87-687

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-687

Ли Ам Гир

О ФОРМАЛИЗМЕ ЛИУВИЛЛЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1987

Уравнение Лиувилля хорошо известно в неравновесной статистической механике и является ее исходной точкой [1,2]. Это связано с тем, что уравнение Лиувилля эквивалентно уравнению движения при соответствующих условиях. Действительно, классическое уравнение Лиувилля эквивалентно уравнению Гамильтона, если за начальное распределение принять δ-распределение в фазовом пространстве [1-3]; и квантовое уравнение Лиувилля /или уравнение Вигнера/ эквивалентно уравнению Шредингера, если на вигнеровскую функцию распределения наложить ограничения из адемпотентности матрицы плотности [4,7] /здесь "эквивалентность" понимается таким образом, что из одного уравнения можно получить другое и наоборот/.

Принимая во внимание такую эквивалентность, видим, что уравнение Лиувилля как отправная точка теории, может рассматриваться не только в неравновесной статистической механике, но также и в квантовой теории поля.

К сожалению, в квантовой теории поля такой подход мало изучен. В работах [5] введено представление фазового пространства в квантовой теории поля. Использование аналога когерентных представлений позволяет получить уравнение Лиувилля для скалярного поля. В обзорных статьях [6,7] изложены разные применения представлений Вигнера. Квантовая теория рассеяния на основе функции распределения Вигнера изложена в [8,6,13].

Формализм Лиувилля может быть полезен, так как уравнение Лиувилля обладает интересными свойствами:

а/ Лиувиллиан $\hat{L}$ может быть разделен на классическую часть $\hat{L}_{кл.}$ и квантовую поправку $\hat{L}_{к.п.}$ так же, как и в нерелятивистской квантовой механике [19]. Это дает возможность построить теорию возмущения в окрестности классических решений.

б/ В случае свободного поля уравнение Лиувилля в классической и квантовой теории совпадают /заметим, однако, что функционалы распределения подчиняются различным условиям/. Это, может быть, позволит построить квантовую теорию свободной релятивистской струны в 4-мерном пространстве-времени.

в/ Расходимости квантовой теории поля появляются в другой форме.

г/ На этом пути можно попытаться строить статистическую квантовую теорию поля, так как "смешанные состояния" поля также подчиняются уравнению Лиувилля.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, В КОТОРЫХ ДИАГОНАЛИЗИРОВАНЫ ОПЕРАТОРЫ ПОЛЯ

Для получения уравнения Лиувилля в квантовой теории поля нужно вводить представления, в которых диагонализированы операторы поля /такие представления применялись различными авторами, см, например,[10]/. Использование этих представлений позволяет все рассмотрения проводить таким же образом, как и в нерелятивистской квантовой механике.

Прежде чем перейти к рассмотрению, введем некоторые обозначения. Условимся операторы обозначать буквами с символом "^", например, $\hat\phi(\vec{x})$, $\hat\pi(\vec{x})$, $\hat\psi(\vec{x})$, $\hat{\bar\psi}(\vec{x})$. Их "собственные значения" обозначим соответствующими буквами без символа "^", например, $\phi(\vec{x})$, $\pi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x})$, $\bar\psi(\vec{x})$.

Далее, всегда будем работать в картине Шредингера и исходить из канонически квантованной операторной теории поля. Для построения теории возмущений в окрестности классических решений сохраняем в формулах постоянную Планка $\hbar$ как величину, характеризующую отклонение квантовых эффектов от классических.

а/ Бозонное поле

Для простоты рассмотрим оператор $\hat\phi(\vec{x})$ вещественного скалярного поля и его канонически сопряженный импульс $\hat\pi(\vec{x})$, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat\phi(\vec{x}), \hat\pi(\vec{x})] = i\hbar\delta(\vec{x}-\vec{x}'),$$
$$[\hat\phi(\vec{x}), \hat\phi(\vec{x}')] = [\hat\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = 0. \qquad /1.1/$$

Для фиксированных $\vec{x}$ собственные векторы операторов $\hat\phi(\vec{x})$ и $\hat\pi(\vec{x})$ определяются соотношениями:

$$\hat\phi(\vec{x})\,|\phi'(\vec{x})\rangle = \phi'(\vec{x})\,|\phi'(\vec{x})\rangle; \quad \langle\phi'(\vec{x})|\,\hat\phi(\vec{x}) = \langle\phi'(\vec{x})|\,\phi'(\vec{x}). \qquad /1.2/$$

Для переменных $\vec{x}$ собственные векторы $\phi(\vec{x})$ и $\pi(\vec{x})$ представляют собой функциональные векторы, т.е.

$$\hat\phi(x)\,|\phi'\rangle = \phi'(\vec{x})\,|\phi'\rangle; \quad \langle\phi'|\,\hat\phi(\vec{x}) = \langle\phi'|\,\phi'(\vec{x}), \qquad /1.3/$$

где

$$|\phi'\rangle \equiv \prod_{\vec{x}} |\phi'(\vec{x})\rangle \equiv |\{\phi'(\vec{x})\},\ \vec{x}\in R^3\rangle. \qquad /1.4/$$

Так как $\hat\phi(\vec{x})$ эрмитов, то его собственные /функциональные/ векторы ортогональны и образуют полную систему:

$$\langle\phi'|\phi''\rangle = \delta[\phi' - \phi''] \qquad /1.5/$$

и

$$\int \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})\,|\phi\rangle\langle\phi| \equiv \int D\phi(\vec{x})\,|\phi\rangle\langle\phi| = I, \qquad /1.6/$$

где δ-функционал определяется следующим образом:

$$\delta[\phi' - \phi''] = \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi'(\vec{x}) - \phi''(\vec{x}))\,\pi(\vec{x})}. \qquad /1.7/$$

Это представление будем называть "ϕ-представлением" /отметим отличие его от когерентного представления, в котором диагонализирован $\hat\phi^{(+)}(\vec{x})$ или $\hat\phi^{(-)}(\vec{x})$/. Оно является координатным представлением для поля.

Аналогично π-представление /т.е. импульсное представление для поля/ определяется следующими соотношениями:

Для фиксированных $\vec{x}$ пусть

$$\hat\pi(\vec{x})\,|\pi'(\vec{x})\rangle = \pi'(\vec{x})\,|\pi'(\vec{x})\rangle; \quad \langle\pi'(\vec{x})|\,\hat\pi(\vec{x}) = \langle\pi'(\vec{x})|\,\pi'(\vec{x}). \qquad /1.8/$$

Тогда для переменных $\vec{x}$ имеем

$$\hat\pi(\vec{x})\,|\pi'\rangle = \pi'(\vec{x})\,|\pi'\rangle; \quad \langle\pi'|\,\hat\pi(\vec{x}) = \langle\pi'|\,\pi'(\vec{x}), \qquad /1.9/$$

где

$$|\pi'\rangle \equiv \prod_{\vec{x}} |\pi'(\vec{x})\rangle \equiv |\{\pi'(\vec{x})\},\ \vec{x}\in R^3\rangle. \qquad /1.10/$$

Соотношение ортогональности:

$$\langle\pi'|\pi''\rangle = \delta[\pi' - \pi''] \equiv \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\pi'(\vec{x}) - \pi''(\vec{x}))\,\phi(\vec{x})}. \qquad /1.11/$$

Соотношение полноты:

$$\int \prod_{\vec{x}} d\pi(\vec{x})\,|\pi\rangle\langle\pi| \equiv \int D\pi(\vec{x})\,|\pi\rangle\langle\pi| = I. \qquad /1.12/$$

Переход от ϕ-представления к π-представлению осуществляется следующим образом:

$$\langle\phi|\pi\rangle = N e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}\,\phi(\vec{x})\,\pi(\vec{x})}, \qquad N = \prod_{\vec{x}} (2\pi\hbar)^{-3/2}. \qquad /1.13/$$

Соотношения /1.2/-/1.3/ представляют собой тривиальные обобщения соотношений, которые имеют место в системе с конечным числом степеней свободы, на случай системы с бесконечным числом степеней свободы. В этом представлении возможна реализация операторов $\hat{\pi}$ в виде /см,/1.9//:

$$\hat{\pi}(\vec{x})\,|\phi'\rangle = -i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi'(\vec{x})}\,|\phi'\rangle\,; \quad \langle\phi'|\,\hat{\pi}(\vec{x}) = i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi'(\vec{x})}\,\langle\phi'|\,. \qquad /1.14/$$

Используя это представление, можно получить преобразования Вейля в квантовой теории поля /для квантовой механики преобразования Вейля детально рассмотрены в [12,15] /.

Например, для вещественного скалярного поля, гамильтониан которого равен

$$\hat{H} = \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}\hat{\pi}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}((\nabla\hat{\phi}(\vec{x}))^2 + \mu^2\hat{\phi}^2(\vec{x})) + U(\hat{\phi}(\vec{x}))\}\,, \qquad /1.15/$$

получим следующий результат:

$$\langle\phi'|\hat{H}|\phi''\rangle = \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})\,d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}\,\pi(\vec{x})(\phi'(\vec{x})-\phi''(\vec{x}))} \times$$
$$\times\,\delta[\phi - \frac{\phi'+\phi''}{2}]\cdot H_{кл}[\phi,\pi]\,, \qquad /1.16/$$

где

$$H_{кл.}[\phi,\pi)] = \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}\pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}((\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \mu^2\phi^2(\vec{x})) + U(\phi(\vec{x}))\}. \qquad /1.17/$$

Рассмотрим подробнее это вычисление:

$$\langle\phi'|\frac{1}{2}\int d\vec{x}\,\hat{\pi}^2(\vec{x})\,|\phi''\rangle = \int\prod_{\vec{x}} d\pi(\vec{x})\,\langle\phi'|\,\frac{1}{2}\int d\vec{x}\,\hat{\pi}^2(\vec{x})\,|\pi\rangle\langle\pi|\phi''\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\int\prod_{\vec{x}} d\pi(\vec{x})\int d\vec{x}\,\pi^2(\vec{x})\,\langle\phi'|\pi\rangle\langle\pi|\phi''\rangle =$$
$$= \int\prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi'-\phi'')\,\pi(\vec{x})} \times \int d\vec{x}\,\pi^2(\vec{x}) = \qquad /1.18/$$
$$= \int\prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})\,d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi'(\vec{x})-\phi''(\vec{x}))\,\pi(\vec{x})}\,\delta[\phi - \frac{\phi'+\phi''}{2}]\,\frac{1}{2}\int d\vec{x}\,\pi^2(\vec{x}).$$

И далее:

$$\langle\phi'|\int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi})^2 + \frac{\mu^2}{2}\hat{\phi}^2 + U(\hat{\phi})\}\,|\phi''\rangle =$$
$$= \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla\phi'')^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi''^2 + U(\phi'')\}\,\langle\phi'|\phi''\rangle =$$
$$= \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla\phi'')^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi''^2 + U(\phi'')\}\,\delta[\phi'-\phi''] = \qquad /1.19/$$
$$= \int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla(\frac{\phi'+\phi''}{2}))^2 + \frac{\mu^2}{2}(\frac{\phi'+\phi''}{2})^2 + U(\frac{\phi'+\phi''}{2})\}\,\delta[\phi'-\phi''] =$$
$$= \int\prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})\,\delta[\phi - \frac{\phi'+\phi''}{2}]\,\delta[\phi'-\phi'']\int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + U(\phi)\} =$$
$$= \int\prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})\,d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi'-\phi'')\,\pi(\vec{x})}\cdot\delta[\phi - \frac{\phi'+\phi''}{2}]\,\times$$
$$\times\int d\vec{x}\,\{\frac{1}{2}(\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2(\vec{x}) + U(\phi(\vec{x}))\}\,.$$

Здесь использовано определение δ-функционала /1.7/ и соотношения /1.12/, /1.13/.

б/ Фермионное поле

Найдем представление, в котором операторы фермионного поля диагонализированы и удовлетворяют следующим соотношениям антикоммутации:

$$\{\hat{\psi}_a(\vec{x}),\,\hat{\bar{\psi}}_\beta(\vec{x}')\} = (\gamma_0)_{a\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,,\quad \hat{\bar{\psi}} = \hat{\psi}^+\gamma_0\,; \qquad /1.20/$$
$$\{\hat{\psi}_a(\vec{x}),\,\hat{\psi}_\beta(\vec{x}')\} = (\hat{\bar{\psi}}_a(\vec{x}),\,\hat{\bar{\psi}}_\beta(\vec{x}')\} = 0.$$

Аналогично случаю бозонного поля определим

$$\hat{\psi}_a(\vec{x})\,|\psi'\rangle = \psi'_a(\vec{x})\,|\psi'\rangle\,, \qquad /1.21/$$

$$<\bar\psi'|\hat{\bar\psi}_\alpha(\vec x) = <\bar\psi'|\bar\psi'_\alpha(\vec x) , \qquad /1.22/$$

где $\psi_\alpha(\vec x)$, $\psi_\alpha(\vec x)$ представляют собой образующие алгебры Грассмана.

В этом представлении /т.е. в ψ-представлении/ для нахождения нужных соотношений воспользуемся условием полноты в пространстве Фока

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_n |\vec x_1, \dots, \vec x_n><\vec x_n, \dots, \vec x_1| = I , \qquad /1.23/$$

где

$$|\vec x_1, \dots, \vec x_n> = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat\psi^+(\vec x_1) \dots \hat\psi^+(\vec x_n)|0>. \qquad /1.24/$$

Тогда имеем разложение

$$|\psi> = \sum_{n=0}^{\infty}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_n |\vec x_1, \dots, \vec x_n><\vec x_n, \dots, \vec x_1|\psi> =$$

$$/1.25/$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_n <\vec x_n, \dots, \vec x_1|\psi>|\vec x_1, \dots, \vec x_n>.$$

Для определения коэффициентов разложения $<\vec x_n, \dots, \vec x_1|\psi>$ умножим $<\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|$ слева на выражение /1.21/:

$$<\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|\psi(\vec x_n)|\psi> = <\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|\psi>\psi(\vec x_n). \qquad /1.26/$$

С другой стороны, учитывая действие оператора "уничтожения" $\hat\psi(\vec x)$ на вектор $<\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|$, имеем

$$<\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|\hat\psi(\vec x_n)|\psi> = <\vec x_n, \dots, \vec x_1|\psi>\sqrt{n} . \qquad /1.27/$$

Из /1.26/ и /1.27/ следует

$$\sqrt{n}<\vec x_n, \dots, \vec x_1|\psi> = <\vec x_{n-1}, \dots, \vec x_1|\psi>\psi(\vec x_n), \qquad /1.28/$$

откуда

$$<\vec x_1|\psi> = <0|\psi>\psi(\vec x_1),$$

$$<\vec x_2, \vec x_1|\psi> = <0|\psi>\frac{1}{\sqrt{2!}}\psi(\vec x_2)\psi(\vec x_1), \qquad /1.29/$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$<\vec x_1, \dots, \vec x_1|\psi> = <0|\psi>\frac{1}{\sqrt{n!}}\psi(\vec x_n), \dots, \psi(\vec x_1) ,$$

где $\psi(\vec x_1)$ представляют собой образующие алгебры Грассмана.

После подстановки /1.29/ в /1.25/ получим

$$|\psi> = <0|\psi>\sum_{n=0}^{\infty}\int d\vec x_1, \dots, d\vec x_n\frac{1}{\sqrt{n!}}\psi(\vec x_n)\dots\psi(\vec x_1)|\vec x_1, \dots, \vec x_n> =$$

$$/1.30/$$

$$= <0|\psi>\sum_{n=0}^{\infty}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_n\frac{1}{n!}\psi(\vec x_n)\dots\psi(\vec x_1)\hat\psi^+(\vec x_1)\dots\hat\psi^+(\vec x_n)|0> =$$

$$= <0|\psi>e^{\int d\vec x\psi(\vec x)\hat\psi^+(\vec x)} .$$

Аналогично получаем для сопряженного вектора

$$<\bar\psi| = <0|e^{\int d\vec x\hat{\bar\psi}(\vec x)\psi^+(\vec x)} . <\bar\psi|0>. \qquad /1.31/$$

При этом, следуя [10], удобно выполнить нормировку:

$$<0|\psi> = <\bar\psi|0> = 1. \qquad /1.32/$$

Окончательно имеем

$$|\psi> = e^{\int d\vec x\psi(\vec x)\hat\psi^+(\vec x)}|0> ; \quad <\bar\psi|e^{\int d\vec x\hat{\bar\psi}(\vec x)\psi^+(\vec x)} . \qquad /1.33/$$

Теперь можем определить внутреннее произведение векторов:

$$<\bar\psi'|\psi''> = <0|e^{\int d\vec x\hat{\bar\psi}(\vec x)\psi'^+(\vec x)}e^{\int d\vec x\psi''(\vec x)\hat\psi^+(\vec x)}|0> =$$

$$= \sum_{k,\ell=0}^{\infty}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_k\int d\vec y_1 \dots d\vec y_\ell\frac{1}{\sqrt{k!\ell!}}\psi'^+(\vec x_1)\dots\psi'^+(\vec x_k) \times$$

$$/1.34/$$

$$\times <\vec x_k, \dots, \vec x_1|\vec y_1, \dots, \vec y_\ell>\psi''(\vec y_\ell), \dots, \psi''(\vec y_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int d\vec x_1 \dots d\vec x_k\psi'^+(\vec x_k)\dots\psi'^+(\vec x_1)\psi''(\vec x_1)\dots\psi''(\vec x_k) =$$

$$= \exp\int d\vec x\,\psi'^+(\vec x)\psi''(\vec x) = \exp\int d\vec x\,\bar\psi'(\vec x)\gamma_0\psi''(\vec x) .$$

В частном случае имеем

$$<\bar{\psi}|\psi> = \exp \int d\vec{x}\, \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0 \psi(\vec{x}) \,. \qquad /1.35/$$

Докажем соотношение полноты:

$$\int D\bar{\psi}(\vec{x})\, D\psi(\vec{x})\; |\psi><\bar{\psi}| = I \,, \qquad /1.36/$$

где

$$D\bar{\psi}(\vec{x})\, D\psi(\vec{x}) = \prod_{\vec{x}} \prod_{\alpha=1}^{4} d\bar{\psi}_\alpha(\vec{x})\, d\psi_\alpha(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\, \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0 \psi(\vec{x})} \equiv$$

$$\equiv \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, d\psi(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\, \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0 \psi(\vec{x})} \,. \qquad /1.37/$$

В самом деле, с учетом соотношений /1.33/ и /1.37/ имеем

$$\int D\bar{\psi}(\vec{x})\, D\psi(\vec{x})\; |\psi><\bar{\psi}| = \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, d\psi(\vec{x}) \;\times$$

$$\times\, e^{\int d\vec{x}\, \psi(\vec{x})\, \gamma_0 \psi(\vec{x})}\; e^{\int d\vec{x}\, \psi(\vec{x})\, \hat{\psi}^+(x)} |0><0|\, e^{\int d\vec{x}\, \hat{\psi}(\vec{x})\, \psi(\vec{x})} =$$

$$= \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!\,\ell!}} \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_k \int d\vec{y}_1 \dots d\vec{y}_\ell \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, d\psi(\vec{x}) \;\times$$

$$\times\, \psi(\vec{x}_1) \dots \psi(\vec{x}_k)\, \psi^+(\vec{y}_\ell) \dots \psi^+(\vec{y}_1)\, e^{-\int d\vec{x}\, \psi^+(\vec{x})\, \psi(\vec{x})} |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k><\vec{y}_\ell, \dots, \vec{y}_1| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_k |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k><\vec{x}_k, \dots, \vec{x}_1| = I \,.$$

Здесь было использовано соотношение, доказанное Березиным /см. /9, с. 68/ /:

$$\int \prod d\psi^+(\vec{x})\, d\psi(\vec{x})\, e^{-\int \psi^+(\vec{x})\, \psi(\vec{x})\, d\vec{x}} \{ \int d\vec{x} \dots d\vec{x} \;\times$$

$$\times \int d\vec{y}_1 \dots d\vec{y}_\ell\, \psi(\vec{x}_k) \dots \psi(\vec{x}_1)\, F(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k | \vec{y}_k, \dots, \vec{y}_1)\, \psi^+(\vec{y}_1) \dots \psi^+(\vec{y}_\ell) \} =$$

$$= \delta_{k\ell} \cdot k! \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_k\, F(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k | \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_1) \,, \qquad /1.38/$$

$$(\prod_{\vec{x}} d\psi^+(\vec{x})\, d\psi(\vec{x}) = \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, d\psi(\vec{x})) \,.$$

Отметим также соотношения, которые следуют из /1.30/ и /1.31/:

$$\hat{\psi}^+(\vec{x})\, |\psi> = \frac{\delta}{\delta\psi(\vec{x})} |\psi>, \quad \hat{\bar{\psi}}(\vec{x})\, |\psi> = \frac{\delta}{\delta\psi(\vec{x})} \gamma_0 |\psi> \,;$$

$$/1.39/$$

$$<\bar{\psi}|\, \hat{\psi}(\vec{x}) = \frac{\delta}{\delta\psi^+(\vec{x})} <\bar{\psi}| = \gamma_0 \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(\vec{x})} <\bar{\psi}| \,.$$

Введем фермионный δ-функционал. Для этого соотношение полноты /1.36/ вложим в /1.35/:

$$<\bar{\psi}'|\psi''> = \int D\bar{\psi}(\vec{x})\, D\psi(\vec{x})\, <\bar{\psi}'|\psi>\; <\bar{\psi}|\psi''> =$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, d\psi(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\, \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0\, \psi(\vec{x})}\; e^{\int d\vec{x}\, \bar{\psi}'\, \gamma_0 \psi(\vec{x})}$$

$$/1.40/$$

$$\times\, e^{\int d\vec{x}\, \bar{\psi}\, \gamma_0\, \psi''(\vec{x})} = \int \{ \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\, \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0 (\psi(\vec{x}) - \psi'(\vec{x}))} \} \times$$

$$\times \prod_{\vec{x}} d\psi(\vec{x})\, e^{\int d\vec{x} \cdot \bar{\psi}(\vec{x})\, \gamma_0\, \psi''(\vec{x})} \,.$$

Сравнивая этот результат с /1.35/, видим, что δ-функционал можно определить следующим образом:

$$\delta[\psi - \psi'] \equiv \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}(\vec{x})\, e^{-\int d\vec{x}\, \psi(\vec{x})\, \gamma_0 (\psi(\vec{x}) - \psi'(\vec{x}))} \qquad /1.41/$$

и

$$\int \Pi\, d\psi(x)\, \delta[\psi - \psi'] \, e^{\int d\vec{x}\, \bar{\psi}\gamma_0 \psi''(\vec{x})} = e^{\int d\vec{x}\, \bar{\psi}' \gamma_0 \psi''(\vec{x})} . \qquad /1.42/$$

В этом случае /1.40/ тождественно /1.35/ для любых $\bar{\psi}', \psi''$.

2. КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Как пример применения представлений, введенных в п.1, запишем функцию распространения через континуальные интегралы, исходя из канонически квантованной операторной теории поля. Их можно получить без формального введения гамильтонова континуального интеграла /о гамильтоновом континуальном интеграле см. /16, 18/ /. При этом получим также интеграл по траектории в классической теории поля и новое /эквивалентное/ представление континуального интеграла фермионного поля.

а/ Бозонное поле

Используем оператор ядра $\hat{K}(t, t_0)$ вместо оператора эволюции $\hat{U}(t, t_0)$

$$\hat{K}(t, t_0) \equiv \theta(t - t_0)\, \hat{U}(t, t_0), \qquad /2.1/$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Он удовлетворяет уравнению

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \hat{K}(t, t_0) = \delta(t - t_0) \cdot I, \qquad /2.2/$$

где $\hat{H}$ - гамильтониан квантованного поля в картине Шредингера, I - единичный оператор.

Рассмотрим вещественное скалярное поле. Его гамильтониан задан /1.15/ и эволюция вектора состояния записывается выражением

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)\, |\Psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\, |\Psi(t_0)\rangle . \qquad /2.3/$$

Будем использовать ϕ-представление вектора состояния $|\Psi(t)\rangle$, тогда имеем

$$\langle\phi|\Psi(t)\rangle = \langle\phi|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\, |\Psi(t_0)\rangle =$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} d\phi_0(\vec{x})\, \langle\phi|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\, |\phi_0\rangle\langle\phi_0|\Psi(t_0)\rangle . \qquad /2.4/$$

Рассмотрим случай $t > t_0$. Тогда

$$\langle\phi|\Psi(t)\rangle = \int D\phi_0(\vec{x})\; K([\phi], t; [\phi_0], t_0)\, \langle\phi_0|\Psi(t_0)\rangle, \qquad /2.5/$$

где ядро

$$K([\phi], t; [\phi_0], t_0) = \langle\phi|\hat{K}(t, t_0)|\phi_0\rangle =$$

$$= \langle\phi|\theta(t - t_0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\, |\phi_0\rangle \qquad /2.6/$$

представляет собой функцию распространения Фейнмана. Найдем ее в явном виде. По определению /2.1/

$$K([\phi], t; [\phi_0], t_0) = \langle\phi|\hat{K}(t, t_{n-1})\hat{K}(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots \hat{K}(t_1, t_0)|\phi_0\rangle . \qquad /2.7/$$

Используя соотношение полноты /1.6/, перепишем /2.7/ следующим образом:

$$K([\phi], t; [\phi_0], t_0) = \int \prod_{\vec{x}} \prod_{j=1}^{n-1} d\phi_j(x) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \langle\phi_{j+1}|\hat{K}(t_{j+1}, t_j)|\phi_j\rangle, \qquad /2.8/$$

где $t_n = t$, $\phi_n(\vec{x}) = \phi(\vec{x})$.

Если число разбиений n достаточно большое, то тогда получим

$$\langle\phi_{j+1}|\hat{K}(t_{j+1}, t_j)|\phi_j\rangle = \langle\phi_{j+1}|\theta(t_{j+1} - t_j)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_{j+1}-t_j)}\, |\phi_j\rangle \doteq$$

$$\cong \theta(t_{j+1} - t_j)\, \langle\phi_{j+1}|1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_{j+1} - t_j)|\phi_j\rangle =$$

$$= \theta(t_{j+1} - t_j) \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})\, d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x} (\phi_{j+1}(\vec{x}) - \phi_j(\vec{x}))\, \pi(\vec{x})} \times$$

$$\times \delta[\phi - \frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}]\{1 - \frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)H_{кл.}\} \cong$$

$$\cong \theta(t_{j+1}-t_j)\int \prod_{\vec{x}} \frac{d\phi(\vec{x})\,d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi_{j+1}-\phi_j)\pi(\vec{x})} \times \qquad /2.9/$$

$$\times \delta[\phi - \frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}] e^{-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)H_{кл}},$$

где использованы /1.16/ и $H_{кл}$ задан в /1.17/.

Выполняя интегрирование по ϕ, получим

$$<\phi_{j+1}|\hat{K}(t_{j+1},t_j)|\phi_j> \cong \theta(t_{j+1}-t_j)\int \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\exp\frac{i}{\hbar} \times$$

$$\times [\pi(\vec{x})(\phi_{j+1}-\phi_j) - (t_{j+1}-t_j)(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - U(\phi))]\Big|_{\phi=\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}} =$$

$$= \theta(t_{j+1}-t_j)\int \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^3}\exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int dx(-\frac{1}{2}\pi^2 + \pi\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{\phi_{j+1}-\phi_j})\} \times$$

$$\times \exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec{x}[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + U(\phi)]\Big|_{\phi=\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}}.$$

Интегрируя по π, имеем

$$<\phi_{j+1}|\hat{K}(t_{j+1},t_j)|\phi_j> \cong \theta(t_{j+1}-t_j)N_1\exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j) \times \qquad /2.10/$$

$$\times \int d\vec{x}[\frac{1}{2}(\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j})^2 - \frac{1}{2}(\nabla\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})^2 - U(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})]\},$$

где $N_1 = \prod_{\vec{x}}\{2\pi\hbar i(t_{j+1}-t_j)\}^{-3/2}$.

Подставляя /2.10/ в /2.8/ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим известный континуальный интеграл для скалярного поля

$$K[\phi,t;\phi_0,t_0] = \lim_{n\to\infty}\int \prod_{\vec{x}}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{d\phi_j(\vec{x})}{(2\pi\hbar i(t_{j+1}-t_j))^{3/2}} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-1}\exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec{x}[\frac{1}{2}(\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j})^2 - \qquad /2.11/$$

$$-\frac{1}{2}(\nabla\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})^2 - \frac{\mu^2}{2}(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})^2 - U(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})]\} =$$

$$= \int D\phi(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d^4x\,\mathfrak{L}_{кл}},$$

где

$$\phi(\vec{x},t) = \phi_n(x), \quad \phi(\vec{x},t_0) = \phi_0(\vec{x}) \qquad /2.12/$$

и

$$\mathfrak{L}_{кл} = \frac{1}{2}\{(\dot{\phi}(x))^2 - (\nabla\phi(x))^2 - \mu^2\phi^2(x)\} - U(\phi(x)). \qquad /2.13/$$

Для нерелятивистской квантовой механики такой подход приведения интеграла по траектории можно найти в /15/, откуда видим, что традиционный процесс формального введения гамильтонова континуального интеграла заменяется преобразованием Вейля оператора $\hat{H}$. Эта процедура необходима постольку, поскольку у лиувиллиана $\hat{L}$ нет аналога соотношения

$H = \pi\dot{\phi} - \mathfrak{L}$,

где $\mathfrak{L}$ - лагранжиан. Эта ситуация одинакова как для бозонного, так и для фермионного полей.

б/ Фермионное поле

Рассмотрим фермионное поле, взаимодействующее с внешним классическим электромагнитным полем A^e_μ. Гамильтониан в картине Шредингера имеет вид

$$\hat{H} = \int d\vec{x}\,\hat{\bar{\psi}}(\vec{x})\{-i\vec{\gamma}\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec{x}) + m\}\hat{\psi}(x). \qquad /2.14/$$

Для случая $t > t_0$, в ψ-представлении имеем

$$<\bar{\psi}|\Psi(t)> = <\bar{\psi}|\hat{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)> = <\bar{\psi}|\hat{K}(t,t_0)|\Psi(t_0)>$$

$$= \int D\bar\psi_0(\vec x)\, D\psi_0(\vec x)\, \langle\bar\psi|\hat K(t,t_0)|\psi_0)|\psi_0\rangle\langle\bar\psi_0|\Psi(t_0)\rangle , \qquad \text{/2.15/}$$

где

$$\langle\bar\psi|\hat K(t,t_0)|\psi_0\rangle = \langle\bar\psi|\hat K(t,t_{n-1})\hat K(t_{n-1},t_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots \hat K(t_1,t_0)|\psi_0\rangle = \int \prod_{j=1}^{n-1} D\bar\psi_j(\vec x)\, D\psi_j(\vec x) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-1}\langle\bar\psi_{j+1}|\hat K(t_{j+1}-t_j)|\psi_j\rangle = \int \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{\vec x} d\bar\psi_j(\vec x)\, d\psi_j(\vec x) \times \qquad \text{/2.16/}$$

$$\times e^{-\int d\vec x\, \bar\psi_j(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x)} \cdot \prod_{j=0}^{n-1}\theta(t_{j+1}-t_j)\times$$

$$\times \langle\bar\psi_{j+1}|\exp\{-\frac{i}{\hbar}\hat H(t_{j+1}-t_j)\}|\psi_j\rangle.$$

Здесь использованы соотношения /1.36/, /1.37/.
С учетом /1.35/ и /1.39/ можем записать

$$\langle\bar\psi_{j+1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H(t_{j+1}-t_j)}|\psi_j\rangle \cong \langle\psi_{j+1}|1-\frac{i}{\hbar}\hat H(t_{j+1}-t_j)|\psi_j\rangle =$$

$$= \langle\bar\psi_{j+1}|1-\frac{i}{\hbar}(f_{j+1}-t_j)\int d\vec x\,\bar\psi(\vec x)\{-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m\}\hat\psi(\vec x)|\psi_j\rangle =$$

$$= [1-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}\{-i\hbar\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m\}\psi_j]\langle\bar\psi_{j+1}|\psi_j\rangle =$$

$$= \exp\{-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}[-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m]\psi_j\}\times \qquad \text{/2.17/}$$

$$\times \exp\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x).$$

Подставляя /2.17/ в /2.16/, имеем

$$\langle\bar\psi|\hat K(t,t_0)|\psi_0\rangle = \int\prod_{\vec x}\prod_{j=1}^{n-1} d\bar\psi_j(\vec x)\, d\psi_j(\vec x)\times$$

$$\times e^{-\int d\vec x\,\bar\psi_j(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x)}\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\theta(t_{j+1}-t_j)\exp\{-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\times$$

$$\times\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}\{-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m]\psi_j(\vec x)\cdot\exp\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x). \qquad \text{/2.18/}$$

Подставляя затем /2.18/ в /2.15/, находим

$$\langle\bar\psi|\Psi(t)\rangle \cong \int\prod_{\vec x} d\bar\psi_0(\vec x)\, d\psi_0(\vec x)\int\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{\vec x} d\bar\psi_j(\vec x)\, d\psi_j(\vec x)\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-1}\theta(t_{j+1}-t_j)\exp\{-\int d\vec x\,\bar\psi_j(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x) + \int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}(\vec x)\gamma_0\psi_j(\vec x) -$$

$$-\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec x\,\bar\psi_{j+1}(\vec x)[-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu - m]\psi_j(x)\}\langle\bar\psi_0|\Psi(t_0)\rangle =$$

$$=\int\prod_{\vec x}\prod_{j=0}^{n-1} d\bar\psi_j(\vec x)\, d\psi_j(\vec x)\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\theta(t_{j+1}-t_j)\exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\times \qquad \text{/2.19/}$$

$$\times\int d\vec x[-i\hbar\frac{\bar\psi_{j+1}(\vec x)-\psi_j(\vec x)}{t_{j+1}-t_j}\gamma_0 - \bar\psi_{j+1}(\vec x)(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m)]\psi_j(\vec x)\}\times$$

$$\times\langle\bar\psi_0|\Psi(t_0)\rangle .$$

Теперь, переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\langle\bar\psi|\Psi(t)\rangle = \int\prod_{\vec x} d\bar\psi_0(\vec x)\, d\psi_0(\vec x)\, K([\bar\psi],t;[\psi_0],t_0)\langle\bar\psi_0|\Psi(t_0)\rangle, \qquad \text{/2.20/}$$

где

$$K([\bar\psi],t;[\psi_0],t_0) = \theta(t-t_0)\int D\bar\psi(x)\, D\psi(x)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d^4x\,\bar{\mathfrak{L}}_{\text{кп}}}, \qquad \text{/2.21/}$$

$$D\bar\psi(x)\, D\psi(x) \equiv \prod_x d\bar\psi(x)\, d\psi(x),\quad \bar\psi(\vec x,t)=\bar\psi(\vec x),\quad \psi(\vec x,t_0)=\psi_0(\vec x),$$

$$\bar{\mathfrak{L}}_{\text{кп}} = -i\hbar\dot{\bar\psi}\gamma_0\psi + \bar\psi(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla - e\gamma^\mu A^e_\mu)\psi(x) - m\bar\psi\psi(x), \qquad \text{/2.22/}$$

откуда видно, что снова процесс формального введения гамильтонова континуального интеграла в традиционном методе /10,17/ заменяется преобразованием Вейля оператора $\hat H$. Эта процедура выглядит с нашей точки зрения более естественной.

Аналогично получаем

$$\langle\Psi(t)|\psi\rangle = \int\prod_{\vec x} d\bar\psi_0(\vec x)\, d\psi_0(\vec x)\langle\Psi(t_0)|\psi_0\rangle\bar K[\psi],t;[\bar\psi_0],t_0), \qquad \text{/2.23/}$$

$$\bar{K}([\psi],t;[\bar{\psi}_0],t_0) = \int \prod_x d\bar{\psi}(x)\, d\psi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d^4x \mathfrak{L}_{кп}} , \qquad /2.24/$$

где

$$\mathfrak{L}_{кп} = i\hbar\bar{\psi}\gamma_0\dot{\psi} + \bar{\psi}(i\hbar\vec{\gamma}\cdot\nabla - e\gamma^{\mu}A^{e}_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi .$$

Можно представить фермионный континуальный интеграл /2.21/ и /2.24/ в δ-функциональном виде.

• Используя определение δ-функционала /1.41/, перепишем

$$<\bar{\psi}|\Psi(t)> \cong \int \prod_{j=0}^{n-1}\prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}_j(x) \int \prod_{j=0}^{n-1}\prod_{\vec{x}} d\psi_j(\vec{x}) \prod_{j=0}^{n-1}\theta(t_{j+1}-t_j)\times$$

$$\times \exp\{\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\int d\vec{x}[-i\hbar\frac{\bar{\psi}_{j+1}-\psi_j}{t_{j+1}-t_j}\gamma_0 - \bar{\psi}_{j+1}(-i\hbar\vec{\gamma}\cdot\nabla + e\gamma^{\mu}A^{e}_{\mu} +$$

$$+ m)]\psi_j(\vec{x}) <\bar{\psi}_0|\Psi(t_0)> = \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}_0(\vec{x}) \int \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}_j(\vec{x}) \times$$

$$\times\delta[\frac{i}{\hbar}(t_{j+1}-t_j)\{-i\hbar\frac{\bar{\psi}_{j+1}-\bar{\psi}_j}{t_{j+1}-t_j}\gamma_0 - \bar{\psi}_{j+1}(-i\hbar\vec{\gamma}\cdot\nabla + e\gamma^{\mu}A^{e}_{\mu} + m)\}]\times$$

$$\times <\bar{\psi}_0|\Psi(t_0)> .$$

Совершая предельный переход при $n\to\infty$, имеем

$$<\bar{\psi}|\Psi(t)> = \int \prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}_0(\vec{x})\, K[\bar{\psi},t;\bar{\psi}_0,t_0]<\bar{\psi}_0|\Psi(t_0)> , \qquad /2.25/$$

где

$$K[\bar{\psi},t,\bar{\psi}_0,t_0] = \qquad /2.26/$$

$$= \theta(t-t_0)\int D\bar{\psi}(x)\,\delta[i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_0}\gamma_0 + \bar{\psi}(-i\hbar\vec{\gamma}\cdot\nabla + e\gamma^{\mu}A^{e}_{\mu} + m)]$$

и

$$D\bar{\psi}(x) \equiv \prod_x \frac{d\bar{\psi}(x)}{\frac{i}{\hbar}\epsilon}, \qquad (\epsilon = t_{j+1}-t_j) ,$$

$$D\psi(\vec{x}) \equiv \prod_x \frac{d\psi(x)}{-\frac{i}{\hbar}\epsilon}. \qquad /2.27/$$

Аналогично получим

$$<\Psi(t)|\psi> = \int \prod_{\vec{x}} d\psi_0(\vec{x}) <\Psi(t_0)|\psi_0> \bar{K}([\psi],t;[\psi_0],t_0) , \qquad /2.28/$$

где

$$\bar{K}([\psi],t;[\psi_0],t_0] = \qquad /2.29/$$

$$= \theta(t-t\ )\int D\psi(x)\,\delta[(i\hbar\gamma_0\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_0} - \vec{\gamma}\cdot(-i\hbar\nabla) - eA^{e}_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi(x)] .$$

Физическое значение выражений /2.26/ и /2.29/ ясно. Эти соотношения утверждают, что $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ удовлетворяют уравнениям Дирака:

$$\bar{\psi}(x)(\gamma^{\mu}(\bar{\hat{p}}_{\mu} + eA^{e}_{\mu}) + m) = 0 \qquad /2.30/$$

и

$$(\gamma^{\mu}(\hat{p}_{\mu} - eA^{e}_{\mu}) - m)\psi(x) = 0 . \qquad /2.31/$$

$$(\hat{p}_{\mu} = \{i\hbar\partial_0\ , -i\hbar\nabla\}).$$

Но отметим следующий факт. Пропагатор /2.26/ не требует, чтобы одновременно $\psi(x)$ удовлетворяло /2.31/. Аналогично пропагатор /2.29/ не требует, чтобы $\bar{\psi}(x)$ удовлетворяло /2.30/. Это есть выражение того факта, что $\hat{\psi}(\vec{x})$ и $\hat{\bar{\psi}}(\vec{x})$ не коммутируют друг с другом.

3. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Исходя из канонически квантованной операторной теории поля в картине Шредингера, получим уравнение Лиувилля. Это уравнение представляет собой функциональное уравнение Вигнера в ϕ-представлении для бозонного поля. Для фермионного поля им является уравнение Неймана в ψ-представлении.

а/ Бозонное поле

Для простоты рассмотрим вещественное скалярное поле.
В картине Шредингера оно удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi(t) > = \hat{H} | \Psi(t) > , \qquad /3.1/$$

где $\hat{H}$ задан в /1.15/ и соотношения коммутации операторов заданы в /1.1/.
Оператор плотности для "чистых" состояний по определению равен

$$\hat{\rho}(t) = | \Psi(t) > < \Psi(t) | . \qquad /3.2/$$

Полагаем, что состояние поля нормировано условием

$$< \Psi(t) | \Psi(t) > = 1 . \qquad /3.3/$$

Тогда имеет место соотношение

$$\hat{\rho}(t)\,\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) . \qquad /3.4/$$

Уравнение Неймана

$$\partial_t \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}(\hat{H}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{H}) . \qquad /3.5/$$

Запишем в ϕ-представлении

$$\partial_t < \phi' | \hat{\rho}(t) | \phi'' > = \frac{1}{i\hbar} \{ < \phi' | \hat{H}\hat{\rho}(t) | \phi'' > - < \phi' | \hat{\rho}(t)\hat{H} | \phi'' > \} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \{ H(\phi', i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi'}) - H(\phi'', -i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi''}) \} < \phi' | \hat{\rho}(t) | \phi'' > , \qquad /3.6/$$

где

$$H(\phi, -i\hbar\frac{\delta}{\delta\phi}) = \int d\vec{x} \{ \frac{1}{2}(-i\hbar \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})})^2 + \frac{1}{2}[(\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2] + U(\phi(\vec{x})) \} .$$

В /3.6/ были использованы соотношения /1.3/.
Вводим функционал распределения Вигнера

$$f([\phi],[\pi],t) \equiv \int \prod_{\vec{x}} \frac{du(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{1}{\hbar}\int dx\, \pi(\vec{x})\, u(\vec{x})} < \phi + \frac{u}{2} | \hat{\rho}(t) | \phi - \frac{u}{2} > . \qquad /3.7/$$

Используя соотношения

$$\phi'(\vec{x}) + \phi''(\vec{x}) = 2\phi(\vec{x}) , \quad \phi'(\vec{x}) - \phi''(\vec{x}) = u(\vec{x}) ,$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi'(\vec{x})} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} + \frac{\delta}{\delta u(\vec{x})} , \quad \frac{\delta}{\delta\phi''(\vec{x})} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} - \frac{\delta}{\delta u(\vec{x})} \qquad /3.8/$$

и

$$\frac{1}{i\hbar}\{ H(\phi', i\hbar\frac{\delta}{\delta\phi'}) - H(\phi'', -i\hbar\frac{\delta}{\delta\phi''}) \} = \qquad /3.9/$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int d\vec{x} \{ -\hbar^2 \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\frac{\delta}{\delta u(\vec{x})} + \mu^2\phi(\vec{x})\,u(\vec{x}) + \nabla\phi(\vec{x})\cdot\nabla u(\vec{x}) +$$

$$+ U(\phi + \frac{u(\vec{x})}{2}) - U(\phi - \frac{u(\vec{x})}{2}) \} ,$$

из /3.6/ получим

$$\partial_t f([\phi],[\pi],t) = \hat{L} f([\phi],[\pi],t) , \qquad /3.10/$$

где

$$\hat{L} = \int d\vec{x} \{ -\pi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta\phi(x)} + (-\nabla^2 + \mu^2)\phi(\vec{x}) \cdot \frac{\delta}{\delta\pi(x)} + \qquad /3.11/$$

$$+ \frac{1}{i\hbar}(U(\phi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}) - U(\phi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi})) \} .$$

При этом, как и в нерелятивистской квантовой механике [4,7], важен тот факт, что f должна удовлетворять условиям, следующим из /3.2/ и /3.7/, т.е.

$$\int \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\int d\vec{x}(\phi'(\vec{x}) - \phi''(\vec{x}))\,\pi(\vec{x})} f([\frac{\phi'+\phi''}{2}],[\pi],t) =$$

$$= \Psi([\phi'],t)\,\Psi^*([\phi''],t) . \qquad /3.12/$$

Здесь Ψ - любой функционал.
Уравнение /3.10/ вместе с условием /3.12/ является уравнением Лиувилля скалярного поля, эквивалентным уравнению Шредингера.
Если $\hat{L}$ формально разложим в ряд по $\frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}$, то получим

$$\hat{L} = \hat{L}_{\text{кл.}} + \hat{L}_{\text{к.п.}} . \qquad /3.13/$$

где

$$\hat{L}_{\text{кл.}} = \int d\vec{x} \{ -\pi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} + (-\nabla^2 + \mu^2)\phi(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})} + U'(\phi) \frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})} \} , \qquad /3.14/$$

$$\hat L_{к.п.} = \int d\vec x \{ \frac{1}{i\hbar}[U(\phi + \frac{ik}{2}\ \frac{\delta}{\delta\pi}) - U(\phi - \frac{i\hbar}{2}\ \frac{\delta}{\delta\pi})] - U'(\phi)\frac{\delta}{\delta\pi}\}. \qquad /3.15/$$

б/ Фермионное поле

Для фермионного поля нет необходимости вводить аналог функционала распределения Вигнера. Это связано с тем, что дираковская волновая функция играет роль классического поля. В случае фермионного поля уравнение Неймана в ψ-представлении становится уравнением Лиувилля.

Рассмотрим фермионное поле, взаимодействующее с классическим электромагнитным полем.

Уравнение Неймана в ψ-представлении принимает вид

$$\partial_t \langle\bar\psi'|\hat\rho(t)|\psi''\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\bar\psi'|\hat H\hat\rho(t) - \hat\rho(t)\hat H|\psi''\rangle. \qquad /3.16/$$

Здесь, учитывая /2.21/, /1.22/ и /2.14/, имеем

$$\langle\bar\psi'|\hat H = \int d\vec x \langle\bar\psi'|\hat{\bar\psi}[\vec\gamma(-i\hbar\nabla) + e\gamma^\mu A^e_\mu + m]\hat\psi = \qquad /3.17/$$

$$= \int d\vec x\, \bar\psi'(\vec x)(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)(-\gamma_0\frac{\delta}{\delta\bar\psi''(\vec x)}),$$

$$\hat H|\psi''\rangle = \int d\vec x\, \hat{\bar\psi}(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu + m)\hat\psi|\psi''\rangle = \qquad /3.18/$$

$$= \int d\vec x\, \gamma\ \ -i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)\psi''(\vec x)(-\frac{\delta}{\delta\psi''(\vec x)})|\psi''\rangle.$$

Обозначая

$$f([\bar\psi'],[\psi''],t) \equiv \langle\bar\psi'|\hat\rho(t)|\psi''\rangle = \langle\bar\psi'|\Psi\rangle\langle\Psi|\psi''\rangle, \qquad /3.19/$$

получим из /3.16/, /3.18/

$$\frac{\partial}{\partial t} f([\bar\psi'],[\psi''],t) = \hat L f([\bar\psi'],[\psi''],t), \qquad /3.20/$$

где

$$\hat L = \frac{1}{i\hbar}\int d\vec x\{\bar\psi'(\vec x)(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)(-\gamma_0)\frac{\delta}{\delta\bar\psi'(\vec x)} -$$

$$- \gamma_0(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)\psi''(\vec x)(-\frac{\delta}{\delta\psi''(\vec x)})\} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int d\vec x\{(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)\psi''(\vec x)\frac{\delta}{\delta\psi''(\vec x)} - \qquad /3.21/$$

$$- \bar\psi'(\vec x)(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + e\gamma^\mu A^e_\mu(\vec x) + m)\gamma_0\frac{\delta}{\delta\psi'(\vec x)}\}.$$

Уравнение /3.20/, вместе с соотношением /3.19/, является уравнением Лиувилля фермионного поля.

в/ Фермионное поле, взаимодействующее со скалярным полем

Для простоты рассмотрим фермионное поле, взаимодействующее с вещественным скалярным полем.

Полный гамильтониан равен

$$\hat H = \int d\vec x\{\hat{\bar\psi}(\vec x)(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + m)\hat\psi(\vec x) + \frac{1}{2}(\hat\pi^2(\vec x) + (\nabla\hat\phi)^2 + \qquad /3.22/$$

$$+ \mu^2\hat\phi^2) + U(\hat\phi(\vec x)) + G\hat{\bar\psi}(\vec x)\Gamma\hat\psi(\vec x)\hat\phi(\vec x)\}.$$

Функционал распределения принимает вид

$$f([\psi'],[\psi''],[\pi],[\phi],t) = \int \prod_{\vec x}\frac{du(\vec x)}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \times \qquad /3.23/$$

$$\times e^{\frac{i}{\hbar}\int d\vec x\,\pi(\vec x)u(\vec x)}\langle\bar\psi',\phi + \frac{u}{2}|\hat\rho(t)|\phi - \frac{u}{2},\psi''\rangle.$$

Уравнение Лиувилля

$$\partial_t f = \hat L f, \qquad /3.24/$$

где

$$\hat L = \frac{1}{i\hbar}\int d\vec x\{\gamma_0(-i\hbar\vec\gamma\cdot\nabla + m + G\Gamma\phi)\psi''\frac{\delta}{\delta\psi''(\vec x)} -$$

$$- \bar\psi'(-i\hbar\vec\gamma\nabla + m + G\Gamma)\gamma_0\frac{\delta}{\delta\psi'(\vec x)}\} + \int d\vec x\{-\pi(\vec x)\frac{\delta}{\delta\phi(\vec x)} + \qquad /3.25/$$

$$+ (-\nabla^2 + \mu^2)\phi(\vec x)\cdot\frac{\delta}{\delta\pi(\vec x)} + \frac{1}{i\hbar}[U(\phi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}) - U(\phi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi})]\} +$$

$$+ G\int d\vec{x}\{-\bar{\psi}'\gamma_0\frac{\delta}{\delta\psi'} + \gamma_0\psi''\frac{\delta}{\delta\psi''}\}\frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})}.$$

Если лиувиллиан разделить на классическую часть и квантованную поправку, то получим

$$\hat{L} = \hat{L}_{\text{кл.}} + \hat{L}_{\text{к.п.}}, \qquad /3.26/$$

где

$$\hat{L}_{\text{кл.}} = \frac{1}{i\hbar}\int d\vec{x}\{\gamma_0(-i\hbar\vec{\gamma}\cdot\nabla + m + G\Gamma\phi)\psi''\frac{\delta}{\delta\psi''(\vec{x})} - \bar{\psi}'(-i\hbar\vec{\gamma}\nabla + m +$$

$$\qquad /3.27/$$

$$+ G\Gamma)\gamma_0\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}'(\vec{x})}\} + \int d\vec{x}\{-\pi\frac{\delta}{\delta\phi} + (-\nabla^2 + \mu^2 + U'(\phi))\frac{\delta}{\delta\pi}\},$$

$$\hat{L}_{\text{к.п.}} = G\int d\vec{x}\{\gamma_0\Gamma\psi''\frac{\delta}{\delta\psi''} - \bar{\psi}'\gamma_0\Gamma\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}'}\}\frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})} +$$

$$\qquad /3.28/$$

$$+ \int d\vec{x}\{\frac{1}{i\hbar}[U(\phi + \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi}) - U(\phi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\pi})] - U'(\phi)\frac{\delta}{\delta\pi}\}.$$

Соотношения /3.13/ и /3.26/ являются исходной точкой теории возмущений, построенной в окрестности решения классического поля.

4. ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ранее было показано, что лиувиллиан можно разделить на классическую часть и квантовую поправку. Используя это свойство, возможно построить теорию возмущений для уравнения Лиувилля в окрестности классического решения. Для этого нужна функция Грина уравнения Лиувилля классического поля.

а/ Скалярное поле

Функция Грина вещественного скалярного классического поля определяется следующим уравнением:

$$(\partial_t - \hat{L}_{\text{кл.}}[\phi, \pi])\, G_{\text{кл.}}([\phi], [\pi], t; [\phi_0], [\pi_0], t_0) =$$

$$\qquad /4.1/$$

$$= \delta(t - t_0)\,\delta[\phi - \phi_0]\,\delta[\pi - \pi_0],$$

где $\hat{L}_{\text{кл.}}[\phi,\pi]$ задан в /3.14/.

Для нахождения $G_{\text{кл.}}$ применим метод, развитый в п.2. Формально введем операторы

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \phi(\vec{x}),\quad \hat{\pi}(\vec{x}) = \pi(\vec{x}),\quad \hat{\Phi}(\vec{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})},\quad \hat{\Pi}(\vec{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\pi(\vec{x})}. \qquad /4.2/$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\Phi}(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'),\quad [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$\qquad /4.3/$$

$$[\hat{\phi}, \hat{\Pi}] = [\hat{\pi}, \hat{\Phi}] = \ldots = 0.$$

Тогда $\hat{L}_{\text{кл.}}$ можно переписать следующим образом:

$$\hat{L}_{\text{кл.}} = i\int d\vec{x}\{-\hat{\pi}(\vec{x})\hat{\Phi}(\vec{x}) + (-\nabla^2 + \mu^2)\,\hat{\phi}(\vec{x})\cdot\hat{\Pi}(\vec{x}) + U'(\hat{\phi})\,\hat{\Pi}(\vec{x})\}, \qquad /4.4/$$

и /4.1/ можно писать в виде

$$(\partial_t - \hat{L}_{\text{кл.}}[\hat{\phi}, \hat{\pi}, \hat{\Phi}, \hat{\Pi}])\,\hat{G}(t, t_0) = \delta(t - t_0)\cdot I. \qquad /4.5/$$

Введем представления, в которых диагонализированы операторы $\hat{\phi}$ и $\hat{\pi}$ или $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Pi}$. Векторы $|\phi,\pi\rangle$ определим так:

$$|\phi, \pi\rangle \equiv |\phi\rangle\,|\pi\rangle, \qquad /4.6/$$

где $|\phi\rangle$ и $|\pi\rangle$ заданы в /1.3/ и /1.9/.
Тогда имеем

$$\langle\phi', \pi'|\phi'', \pi''\rangle = \delta[\phi' - \phi'']\,\delta[\pi' - \pi''], \qquad /4.7/$$

$$\int\prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})\,d\pi(\vec{x})\,|\phi, \pi\rangle\langle\pi, \phi| = I, \qquad /4.8/$$

и аналогично

$$\hat{\Phi}(\vec{x})\,|\Phi, \Pi\rangle = \Phi(\vec{x})\,|\Phi, \Pi\rangle,\quad \hat{\Pi}(\vec{x})\,|\Phi, \Pi\rangle = \Pi(\vec{x})\,|\Phi, \Pi\rangle;$$

$$\qquad /4.9/$$

$$\langle\Phi', \Pi'|\Phi'', \Pi''\rangle = \delta[\Phi' - \Phi'']\,\delta[\Pi' - \Pi''].$$

$$\int\prod_{\vec{x}} d\Phi(\vec{x})\,d\Pi(\vec{x})\,|\Phi, \Pi\rangle\langle\Phi, \Pi| = I. \qquad /4.10/$$

Из соотношений /4.7/-/4.10/ получим

$$\langle\phi, \pi|\Phi, \Pi\rangle = N e^{i\int d\vec{x}(\phi(\vec{x})\,\Phi(\vec{x}) + \pi(\vec{x})\,\Pi(\vec{x}))},\quad N = \prod_{\vec{x}}(2\pi)^{-3}. \qquad /4.11/$$

Функцию Грина можно найти таким же методом, как и в п.2.

$$G_{кл.}([\phi],[\pi],t;[\phi_0],[\pi_0],t_0) = \langle\phi,\pi|\theta(t-t_0)\times$$

$$\times e^{\hat L_{кл}(t-t_0)}|\phi_0,\pi_0\rangle = \theta(t-t_0)\langle\phi,\pi|e^{\hat L_{кл}(t-t_{n-1})}\times$$

$$\times e^{\hat L_{кл}(t_{n-1}-t_{n-2})}\dots e^{\hat L_{кл}(t_1-t_0)}|\phi_0,\pi_0\rangle = \theta(t-t_0)\times \qquad /4.11'/$$

$$\times\int\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{\vec x} d\phi_j(\vec x)\,d\pi_j(\vec x)\cdot\prod_{j=0}^{n-1}\langle\phi_{j+1},\pi_{j+1}|e^{\hat L_{кл}(t_{j+1}-t_j)}|\phi_j,\pi_j\rangle.$$

Здесь использовано условие /4.8/. Затем совершаем преобразование Вейля оператора $\hat L_{кл}$.

$$\langle\phi_{j+1},\pi_{j+1}|\hat L_{кл.}|\phi_j,\pi_j\rangle = \int\prod_{\vec x}\frac{d\phi(\vec x)\,d\pi(\vec x)}{(2\pi)^3}\,\frac{d\Phi(\vec x)\,d\Pi(\vec x)}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\exp\{i\int d\vec x((\phi_{j+1}(\vec x)-\phi_j(\vec x))\,\Phi(\vec x)+(\pi_{j+1}(\vec x)-\pi_j(\vec x)\,\Pi(\vec x))\}\times \qquad /4.12/$$

$$\times\delta[\phi-\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}]\cdot\delta[\pi-\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2}]\times\tilde L^{(j)}_{кл},$$

где

$$\tilde L^{(j)}_{кл.} = i\int d\vec x\{-\pi\Phi_j+(-\nabla^2+\mu^2)\phi\cdot\Pi_j+U'(\phi)\,\Pi_j(\vec x)\}. \qquad /4.13/$$

Доказательство этого аналогично случаю преобразования Вейля для оператора $\hat H$, если положить $\hat\phi,\pi$ вместо ϕ и $\hat\Phi,\Pi$ вместо $\hat\pi$ /см. п.2/. Следовательно, если n достаточно большое, то получим

$$\langle\phi_{j+1},\pi_{j+1}|e^{\hat L_{кл}(t_{j+1}-t_j)}|\phi_j,\pi_j\rangle \cong \int\prod_{\vec x}\frac{d\Phi_j(\vec x)\,d\Pi_j(\vec x)}{(2\pi)^6}\times \qquad /4.14/$$

$$\times e^{i\int d\vec x[(\phi_{j+1}-\phi_j)\Phi_j+(\pi_{j+1}-\pi_j)\Pi_j]}\;e^{(t_{j+1}-t_j)\tilde L^{(j)}_{кл.}}\Big|_{\phi=\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2},\;\pi=\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2}}.$$

Подставляя /4.13/ в /4.14/ и интегрируя по Φ_j и Π_j, получим

$$\langle\phi_{j+1},\pi_{j+1}|e^{\hat L_{кл.}(t_{j+1}-t_j)}|\phi_j,\pi_j\rangle \cong \int\prod_{\vec x}\frac{d\Phi_j\,d\Pi_j(\vec x)}{(2\pi)^6} -$$

$$- e^{i(t_{j+1}-t_j)\int d\vec x(\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j}-\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2})}\times\exp\{-i(t_{j+1}-t_j)\times$$

$$\times\int d\vec x[\frac{\pi_{j+1}-\pi_j}{t_{j+1}-t_j}+(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}+U'(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})] = \qquad /4.15/$$

$$=\delta[(t_{j+1}-t_j)(\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j}-\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2})]\cdot\delta[(t_{j+1}-t_j)(\frac{\pi_{j+1}-\pi_j}{t_{j+1}-t_j}+$$

$$+(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}+U'(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})] = \frac{1}{(t_{j+1}-t_j)^2}\delta[\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j}-$$

$$-\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2}]\cdot\delta[\frac{\pi_{j+1}-\pi_j}{t_{j+1}-t_j}+(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}+U'(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})].$$

Используя /4.15/ в /4.11/ и переходя к пределу $n\to\infty$, получим функцию Грина классического уравнения Лиувилля

$$G_{кл.}([\phi],[\pi],t;[\phi_0],[\pi_0],t_0)=\theta(t-t_0)\lim_{n\to\infty}\int\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{\vec x}\frac{d\phi(\vec x)\,d\pi(\vec x)}{(2\pi)^3(t_{j+1}-t_j)^2}\times \qquad /4.16/$$

$$\times\delta[\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{t_{j+1}-t_j}-\frac{\pi_{j+1}+\pi_j}{2}]\cdot\delta[\frac{\pi_{j+1}-\pi_j}{t_{j+1}-t_j}+(-\nabla^2+\mu^2)\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2}+$$

$$+U'(\frac{\phi_{j+1}+\phi_j}{2})] = \theta(t-t_0)\int D\phi(x)\,D\pi(x)\,\delta[\dot\phi(x)-\pi(x)]\times \qquad /4.17/$$

$$\times\delta[\dot\pi(x)+(-\nabla^2+\mu^2)\phi(x)+U'(\phi(x))],$$

где

$$D\phi(x) = \prod_{x} \frac{d\phi(x)}{(2\pi)^{3/2}\,\epsilon}, \quad D\pi(x) = \prod_{x} \frac{d\pi(x)}{(2\pi)^{3/2}\,\epsilon}, \quad \epsilon = t_{j+1} - t_j ,$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_n(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}, t) = \pi_n(\vec{x}); \quad \phi(\vec{x}, t_0) = \phi_0(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}, t_0) = \pi_0(\vec{x}) . \qquad /4.18/$$

Если известны решения для классического поля, то можно интегрировать в /4.17/.

Пусть R, Q -решения уравнений классического поля

$$\dot\phi(x) = \pi(x) = \frac{\delta H_{кл.}}{\delta\pi(x)},$$

$$\dot\pi(x) = -(-\nabla^2 + \mu^2)\phi(x) - U'(\phi) = -\frac{\delta H_{кл}}{\delta\phi(x)} \qquad /4.19/$$

с начальными условиями

$$\phi(\vec{x}, t_0) = \phi_0(\vec{x}), \quad \pi(\vec{x}, t_0) = \pi_0(\vec{x}) . \qquad /4.20/$$

Тогда из /4.17/ получим

$$G_{кл}([\phi],[\pi],t;[\phi_0],[\pi_0],t_0) \equiv$$

$$\doteq G_{кл}[\phi(x), \pi(x); \phi(x_0), \pi(x_0)] =$$

$$= \theta(t - t_0) \prod_{\vec{x}} \{ \delta(\phi(\vec{x}) - R(\phi_0(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}), t - t_0)) \times$$

$$\times \delta(\pi(\vec{x}) - Q(\phi_0(\vec{x}), \pi_0(\vec{x}), t - t_0)) \} = \theta(t - t_0) \times \qquad /4.21/$$

$$\times \prod_{\vec{x}} \{ \delta(\phi_0(\vec{x}) - R^{-1}(\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}), t - t_0))) \, \delta(\pi_0(\vec{x}) - Q^{-1}[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}), t - t_0)) \}$$

и

$$f([\phi],[\pi],t) = \int \prod_{\vec{x}} d\phi_0(\vec{x})\, d\pi_0(\vec{x}) \times$$

$$\times G_{кл}([\phi],[\pi],t;[\phi_0],[\pi_0],t_0)\, f_0([\phi_0],[\pi_0],t_0) =$$

$$= f_0([R^{-1}(\phi, \pi, t - t_0)],[Q^{-1}(\phi, \pi, t - t_0)]), \qquad /4.22/$$

где f_0 - начальный функционал распределения Винера.

б/ Фермионное поле

Рассмотрим пример, который приведен в п.3,б. Найдем функцию Грина уравнения Лиувилля /3.20/, которая удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t - \hat{L}[\bar\psi', \psi''])\, G_{кл.}([\bar\psi'],[\psi''],t;[\bar\psi_0'],[\psi_0''],t_0) = \qquad /4.23/$$

$$= \delta(t - t\ )\, \delta[\bar\psi' - \bar\psi_0']\, \delta[\psi'' - \psi_0''] .$$

Чтобы найти $G_{кл.}$, можно применить метод, использованный для бозонного поля. Но в этом случае удобно получить функцию Грина из фермионных континуальных интегралов /2.26/ и /2.29/, так как уравнение /3.20/ представляет собой уравнение Неймана в ψ-представлении.

Из /2.25/, /2.28/ и /3.19/ следует

$$f([\bar\psi'],[\psi''],t) \equiv \langle\bar\psi'|\hat\rho(t)|\psi''\rangle = \langle\bar\psi'|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\psi''\rangle =$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} d\bar\psi_0'(\vec{x})\, K([\bar\psi'],t;[\bar\psi_0'],t_0)\, \langle\bar\psi_0'|\Psi(t)\rangle \times$$

$$\times \int \prod_{\vec{x}} d\psi_0''(\vec{x})\, \langle\Psi(t_0)|\psi_0''\rangle\, \bar K([\psi''],t;[\psi_0''],t_0) =$$

$$= \int \prod_{\vec{x}} d\bar\psi_0'(\vec{x})\, d\psi_0''(\vec{x})\, K([\bar\psi'],t;[\bar\psi_0'],t_0)\, \bar K([\psi_0''],t;[\psi_0''],t_0) \times \qquad /4.24/$$

$$\times \langle\bar\psi_0'|\Psi(t_0)\rangle\langle\Psi(t_0)|\psi_0''\rangle = \int \prod_{\vec{x}} d\bar\psi_0'(\vec{x})\, d\psi_0''(\vec{x}) \times$$

$$\times G_{кл.})[\psi'],[\psi''],t;[\bar\psi_0'],[\psi_0''],t_0)\, f_0([\bar\psi_0'],[\psi_0''],t_0) ,$$

где

$$G_{кл}([\bar\psi'],[\psi''],t;[\bar\psi_0'],[\psi_0''],t_0) =$$

$$= K([\bar\psi'],t;[\bar\psi_0'],t_0)\, \bar K([\psi''],t;[\psi_0''],t_0) =$$

$$= \theta(t - t_0) \int D\bar\psi'(x)\, D\psi''(x)\, \delta[\bar\psi'(x)(\gamma^\mu(\overleftarrow{\hat p}_\mu + eA^e_\mu(x)) + m] \times$$

$$\times\,\delta[(\gamma^{\mu}(\hat{p}_{\mu} - eA^{e}_{\mu}(\mathbf{x})) - m)\,\psi''(\mathbf{x})], \qquad (\hat{p}_{\mu} = i\hbar\hat{\partial}_{\mu}). \qquad /4.25/$$

Здесь учтены /2.26/ и /2.29/.

Если решения уравнений Дирака /2.30/ и /2.31/ известны, то можно интегрировать в /4.25/. В результате получаем

$$G_{\text{кл.}}([\bar{\psi}'],[\psi''],t;[\bar{\psi}'_0],[\psi''_0],t_0) = \theta(t-t_0)\prod_{\vec{x}}\{\delta(\bar{\psi}'(\vec{x}) -$$

$$-\bar{\Phi}(\bar{\psi}'_0(\vec{x}),\, t-t_0))'\,\delta(\psi''(\vec{x}) - \Phi(\psi''_0(\vec{x}),\, t-t_0))\} = \qquad /4.26/$$

$$= \theta(t-t_0)\prod_{\vec{x}}\{\delta(\bar{\psi}'_0(\vec{x}) - \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\psi}'(\vec{x}),\, t-t_0))\,\delta(\psi''_0(\vec{x}) - \bar{\Phi}^{-1}(\psi''(\vec{x}),t-t_0))\},$$

$$/4.27/$$

$$f([\bar{\psi}'],[\psi''],t) = \int\prod_{\vec{x}} d\bar{\psi}'_0(\vec{x})\,d\psi''(\vec{x})\,G_{\text{кл.}}([\bar{\psi}'],[\psi''],t;[\bar{\psi}'_0],[\psi''_0],t_0)\times$$

$$\times f_0([\bar{\psi}'_0],[\psi''_0],t_0) = f_0[\bar{\Phi}^{-1}(\bar{\psi}'(\mathbf{x}),\, t-t_0),\, \Phi^{-1}(\psi''(\vec{x}),\, t-t_0)],$$

где Φ и $\bar{\Phi}$ - решения уравнений /2.30/ и /2.31/ при начальных условиях $\psi''_0(\vec{x})$ и $\bar{\psi}'_0(\vec{x})$; Φ^{-1} и $\bar{\Phi}^{-1}$ - их обратные.

Теперь уравнение Лиувилля можно записать в виде следующего интегрального уравнения:

$$f([\Xi],t) = f_0[\Xi] + \int_{t_0}^{t} dt\int D\Xi_0(\vec{x})\;\times$$

$$\times\, G_{\text{кл.}}([\Xi],t;[\Xi_0],t_0)\,\hat{L}_{\text{к.п.}}[\Xi_0]\,f([\Xi_0],t_0), \qquad /4.28/$$

где Ξ - совокупность динамических переменных.

Применяя последовательное приближение в /4.28/, можно получить ряд теории возмущений в окрестности решения классического поля. Эта проблема будет рассмотрена в другой работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложен формализм Лиувилля. Были использованы представления, в которых диагонализированы операторы поля /т.е. координатное и импульсное представления для поля/. Это позволило, исходя из канонически квантованных операторных теорий поля, получить континуальные интегралы на основе преобразования Вейля. Показано, что фермионный континуальный интеграл в случае взаимодействия с классическим полем можно представить в виде δ-функционала.

Получены уравнения Лиувилля. Эти уравнения представляют собой функциональное уравнение Вигнера для бозонного поля /в ϕ-представлении/ и функциональное уравнение Неймана для фермионного поля /в ψ-представлении/.

Во всех случаях лиувиллианы можно разделить на классическую часть и квантовую поправку. Используя этот факт, можно строить теорию возмущений в окрестности классического поля. В работе получены функции Грина классического уравнения Лиувилля в виде континуального интеграла, который нужен для построения теории возмущений.

Автор благодарит профессора Б.М.Барбашова и В.М.Мальцева за полезные и стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogolubov N.N. Journ. of Phys., 1946, 10, 257;
   Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н./мл./. Введение в квантовую статистическую механику, М., Наука , 1984.
2. Prigogine I., Resibois P. Physics, 1958, 24, 795.
   Balescu R., Prigogine I. Physics, 1959, 25, 281.
3. Ли Ам Гир. Докторская диссертация, Пхеньян, 1981.
4. Bekker G.A.(Jr.), Phys.Rev., 1958, 109, 2198.
5. Polubarinov I.V. JINR, E2-82-800, Dubna, 1982.
   Polubarinov I.V. JINR, E2-83-688, Dubna, 1983.
6. Carrthers P., Zachariasen F. Rev.Mod.Phys., 1983, 55, 245.
7. Татарский В.И. УФН, 1983, 139, 587.
8. Широков Ю.М. ЭЧАЯ, 1979, 10, 5.
9. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М., Наука , 1986.
10. Славнов А.А. ТМФ, 1975, 22, 177.
    Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей, М., Наука , 1978.
11. Ohnuki Y., Kashina T. Progr. of Theor. Phys., 1978, 60, 548.
12. Leaf B. J.Math.Phys., 1968, 9, 65.
13. Diaz A.I. Annals of Physics, 1985, 160, 1.
14. Narcowich F.J. J.Math.Phys., 1986, 27, 2502.
15. de Groot S.R., Suttorp L.G. Foundations of Electrodynamics, North-Holl. Pub.Com., Amsterdam, 1972.
    Huang K. Quarks and Gauge Fields, World Scientific, 1982.
16. Feynmann R. Rev.Mod.Phys., 1948, 20, 367.
17. Попов В.Н. Функциональные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976.

18. Прохоров Л.В. ЭЧАЯ, 1982, 13, 1094.
19. Heller E.J. J.Chem.Phys., 1976, 65, 1289.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 сентября 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Ли Ам Гир Р2-87-687

О формализме Лиувилля в квантовой теории поля

Рассмотрен формализм квантовой теории поля на основе уравнения Лиувилля /формализм Лиувилля/. Получены уравнения Лиувилля. Эти уравнения представляют собой функциональное уравнение Вигнера в случае бозонного поля и функциональное уравнение Неймана в случае фермионного поля. В виде континуального интеграла получены функции Грина классического уравнения Лиувилля, которые нужны для построения теории возмущений в окрестности классического поля. Показано, что фермионный континуальный интеграл, в случае взаимодействия с классическим полем, можно представить в виде δ-функционала.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Lee Am Gil P2-87-687

On the Liouville Formalism in Quantum Field Theory

A formalism is investigated of quantum field theory based on the Liouville equation (the Liouville formalism). The representation diagonalizing field operators in the Schrödinger picture is used throughout. It is necessary to state the Liouville formalism. Also it allows one to construct the path integral originating from cannonical quantized field theory. The results are obtained by using the functional Weyl transformation and the completness relation of functional eigenvectors. It is shown that a fermion path integral can be represented in δ-functional form if a fermionic field interacts with a classical field. The Liouville equation is obtained. It is functional Wigner equation in the bosonic case, and functional Neiman equation in the fermionic case. A Liouvillian can be divided into the classical part and its quantum correction. Using this fact one may construct the perturbation theory in the neighbourhood of a classical field. The Green function of a classical Liouville equation is obtained in the form of a path integral. It is necessary to construct the perturbation theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987