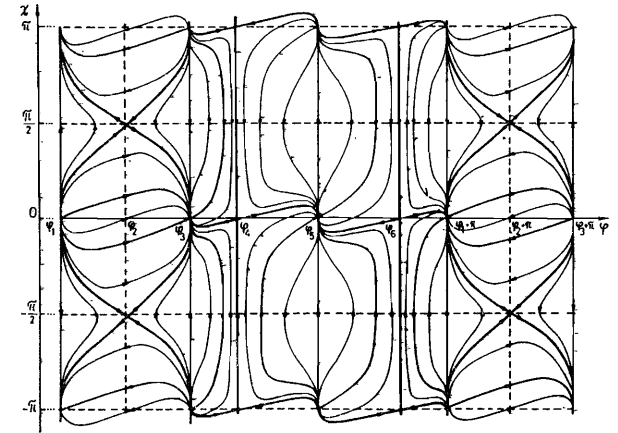


Рис. 2 б
Фазовый портрет на $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ при $\omega = 1/2$.

$\omega = 1/2$, который соответствует задачам с ньютоновским или кулоновским взаимодействием. Фазовые портреты с разными ω топологически эквивалентны.

В окрестности особой точки $S_{\kappa; n_1, n_2}$ в линейном приближении первый интеграл проекции системы (10) на $\mathbb{T}_{\chi\varphi}^{(2)}$ при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$J_{\omega,0} = (-1)^{n_1+n_2} [(N_{\kappa} D_{\kappa}^{+})^{-1} \ln(R_{11}^{(\kappa)} \Delta\chi + R_{12}^{(\kappa)} \Delta\varphi) - (N_{\kappa} D_{\kappa}^{-})^{-1} \ln(R_{21}^{(\kappa)} \Delta\chi + R_{22}^{(\kappa)} \Delta\varphi)], \quad (21)$$

где $R_{ij}^{(k)}$ — элементы ортогональной матрицы $\hat{R}^{(k)}$, которая диагонализует матрицу Якоби. Такой же вид у линейного приближения и для интеграла в окрестностях комплексных точек либрационного типа. Однако наличие резонансных соотношений /1,20-22/ между D^\pm может нарушить голоморфную эквивалентность нелинейной системы и её линейной части. Кроме того, из (21) нельзя сразу прийти к выводу, что

$S_{\kappa; n_1, n_2}$ являются логарифмическими точками ветвления любого первого интеграла, который есть функция от $J_{\omega, 0}$. Если коэффициенты перед логарифмами в (21) находятся в рациональных отношениях, мы можем избавиться от логарифмов, образуя $\exp(cJ)$ с подходящей константой c , получив таким образом однозначный первый интеграл в окрестности точки $S_{\kappa; n_1, n_2}$. Если это можно сделать одновременно в окрестностях всех особых точек, то мы получим глобальный первый интеграл.

Для точек $S_{\kappa; n_1, n_2}$ с $\kappa = 1, 3, 4, 5, 6$ на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ описанная процедура "алгебраизации" возможна, так как $D_{\kappa}^+ / D_{\kappa}^- = \pm 2$. Для точек либрационного типа имеем

$$D^{(n)+} / D^{(n)-} = r(\varphi^{(n)}) = -[\sqrt{\omega^2 + 2\nu(\varphi^{(n)})} - \omega] / [\sqrt{\omega^2 + 2\nu(\varphi^{(n)})} + \omega]. \quad (22)$$

При $\omega = 0$ отсюда $D^{(n)+} / D^{(n)-} = -1$, т.е. алгебраизация и этих точек возможна и существует глобальный первый интеграл $I_{\omega, 0}^{(n)}(\chi, \varphi)$.

При $\omega \neq 0$ отношения $r(\varphi^{(n)})$ (22) зависят непрерывным образом от отношений масс $m_{1,2,3}$ (через $\Psi_{1,2,3}$) или зарядов $e_{1,2,3}$. В целых областях значений масс или зарядов

$\text{Im} \nu(\varphi^{(n)}) \neq 0$ при $n = 2, \dots, 5$ (см. рис. 3). Тогда мы находимся в области Пуанкаре /20-22/ и проекция нелинейной системы (10) на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ голоморфно эквивалентна своей линейной части в окрестности такой особой точки, которую нельзя алгебраизировать. Особая точка есть точка ветвления интеграла $I_{\omega, 0}^{(n)}(\chi, \varphi) = F(J_{\omega, 0})$.

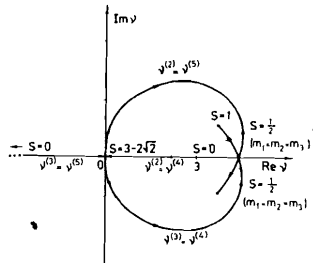


Рис. 3

Положения значений $\nu^{(2, \dots, 5)}$ в $\mathbb{C}_\nu^{(n)}$ -зависимости от параметра $S = -2 \cos \Psi, \Psi \in [0, \pi]$ в гравитационной задаче при $m_1 = m_3 \neq m_2$.

Отношение $r(\varphi^{(n)}) \equiv r(\varphi_2)$ вещественно только при $\nu(\varphi_2) > \omega^2/2$ и меняется непрерывным образом в некотором интервале $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ при варьировании масс (зарядов). Тогда при почти всех значениях $m_{1,2,3} (e_{1,2,3})$, для которых $r(\varphi_2)$ попадает в этот интервал, отношение $r(\varphi_2)$ есть иррациональное число, для которого выполняется условие Зигеля /20-22/. В результате проекция системы (10) на тор $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ голоморфно эквивалентна своей линейной части, а точка $S_{2; n_1, n_2}$ есть неустранимая логарифмическая точка интеграла $I_{\omega, 0}^{(n)} = F(J_{\omega, 0})$.

Таким образом, мы убеждаемся, что при $\omega \neq 0$ интеграл $I_{\omega, 0}^{(n)}(\chi, \varphi)$ есть бесконечнозначная функция по меньшей мере при почти всех значениях масс (зарядов).

Интеграл $I_{\omega, 0}^{(2)}(\chi, \varphi, \eta)$ согласно (17) зависит от $I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$ и, следовательно, есть бесконечнозначная функция вместе с ним. Так как $\{I_{\omega, 0}^{(1,2)}\}$ есть полный набор, то на $M^{(3)}(\epsilon=0)$ при $\omega \neq 0$ нет однозначных первых интегралов, если $I_{\omega, 0}^{(1)}$ бесконечнозначен.

5. Трехчастичное резонансное состояние и реакции при $\epsilon = 0$

При изменении параметра τ от $-\infty$ до $+\infty$ проекция траектории с $\epsilon = 0$ на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ идет из некоторого узла $S_{\kappa'; n_1'; n_2'}$ в соседний узел $S_{\kappa''; n_1''; n_2''}$, что соответствует двум последовательным парным столкновениям за конечный интервал настоящего времени t . Поэтому для получения полной траектории от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ необходимо продолжать проекции системы (10) на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ через точки парных столкновений $S_{\kappa; n_1, n_2}$ с $\kappa = 1, 3, 5$. При $\omega = 1/2$ решение есть аналитическая функция параметра $(t - t_*)^{1/3}$, где t_* есть момент парного столкновения /6,23/. Мы покажем, что можно продолжать аналитически проекции траекторий на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$.

Рассмотрим точки $S_{\kappa; n_1, n_2}$ с $\kappa = 1, 3, 5$. Между собственными значениями J_{κ}^{\pm} соответствующих матриц Якоби имеется единственное резонансное соотношение

$$J_{\kappa}^+ = 2J_{\kappa}^-.$$

В результате /20-22/ нелинейная система биголоморфно эквивалентна своей линейной части с добавлением единственного нелинейного резонансного члена вида $\text{const} \cdot (\Delta\chi - \text{const} \cdot \Delta\varphi)^2$. Разлагая правые стороны в ряд Тейлора в окрестностях точек $S_{\kappa; n_1, n_2, n_3}$ с $\kappa = 1, 3, 5$, убеждаемся, что коэффициент перед этим членом равен нулю и данная нелинейная система биголоморфно эквивалентна своей линейной части. Следовательно, с точностью до $O_2(\Delta\chi, \Delta\varphi)$ её первый интеграл имеет вид (21), откуда для проекции траектории в окрестностях точек пар-

ных столкновений получаем уравнение

$$\sqrt{2}(\varphi - \varphi_k) = \text{const} [\chi - (\varphi - \varphi_k)]^2 + O_3 [\chi - (\varphi - \varphi_k)] = \frac{1}{2} \text{tg} \beta_k (\chi - \Delta\varphi) + O_3. \quad (23)$$

Здесь мы параметризуем значение первого интеграла $\text{const} = f[I_{12,0}^{(1)}(\chi, \varphi)] = \frac{1}{2} \text{tg} \beta_k$ на данной траектории при помощи угла β_k . Тогда аналитическое продолжение траектории через парные столкновения означает, что после прихода в точку $S_{k;n_1 n_2}$ по одной ветви параболы (23) проекция траектории выходит из $S_{k;n_1 n_2}$ по другой ветви той же параболы, т.е. угол β_k не меняется.

Для изучения глобального поведения траекторий необходимо знать, как меняется угол β_k при последовательном прохождении системы через парные столкновения, т.е. функцию $\beta_k(N)$, где N есть очередной номер парного столкновения. Здесь проявляется принципиальная разница между вполне интегрируемым случаем $\omega = 0$ и неинтегрируемым случаем $\omega \neq 0$.

При $\omega = 0$ имеется однозначный интеграл $I_{0,0}^{(1)}(\chi, \varphi)$ и β_k есть однозначная функция на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$. Тогда при возвращении системы в точку $S_{k;n_1 n_2}$ угол β_k принимает своё прежнее значение независимо от предистории движения, т.е. $\beta_k(N) = \text{const}$. В результате проекция траектории на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ совершает с течением времени t бесконечное повторение замкнутого цикла из одного или из двух кусков, соединяющих точку $S_{k';n_1' n_2'}$ с $S_{k'';n_1'' n_2''}$ соответственно при $k' = k''$ или при $k' \neq k''$ (см. рис. 2а).

В первом случае происходит бесконечное сталкивание одной и той же пары частиц. Анализ третьего уравнения системы (10) (для $\eta(\tau)$) показывает, что мировые линии трех частиц имеют показанный на рис. 4а вид. В одном направлении оси t система схлопывается в тройном ударе, а в другом распадается на пару беспрерывно сталкивающихся частиц и свободную частицу.

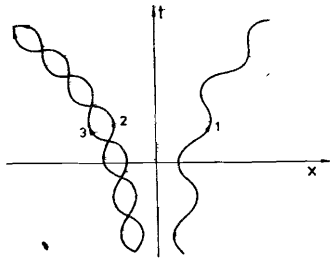


Рис. 4а

Во втором случае происходит бесконечное перебрасывание средней частицы между двумя крайними (см. рис. 4б). Можно считать, что система все время находится в "связанном" трехчастичном состоянии, меняя свой размер до нуля или до бесконечности, в зависимости от направления начальных скоростей.

При $\omega \neq 0$ в результате бесконечнозначности интег-

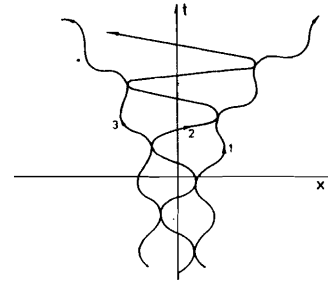


Рис. 4 б

рала $I_{\omega,0}^{(1)}(\chi, \varphi)$ при повторном приходе в точку $S_{k;n_1 n_2}$ угол β_k имеет новое значение, т.е. $\beta_k(N) \neq \text{const}$. В этом случае легче провести качественный анализ решений уравнения (16), которое эквивалентно проекции системы (10) на $\mathbb{T}_{\chi, \varphi}^{(2)}$ /14-16/. Вид функции $f(\varphi)$ показан на рис. 5. Это бесконечнозначная функция, значения $f_k^{(N)}$ которой на линиях парных столкновений $\varphi = \varphi_k$ можно связать с β_k по формуле

$$f_k^{(N)} = \omega^{-1} \sqrt{2|\alpha_k| \text{ctg} \beta_k(N) \sqrt{1+4\omega^2}}.$$

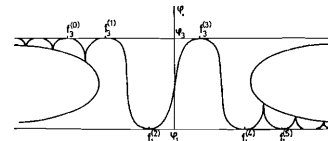


Рис. 5

При движении системы от $f = -\infty$ до $f = +\infty$ сначала происходят последовательные парные удары на линии $\varphi = \varphi_3$, связанные с движением из $S_{3;n_1' n_2'}$ в $S_{3;n_1'' n_2''}$, с монотонно возрастающей амплитудой $\Delta\varphi_{\text{max}}^N$. При выбранной нами нумерации ударов после значения

$N = 0$ начинается движение по двухтактному циклу из $S_{3;n_1' n_2'}$ в $S_{1;n_1'' n_2''}$ и обратно, при котором чередуются столкновения разных пар частиц (при $\varphi = \varphi_3$ и при $\varphi = \varphi_1$). Через некоторое количество ΔN таких ударов (на рис. 5 $\Delta N = 3$) система входит в новый режим из однотактных циклов: из $S_{1;n_1' n_2'}$ в $S_{3;n_1'' n_2''}$ - при ΔN нечетном или из $S_{3;n_1' n_2'}$ в $S_{3;n_1'' n_2''}$ - при ΔN четном. При этом амплитуды $\Delta\varphi_{\text{max}}^N$ монотонно убывают при $N \rightarrow \infty$.

Физическая картина движения выглядит как сближение сталкивающейся пары частиц (2,3) с отдельной частицей 1, при котором связанная пара раскачивается до перескакивания частицы 2 к частице 1 и обратно к частице 3. При этом возникает трехчастичное связанное состояние - "резонанс" с конечным временем жизни - в течение ΔN ударов. После этого трехчастичный резонанс распадается в зависимости от четности ΔN на исходную (при ΔN четном) или новую (при ΔN нечетном) пару и отдельную, уходящую от неё частицу. Таким образом, происходят реакции с обменом или без обмена частицей.

Эта сложная картина переходов из одного режима в другой возможна благодаря бесконечности дополнительных интегралов задач с $\omega \neq 0$ и соответствует явлениям, наблюдаемым в химии, атомной, ядерной физике и в физике элементарных частиц. Такой тип поведения невозможен во вполне интегрируемых по Буру - Лиувиллю задачах, в которых из-за однозначности интегралов возможно только бесконечное повторение однотипных циклов, что мы видели в случае $\omega = 0$.

Результаты численных расчетов проекций траекторий на $\Pi_{x\varphi}^{(2)}$ до и после резонанса показаны на рис. 6 а, б соответственно для реакций с обменом ($\Delta N = 3$) и без обмена ($\Delta N = 4$). Соответственно мировые линии трех частиц приведены на рис. 7 а, б, а вид траекторий $\mathcal{S}(\varphi)$ на рис. 8 а, б. Типичное резонансное поведение функции $\Delta(N) = f_{\kappa}^{(N)} - f_{\kappa}^{(N-1)}$ представлено на рис. 9.

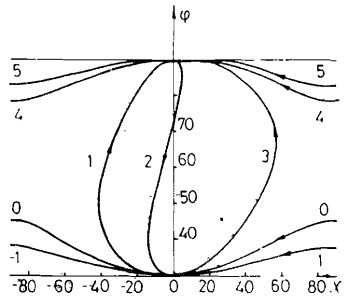


Рис. 6 а

Проекция глобальной траектории на $\Pi_{x\varphi}^{(2)}$ для реакции с обменом ($\Delta N = 3$).

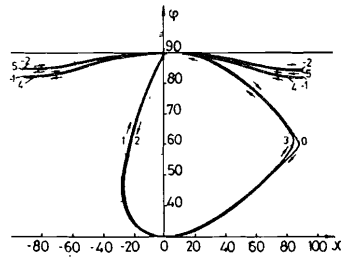


Рис. 6 б

Проекция глобальной траектории на $\Pi_{x\varphi}^{(2)}$ для реакции без обмена ($\Delta N = 4$).

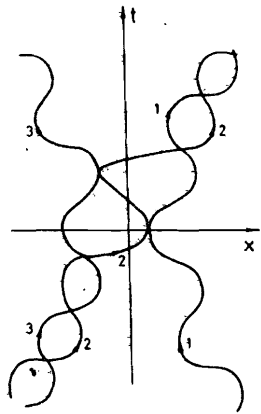
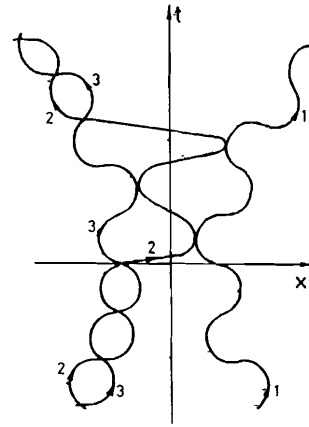


Рис. 7 а

Мировые линии трех частиц при реакции с обменом.

Рис. 7 б

Мировые линии трех частиц при реакции без обмена.

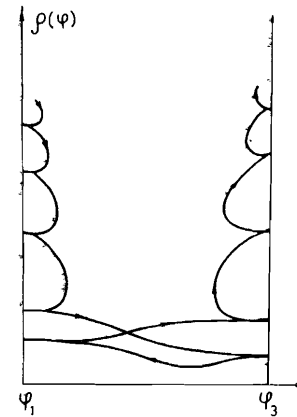


Рис. 8 а

Траектория $\mathcal{S}(\varphi)$ при реакции с обменом.

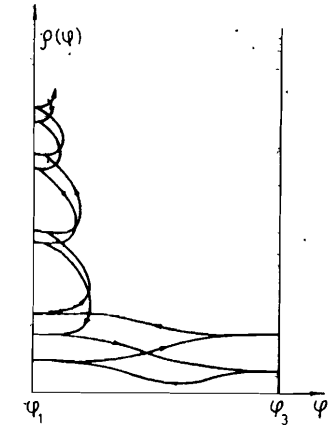


Рис. 8 б.

Траектория $\mathcal{S}(\varphi)$ при реакции без обмена.

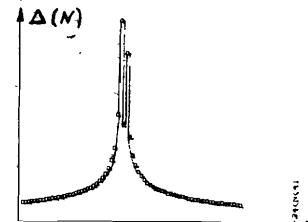


Рис. 9

Отметим необычный способ возникновения трехчастичного резонансного состояния, во время которого проекция траектории на $\Pi_{x\varphi}^{(2)}$ лежит внутри области около точки $\{\varphi = \varphi_2, x = 0\}$ с граница-

ми из четырех сепаратрис, связывающих седла $\{\varphi = \varphi_2; \chi = \pm \pi/2\}$ с узлами $\{\varphi = \varphi_{1,3}; \chi = 0\}$ - см. рис. 2б. В отличие от обычных резонансов осцилляторного типа (см., например, в [4, 5]), внутри этой области резонанса нет эллиптической особой точки. Существование трехчастичного резонанса связано только с гиперболическими особыми точками, что приводит к показанному на рис. 6 а, б виду проекций траекторий в области резонанса.

6. Основные свойства движений с $|\epsilon| \neq 0$

Случай $|\epsilon| \neq 0$ существенно сложнее. В рассматриваемых нами задачах с $\alpha(\varphi)$ вида (18) и $\omega \neq 0$ движения с $|\epsilon| \neq 0$, по-видимому, не являются примитивными, т.е. теперь нельзя понизить до первого порядка уравнения траектории (6). Легко проверить, что векторное поле \vec{N} не задает симметрии фазового потока системы (10), так как при $|\epsilon| \neq 0$ $[\vec{X}_{\omega, \epsilon}, \vec{N}] \neq \lambda_1 \vec{X}_{\omega, \epsilon} + \lambda_2 \vec{N}$. В результате проекции траекторий на $\Pi_{\chi\varphi}^{(2)}$ пересекаются (см. рис. 10) и для них нет дифференциального уравнения первого порядка на этом торе.

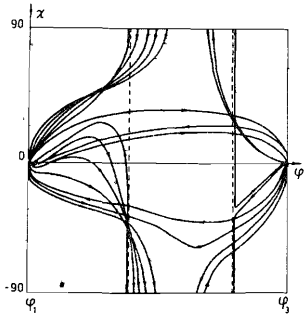


Рис. 10
Проекция траектории на $\Pi_{\chi\varphi}^{(2)}$ при $\epsilon < 0$ в гравитационной задаче.

Покажем, что доказательство неинтегрируемости случая с $|\epsilon| = 0$ сводится к исследованию интеграла $I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$, свойства которого излагались выше. Действительно, если ввести в качестве независимой переменной $z = I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$, легко показать, что у системы (10) нет независимого от z первого интеграла. Для этого нужно исследовать совместимость системы частных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\vec{X}_{\omega, \epsilon} I = 0, \quad \vec{Z} I = 0,$$

где $\vec{Z} = \partial_z$. Согласно теореме Фробениуса [24] условие совместимости есть $[\vec{Z}, \vec{X}_{\omega, \epsilon}] = \lambda_1 \vec{Z} + \lambda_2 \vec{X}_{\omega, \epsilon}$. С учётом явного вида полей $\vec{X}_{\omega, \epsilon}$ и \vec{Z} оно сводится к требованию $0 \equiv \partial_\chi(\text{ctg } \chi) = -\sin^{-2} \chi$, что, очевидно, никогда не выполняется.

В результате любой первый интеграл системы (10) является бесконечной функцией вместе с $I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$, т.е. вся проблема доказательств неинтегрируемости сводится к исследованию бесконечнозначности интеграла $I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$, который является источником бесконечнознач-

ности всех дополнительных интегралов в рассматриваемых нами задачах трех частиц.

Тогда исследования пункта 3 показывают, что при $\omega \neq 0$ задачи с функцией $\alpha(\varphi)$ вида (18), в том числе ньютоновская и кулоновская задачи трех частиц на прямой, неинтегрируемы по меньшей мере при почти всех значениях масс или зарядов. До полного доказательства их неинтегрируемости остается показать бесконечнозначность интеграла $I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi)$ при значениях масс (зарядов) из некоторого множества нулевой меры.

Случай $\omega = 0$ вполне интегрируем, и при $|\epsilon| \neq 0$ имеется полный набор глобальных первых интегралов:

$$I_{0, \epsilon}^{(1)} = [-\alpha(\varphi) \sin^2 \chi + \epsilon \cos^2 \chi \xi^2]^{1/2},$$

$$I_{0, \epsilon}^{(2)} = 5 [ch \gamma + sh \gamma \sqrt{1 - \epsilon (I_{0, \epsilon}^{(1)})^{-2} \xi^2}]^{-1},$$

где

$$\gamma(\chi, \varphi) = \cos^{-1} \chi \partial_{\chi\omega}^2 I_{\omega, 0}^{(1)}(\chi, \varphi) \Big|_{\omega=0}.$$

При $\omega \neq 0$ с помощью компонент $M_{(|\epsilon|=0)}^{(3)}$ и $M_{(|\epsilon|=\infty)}^{(3)}$ множества примитивности фазового потока задачи можно построить ряды с разными областями сходимости для полного набора локальных первых интегралов методом последовательных приближений [16]. Однако они не дают представления о качественном поведении системы.

В вещественной области переменных на $M_{(\epsilon)}^{(3)}$ имеются следующие особые точки и линии:

1. Точки тройных столкновений:

$$\varphi_{2; n_1, n_2} = \varphi_2 + n_1 \pi; \quad \chi_{2; n_1, n_2} = \pi(n_2 + 1/2); \quad \xi_{2; n_1, n_2} = 0; \quad n_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Собственные значения J_z^+ матрицы Якоби \hat{J} имеют прежний вид, как для точек $S_{2; n_1, n_2}$ на $\Pi_{\chi\varphi}^{(2)}$, а третье собственное значение получается с $D^0 = -2$. Эти точки есть седлоузлы и проецируются в точки $S_{2; n_1, n_2}$ на $\Pi_{\chi\varphi}^{(2)}$. Качественное поведение траекторий в их окрестности показано на рис. 11.

Перечислим некоторые свойства точек тройных столкновений: а) поведение траекторий в их окрестностях не зависит от ϵ ; б) многообразие решений, достигающих точки тройного удара, есть гладкое двумерное многообразие Σ_S в $M_{(\epsilon)}^{(3)}$, которое касается плоскости, натянутой на собственные векторы $|D_z^0\rangle$ и $|D_2^0\rangle$ матрицы Якоби \hat{J} . Это обобщает результат Сигала из гравитационной задачи на потенциалы вида (3); в) качественная картина не зависит от ω ;

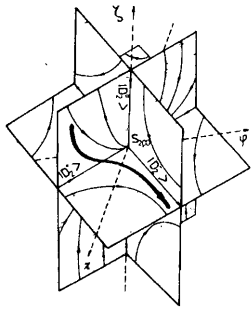


Рис. 11

Фазовый поток в окрестности тройного удара.

Они проектируются в точки $S_{k;n_1,n_2}$ на $\Pi_{\chi,\varphi}^{(2)}$, описанных подробно выше, так как матрица Якоби J не зависит от S . К известным собственным значениям добавляется $J^0 = 0$. В этих точках: а) поведение траекторий не зависит от ε ; б) локально траектории ложатся на поверхности $S = const$, где имеется уже изученный нами регуляризуемый резонансный узел; в) J^\pm и J^0 есть константы, не зависящие от ω и от ε .

3. Особая линия L^{sing} на поверхности Хилла $V(\rho, \varphi) = \varepsilon$

$$\chi = \chi(\varphi) = \arctg[n^{-1}\alpha'(\varphi)/\alpha(\varphi)]; \quad S = S(\varphi) = [\alpha(\varphi)/\varepsilon]^{-1/n}; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Собственные значения матрицы Якоби есть

$$J^+(\varphi) = 2ab\sqrt{n^2 + \alpha'^2/\alpha^2}; \quad J^-(\varphi) = -ab\sqrt{n^2 + \alpha'^2/\alpha^2}; \quad J^0(\varphi) = 0,$$

и в плоскости векторов $|J^\pm(\varphi)\rangle$ имеются резонансные седла:

$$J^+(\varphi)/J^-(\varphi) = -2.$$

Поведение системы в окрестности L^{sing} зависит от ε . В частности, при $\alpha(\varphi)/\varepsilon < 0$ линия L^{sing} находится в области комплексных значений переменных (например, в гравитационной задаче при $E > 0$). При $\varepsilon = 0$ нет линии L^{sing} .

Трансферзально к поверхности Хилла, которая есть граница разрешенной области для классического движения в $M^{(3)}(\varepsilon)$, из L^{sing} выходит сепаратрисная поверхность Σ_H , состоящая из сепаратрисных решений системы (10). Это траектории, входящие в точки поворота (седла), из которых состоит линия L^{sing} . Численный анализ показывает,

г) при $\omega \neq 0$ для почти всех значений масс (зарядов) отношение D_2^-/D_2^0 иррационально, и точка тройного соударения нерегуляризуема, что обобщает результат из [7]; д) вблизи тройного столкновения почти все траектории идут в двух направлениях, касающихся векторов $|D_2^\pm\rangle$, что должно приводить к наблюдаемым явлениям, например, в распадах К-мезонов на 3π -мезона.

2. Особые линии парных столкновений $L_{k;n_1,n_2}$ при $k = 1, 3, 5$:

$$\varphi = \varphi_k + n_1\pi; \quad \chi = n_2\pi;$$

$$S \in \mathbb{R}_S^{(1)+}; \quad n_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

что в обратном направлении эти траектории входят в линии парных столкновений $L_{k;n_1,n_2}$ на разных высотах S и с разными коэффициентами $ctg\beta_k$ (см. (23)).

Аналогичным образом в линии парных столкновений входят и решения, образующие двумерную поверхность Σ_S из траекторий, достигающих в другом конце тройного удара. Если в некоторой точке на $L_{k;n_1,n_2}$ с одной стороны входит решение из Σ_S , а с другой стороны — из Σ_H и они имеют одинаковые коэффициенты $ctg\beta_k$, то описанное в пункте 5 аналитическое продолжение решений через точки парных столкновений приведет к периодическому решению из двух таких кусков, т.е. о одним парным столкновением между точкой тройного удара и точкой поворота. Подобным образом можно получить и периодические решения, при которых между двумя кусками на Σ_S и Σ_H система проходит произвольное конечное число кусков траектории, начинающихся и кончающихся парным столкновением. Таким образом, мы видим, что при $\alpha(\varphi)/\varepsilon > 0$ (например, в гравитационной задаче, при $E < 0$) имеется дискретное множество коллинеарных периодических решений, которые удобно занумеровать числом парных столкновений между точкой тройного удара и точкой поворота. Простейшее из них — без парных столкновений — можно описать в элементарных функциях [13], и оно есть гомотетическое решение либрационного типа (с $\varphi = const$).

Исследование расположения этих решений в $M^{(3)}(\varepsilon)$ позволило бы проверить гипотезу Пуанкаре о том, что изолированные периодические решения в задаче трех тел заполняют всюду плотно изознергетическую поверхность при $E < 0$, и дало бы независимый способ доказательства неинтегрируемости задачи [1, 2].

Кроме указанных имеются особые линии на бесконечной поверхности $S = \infty$: L_a^∞ и L_b^∞ , см. рис. 12, где для наглядности

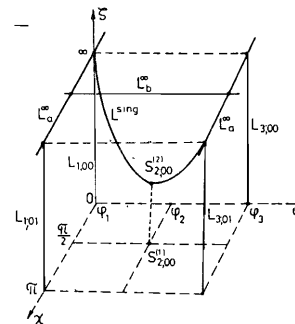


Рис. 12
Вещественные особые точки и особые линии при $\alpha(\varphi)/\varepsilon > 0$.

поверхность $S = \infty$ показана на конечном расстоянии.

Нетрудно также описать и комплексные особенности системы (10), что мы не будем делать здесь.

Интересной и важной задачей остается построение полного фазового портрета задачи с $\varepsilon \neq 0$, сечения Пуанкаре и исследование возникновения хаоса.

По отношению к рассмотренным в пункте 5 эффектам возникновения трехчастичного резонанса можно доба-

вить, что его время жизни, измеряемое числом парных столкновений ΔN , зависит от масс и зарядов. При $\varepsilon \neq 0$ численные расчеты показывают, что до распада (когда $\rho \rightarrow \infty$) по некоторому из возможных каналов система может неоднократно заходить в область трехчастичного резонанса. Такая "мультирезонансная" траектория имеет сложный вид в $M^{(3)}(\varepsilon)$.

Литература

1. Арнольд В., Козлов В., Нейштадт А. ИНТ, сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, З.М.: ВИНТИ, 1985.
2. Козлов В. УМН, 38, с. 3, 1983.
3. Hietarinta J. Phys. Rep., 147 (2), p. 89, 1987.
4. Лихтенберг А., Либрман М. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
5. Заславский Г. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
6. Hagihara Y. Celestial Mechanics, vol. I, II, Cambridge-Massachusetts - London: MIT Press, 1971, vol III-Y, Tokio Press, 1976.
7. McGehee R. Invent. Math., 27, p. 191, 1974.
8. Percival I., D. Richards. Adv. At. Mol. Phys., II, p. 1, 1975.
9. Стиббингс Р., Даннинг Ф. (ред.). Ридберговские состояния атомов и молекул. М.: Мир, 1986.
10. Атомы в астрофизике. Под ред. Ф. Берка, В. Эйснера, Д. Хаммера, И Персиваля. М.: Мир, 1986.
11. Manz J. Comments At. Mol. Phys., 17 (2), p. 91, 1985.
12. Физиев П., Физиева Ц. Препринт ОИЯИ, Дубна, P2-86-130, 1986.
13. Физиев П., Физиева Ц. Препринт ОИЯИ, Дубна, P2-86-131, 1986.
14. Физиев П., Физиева Ц. Препринт ОИЯИ, Дубна P4-86-339, 1986.
15. Fiziev P. Lett. Math. Phys., 12, p. 267, 1986.
16. Fiziev P. Bulg. J. Phys., 14(2), p. 117, 1987.
17. Johnson B. J. Chem Phys., 79 (4), p. 1906, 1983.
18. Fiziev P., Fizieva Ts. Few-Body Systems, 2 (2), p. 71, 1987.
19. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика. М.: ГИФМЛ, 1958.
20. Бржо А. Локальный метод анализа дифференциальных уравнений. М., Наука, 1979.
21. Арнольд В., Ильяшенко Ю.И. ИНТ, сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, I, М.: ВИНТИ, 1985.
22. Арнольд В. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
23. McGehee R. Comment Math. Helvetic, 56, p. 524, 1981.
24. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., Мир, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 октября 1987 года.

Физиев П.П., Мишонов Т.М., Физиева Ц.Я.
Эффекты неинтегрируемости в классической задаче
трех частиц на прямой

P2-87-737

Рассмотрена классическая задача трех частиц на неподвижной прямой с однородными потенциалами взаимодействия, которые имеют вид $V = \rho^{\alpha} \alpha(\varphi)$ в гиперсферических координатах. В этот класс входят системы с двухчастичным ньютоновским, кулоновским, коллоидовым, осцилляторным и с другими типами взаимодействий. Некоторые из них являются вполне интегрируемыми по Буру - Лиувиллю, а другие - нет. На основе исследования новой аналитической системы уравнений первого порядка для траекторий на изоэнергетической поверхности показано, что при почти всех значениях масс и зарядов все дополнительные интегралы ньютоновской и кулоновской задач трех частиц являются бесконечнозначными функциями. В результате в этих неинтегрируемых задачах возникают трехчастичные связанные резонансные состояния с конечным временем жизни, реакции с обменом и без обмена частицей и т.д. Показано, что такие эффекты невозможны в системах, которые являются вполне интегрируемыми по Буру - Лиувиллю из-за однозначности их первых интегралов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С. Виноградовой

Fiziev P.P., Mishonov T.M., Fizieva Ts.Ya.
Nonintegrable Effects in Classical Three-Particle
Problem on the Line

P2-87-737

Three-particle problem on a straight line with homogenous potentials which have the form of $V = \rho^{\alpha} \alpha(\varphi)$ in hyperspherical coordinates is considered. This class of potentials includes the systems with two-particle Newton, Coulomb, Calogero, oscillator and other interactions. Some of these problems are Bour Liouville integrable, others are not. New analytical system of first order differential equations for trajectory on the Isoenergy surface is investigated. It is shown that at nearly all values of masses or charges of particles all additional first integrals of Newton and Coulomb three-particle problems are infinite-valued functions. As a consequence, in these nonintegrable problems there exists three-particle resonance (bound state with finite life time), reactions with or without particle exchange etc. Such effects are not possible in Bour - Liouville integrable systems because of unambiguosity of their first integrals.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987