сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



Р2-87-683

Н.А.Черников

# ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ГИЛЬБЕРТА И ТЕНЗОР ПАПАПЕТРУ

1987

Замечательного вида тензор энергии гравитационного поля в ОТО* получил Папапетру [1], погрузив гравитационное поле $g_{ab}$ в мир Минковского с метрикой $\eta_{ab}$. Это позволило ему применить к псевдотензору Эйнштейна [2] метод Белинфанте. Здесь мы получим тензор Папапетру методом Гильберта. Для этого, однако, требуется погрузить гравитационное поле $g_{ab}$ в мир с произвольно заданной метрикой $\check{g}_{ab}$ и взять вариационную производную от лагранжевой функции действия S по $\check{g}_{ab}$ при фиксированном значении $g_{ab}$. Таким образом получаются обобщенные результаты Папапетру. Оригинальные же результаты Папапетру получаются, если, взяв производную, положить $\check{g}_{ab} = \eta_{ab}$. Метрику $g_{ab}$ дальше будем называть главной, а метрику $\check{g}_{ab}$ - фоновой. Метрика $g_{ab}$ и гравитационное поле $g_{ab}$ отождествляются.

Функцию действия выбираем в виде

$$S = \int L \epsilon \, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 , \qquad /1/$$

где

$$L = g^{mn}(P^a_{mb} P^b_{an} - P^a_{sa} P^s_{mn}) , \qquad /2/$$

$$\epsilon = \sqrt{|g|} , \qquad /3/$$

g - определитель матрицы $(g_{ab})$, $g^{as}$ - тензор, связанный с $g_{sb}$ условием

$$g^{as} g_{sb} = \delta^a_b , \qquad /4/$$

$\delta^b_a$ - компоненты единичного аффинора [3, с. 35], $P^a_{mn}$ - тензор аффинной деформации [3, с.128], равный разности

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \qquad /5/$$

фоновой связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$ и базисной связности

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}) , \qquad /6/$$

$\partial$ - символ частного дифференцирования.

---

*ОТО - общая теория относительности.

Стремясь разобраться в структуре теории, отложим на второй план введение в /1/ фоновой метрики $\check g_{ab}$ и примем поначалу лишь следующее условие симметричности для фоновой связности

$$\check\Gamma^a_{mn} = \check\Gamma^a_{nm}\,. \qquad /7/$$

Вариация функции действия /1/ при фиксированном поле $g_{ab}$ равна

$$\delta S = \int \Theta^{mn}_a\, \delta\check\Gamma^a_{mn}\, \epsilon\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4\,, \qquad /8/$$

где

$$\Theta^{mn}_a = \Phi^{mn}_a - \frac{1}{2}\left(\Phi^m \delta^n_a + \Phi^n \delta^m_a\right), \qquad /9/$$

$$\Phi^{mn}_a = g^{ms}P^n_{as} + g^{ns}P^m_{as} - P_a g^{mn}, \qquad /10/$$

$$P_a = P^n_{an}\,, \qquad /11/$$

$$\Phi^m = \Phi^{ma}_a = g^{ab}P^m_{ab}\,. \qquad /12/$$

## 1. ТЕНЗОР ПРАЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Тензор /9/ является функционалом главного тензора $g_{ab}$ и фоновой связности $\check\Gamma^a_{mn}$. Назовем его тензором праэнергии гравитационного поля $g_{ab}$ на фоне связности $\check\Gamma^a_{mn}$. Здесь фоновая связность играет роль, аналогичную роли системы отсчета. В частности, когда $\check\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{mn}$ /так сказать, в собственной системе отсчета/, тензор праэнергии гравитационного поля равен нулю.

Располагая двумя связностями, для каждого тензорного поля T можно брать ковариантные производные $\nabla T$ и $\check\nabla T$. Вторая получается из первой заменой символов $\nabla$ на $\check\nabla$, $\partial$ на $\nabla$ и связности /6/ на тензор /5/. Например,

$$\check\nabla_a g^{mn} = \nabla_a g^{mn} + P^m_{as} g^{sn} + P^n_{as} g^{ms}\,. \qquad /13/$$

Докажем, что ковекторное поле

$$\Theta_a = (\check\nabla_m - P_m)(\check\nabla_n - P_n)\Theta^{mn}_a + \check R^s_{amn}\Theta^{mn}_s \qquad /14/$$

равно

$$\Theta_a = \nabla_m\left[g^{ms}(\check R_{sa} + \check R_{as}) - \delta^m_a g^{ns}\check R_{ns}\right]. \qquad /15/$$



Здесь

$$\check R^a_{mnb} = \partial_m \check\Gamma^a_{nb} - \partial_n \check\Gamma^a_{mb} + \check\Gamma^a_{ms}\check\Gamma^s_{nb} - \check\Gamma^a_{ns}\check\Gamma^s_{mb}\,, \qquad /16/$$

$$\check R_{mn} = \check R^s_{smn}. \qquad /17/$$

Тензор /16/ /наряду с очевидной антисимметричностью по индексам m, n / обладает следующими свойствами [3, с.130-132]:

$$\check R^a_{mnb} + \check R^a_{bmn} + \check R^a_{nbm} = 0\,, \qquad /18/$$

$$\check\nabla_k \check R^a_{mnb} + \check\nabla_n \check R^a_{kmb} + \check\nabla_m \check R^a_{nkb} = 0. \qquad /19/$$

Из свойства /18/ следует, что свертка

$$\check\Omega_{mn} = \check R^s_{mns} \qquad /20/$$

связана со сверткой /17/ следующим образом:

$$\check\Omega_{mn} = \check R_{nm} - \check R_{mn}\,. \qquad /21/$$

Из свойства /19/ следует, что

$$\check\nabla_k \check\Omega_{mn} + \check\nabla_n \check\Omega_{km} + \check\nabla_m \check\Omega_{nk} = 0. \qquad /22/$$

Согласно /16/ и /20/

$$\check\Omega_{mn} = \partial_m \check\Gamma_n - \partial_n \check\Gamma_m\,, \qquad /23/$$

где

$$\check\Gamma_m = \check\Gamma^a_{ma}\,. \qquad /24/$$

Из /23 также следует /22/.

Вся эта информация о тензоре кривизны /16/ аффинной связности $\check\Gamma^a_{mn}$ полностью переносится на тензор кривизны

$$R^a_{mnb} = \partial_m \Gamma^a_{nb} - \partial_n \Gamma^a_{mb} + \Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb} \qquad /25/$$

аффинной связности /6/ /надо только в формулах /17-24/ убрать "галочки"/, поскольку, как и в более общем случае /7/,

$$\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{nm}\,. \qquad /26/$$

Но связность Кристоффеля /6/ замечательна не одним только свойством /26/. Во-первых, из формулы /6/ следует, что

$$\Gamma_m = \frac{1}{2} g^{ab}\partial_m g_{ab} = \frac{1}{2g}\partial_m g = \frac{1}{\epsilon}\partial_m \epsilon . \qquad /27/$$

Поэтому в силу формулы /23/

$$\Omega_{mn} = 0 , \qquad /28/$$

а в силу формулы /21/

$$R_{mn} = R_{nm} . \qquad /29/$$

Во-вторых, из формулы /6/ следует, что

$$\nabla_a g_{mn} = 0 , \qquad /30/$$

т.е.

$$\partial_a g_{mn} = \Gamma^s_{am} g_{sn} + \Gamma^s_{an} g_{ms} . \qquad /31/$$

Формулы /26/ и /31/ алгебраически эквивалентны формуле /6/. Последнее замечание, между прочим, позволяет заключить, что в данных условиях

$$-P^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{ak} (\check{\nabla}_m g_{kn} + \check{\nabla}_n g_{km} - \check{\nabla}_k g_{mn}) , \qquad /32/$$

поскольку в силу формул /7/ и /26/

$$P^a_{mn} = P^a_{nm} , \qquad /33/$$

а в силу формулы /30/

$$\check{\nabla}_a g_{mn} = - P^s_{am} g_{sn} - P^s_{an} g_{ms} . \qquad /34/$$

Наконец, связность Кристоффеля /6/ замечательна тем, что ее тензор кривизны /25/ обладает следующим алгебраическим свойством:

$$R^s_{mna} g_{sb} + R^s_{mnb} g_{sa} = 0 . \qquad /35/$$

Действительно, оператор

$$\nabla_m\nabla_n - \nabla_n\nabla_m + (\Gamma^s_{mn} - \Gamma^s_{nm})\nabla_s \qquad /36/$$

действует на тензорное поле так же, как и оператор $\check{\nabla}_k - \nabla_k$: надо только тензор $P^a_{kb}$ заменить на тензор $R^a_{mnb}$. Поэтому для связности /26/

$$(\nabla_m\nabla_n - \nabla_n\nabla_m) g_{ab} = -R^s_{mna} g_{sb} - R^s_{mnb} g_{as} . \qquad /37/$$

Отсюда, учитывая /30/, получаем /35/.



Далее, из /4/ и /30/ следует, что

$$\nabla_a g^{mn} = 0 . \qquad /38/$$

Поэтому, убирая из формулы /19/ "галочки" и умножая получающееся тождество на $\delta^m_a g^{kb}$, на основании формулы /35/ заключаем, что

$$\nabla_k g^{kb} G_{nb} = 0 , \qquad /39/$$

где

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} , \quad R = g^{mn} R_{mn} . \qquad /40/$$

Хорошо известное утверждение /39/ является частным случаем утверждения, которое мы намерены здесь доказать, а именно: первые части формул /14/ и /15/ совпадают. Действительно, если положить $\check{\Gamma}^a_{mn} = \Gamma^a_{mn}$, то получится

$$P^a_{mn} = 0 , \quad \Theta^{mn}_a = 0 , \quad \Theta_a = 0 , \quad \check{R}_{sa} = R_{sa} .$$

В результате оставшаяся формула /15/ оказывается эквивалентной формуле /39/.

Переходим к доказательству нашего утверждения. Прежде всего, из /13/ и /38/ получаем

$$\check{\nabla}_a g^{mn} = P^m_{as} g^{sn} + P^n_{as} g^{ms} . \qquad /41/$$

Следовательно, тензор /10/ равен

$$\Phi^{mn}_a = (\check{\nabla}_a - P_a) g^{mn} , \qquad /42/$$

а вектор /12/ равен

$$\Phi^m = (\check{\nabla}_n - P_n) g^{mn} . \qquad /43/$$

В силу последней формулы

$$(\check{\nabla}_n - P_n)\Phi^m \delta^n_a = (\check{\nabla}_a - P_a)\Phi^m = (\check{\nabla}_a - P_a)(\check{\nabla}_n - P_n) g^{mn} . \qquad /44/$$

Поэтому

$$(\check{\nabla}_n - P_n)\Theta^{mn}_a = [(\check{\nabla}_n - P_n)(\check{\nabla}_a - P_a) - (\check{\nabla}_a - P_a)(\check{\nabla}_n - P_n)] g^{mn} + \frac{1}{2}(\check{\nabla}_n - P_n)(\Phi^m \delta^n_a - \Phi^n \delta^m_a) . \qquad /45/$$

Рассмотрим коммутатор

$$(\check\nabla_n - P_n)(\check\nabla_a - P_a) - (\check\nabla_a - P_a)(\check\nabla_n - P_n) =$$
$$= \check\nabla_n \check\nabla_a - \check\nabla_a \check\nabla_n + (\check\nabla_a P_n) - (\check\nabla_n P_a). \qquad /46/$$

Так как

$$\check\nabla_a P_n - \check\nabla_n P_a = \partial_a P_n - \partial_n P_a + (\Gamma^s_{na} - \Gamma^s_{an}) P_s , \qquad /47/$$

то в силу формул /7/ и /27/

$$\check\nabla_a P_n - \check\nabla_n P_a = \partial_a \check\Gamma_n - \partial_n \check\Gamma_a = \check\Omega_{an} = -\check R^s_{nas} . \qquad /48/$$

Таким образом, коммутатор /46/ равен

$$\check\nabla_n \check\nabla_a - \check\nabla_a \check\nabla_n - \check R^s_{nas} . \qquad /49/$$

Учитывая, что

$$(\check\nabla_n \check\nabla_a - \check\nabla_a \check\nabla_n) g^{mn} = \check R^m_{nas} g^{sn} + \check R^n_{nas} g^{sm} , \qquad /50/$$

отсюда в силу /18/ получаем

$$(\check\nabla_n - P_n)\Theta^{mn}_a = \check R^m_{nas} g^{sn} + \check R_{sa} g^{sm} +$$
$$+ \frac{1}{2}(\check\nabla_n - P_n)(\Phi^m \delta^n_a - \Phi^n \delta^m_a). \qquad /51/$$

На втором этапе, доказывая, что ковекторы /14/ и /15/ совпадают, мы должны применить оператор $\check\nabla_m - P_m$ к написанным в формуле /51/ слагаемым. В связи с этим рассмотрим выражение

$$U_a = (\check\nabla_m - P_m)(\check\nabla_n - P_n) U^{mn}_a , \qquad /52/$$

где тензор $U^{mn}_a$ антисимметричен по индексам $m, n$. В силу этого

$$U_a = -(\check\nabla_n - P_n)(\check\nabla_m - P_m) U^{mn}_a . \qquad /53/$$

Складывая две последние формулы, снова приходим к коммутатору /46/, равному /49/, так что

$$U_a = \frac{1}{2}(\check\nabla_m \check\nabla_n - \check\nabla_n \check\nabla_m - \check R^s_{mns}) U^{mn}_a . \qquad /54/$$

Следовательно, в силу формулы /21/ выражение /52/ равно



$$U_a = -\frac{1}{2} \check R^s_{mna} U^{mn}_s . \qquad /55/$$

С помощью этого результата находим

$$(\check\nabla_m - P_m)(\check\nabla_n - P_n)(\Phi^m \delta^n_a - \Phi^n \delta^m_a) = \Phi^m \check R_{ma} . \qquad /56/$$

К этому добавим получающееся из /9/ и /21/ следствие

$$\check R^s_{amn} \Theta^{mn}_s = \check R^s_{amn} \Phi^{mn}_s + \check R_{am} \Phi^m - \frac{1}{2} \Phi^m \check R_{ma} . \qquad /57/$$

Располагая формулами /14/, /51/, /56/ и /57/, получаем

$$\Theta_a = \check R^s_{amn} \Phi^{mn}_s + \check R_{am} \Phi^m +$$
$$+ (\check\nabla_m - P_m)(\check R^m_{nas} g^{sn} + \check R_{sa} g^{sm}). \qquad /58/$$

Теперь заметим, что согласно /42/

$$(\check\nabla_m - P_m) \check R^m_{nas} g^{sn} = \check R^m_{nas} \Phi^{sn}_m + g^{sn} \check\nabla_m \check R^m_{nas} , \qquad /59/$$

и что первое, взятое из правой части /58/, слагаемое и такое же по порядку слагаемое из /59/ в сумме дают нуль. Действительно, согласно /19/ сумма

$$\check R^s_{amn} \Phi^{mn}_s + \check R^m_{nas} \Phi^{sn}_m = -\check R^s_{mna} \Phi^{mn}_s \qquad /60/$$

равняется нулю, поскольку первый множитель в правой части /60/ антисимметричен по индексам $m, n$, а второй по тем же индексам симметричен. Учитывая все это, получаем

$$\Theta_a = \check R_{am} \Phi^m + g^{sn} \check\nabla_m \check R^m_{nas} + (\check\nabla_m - P_m) \check R_{sa} g^{sm} , \qquad /61/$$

Далее, из тождества /19/ следует, что

$$\check\nabla_m \check R^m_{nas} = \check\nabla_n \check R_{as} - \check\nabla_a \check R_{ns} , \qquad /62/$$

а так как

$$\check R_{am} \Phi^m + g^{sn} \check\nabla_n \check R_{as} = (\check\nabla_m - P_m) \check R_{as} g^{sm} ,$$

то согласно /61/

$$\Theta_a = (\check\nabla_m - P_m)[g^{ms}(\check R_{sa} + \check R_{as})] - g^{ns} \check\nabla_a \check R_{ns} . \qquad /63/$$

Теперь заметим, что

$$\check\nabla_a \check R_{ns} = \nabla_a \check R_{ns} - P^m_{an} \check R_{ms} - P^m_{as} \check R_{nm} \qquad /64/$$

и, следовательно,

$$g^{ns}\check\nabla_a \check R_{ns} = \nabla_a (g^{ns}\check R_{ns}) - g^{ns} P^m_{an}(\check R_{ms} + \check R_{sm}). \qquad /65/$$

Но и

$$(\check\nabla_m - P_m - \nabla_m)[g^{ms}(\check R_{sa} + \check R_{as})] = -P^n_{ma}\, g^{ms}(\check R_{ns} + \check R_{sn}). \qquad /66/$$

Подставляя /65/ и /66/ в /63/, получаем /15/, что и требовалось получить, исходя из определения /14/.

## 2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Для любого векторного поля $T^k$

$$(\check\nabla_k - P_k)T^k = \nabla_k T^k = \frac{1}{\epsilon}\partial_k(\epsilon T^k). \qquad /67/$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы применить теорему Гаусса к слагаемым, входящим в состав интеграла /8/. Такие слагаемые появляются, если ввести фоновую метрику $\check g_{ab}$ и считать, что связность $\check\Gamma^a_{mn}$ выражается через эту метрику по формуле Кристоффеля /6/. В таком случае, подобно /27/, имеем

$$\check\Gamma_m = \frac{1}{\check\epsilon}\partial_m \check\epsilon, \qquad /68/$$

где

$$\check\epsilon = \sqrt{|\check g|}. \qquad /69/$$

Поэтому

$$P_m = \frac{\epsilon}{\check\epsilon}\partial_m \frac{\check\epsilon}{\epsilon}, \qquad /70/$$

и для каждого тензора $T$

$$\frac{\epsilon}{\check\epsilon}(\check\nabla_m - P_m)T = \check\nabla_m\left(\frac{\epsilon}{\check\epsilon}T\right). \qquad /71/$$

Проварьируем связность Кристоффеля /6/ по $g_{ab}$. Имеем

$$\nabla_k \delta g_{mn} = \partial_k \delta g_{mn} - \Gamma^s_{km}\delta g_{sn} - \Gamma^s_{kn}\delta g_{ms}. \qquad /72/$$

Поэтому

$$\nabla_m \delta g_{kn} + \nabla_n \delta g_{km} - \nabla_k \delta g_{mn} =$$

$$= \partial_m \delta g_{kn} + \partial_n \delta g_{km} - \partial_k \delta g_{mn} - 2\Gamma^s_{mn}\delta g_{ks}. \qquad /73/$$

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$\delta\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}g^{ak}(\nabla_m \delta g_{kn} + \nabla_n \delta g_{km} - \nabla_k \delta g_{mn}). \qquad /74/$$

Применив эту формулу к вариации кристоффелевой связности $\check\Gamma^a_{mn}$, получаем

$$\Theta^{mn}_a \delta\check\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2}(\Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn})\check\nabla_k \delta\check g_{mn}, \qquad /75/$$

где

$$\Theta^{kmn} = \check g^{ka}\Theta^{mn}_a. \qquad /76/$$

Обратимся к формуле /67/, полагая

$$T^k = (\Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn})\delta\check g_{mn}. \qquad /77/$$

В данном случае

$$(\check\nabla_k - P_k)T^k = 2\Theta^{mn}_a \delta\check\Gamma^a_{mn} + \Theta^{mn}\delta\check g_{mn}, \qquad /78/$$

где

$$\Theta^{mn} = (\check\nabla_k - P_k)(\Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn}). \qquad /79/$$

В силу теоремы Гаусса в интеграл /8/, как это видно из формулы /78/, значения вектора /77/ входят только на границе области интегрирования. Считая, что на границе $\delta g_{mn}=0$, получаем вариацию Гильберта

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \Pi^{mn}\delta\check g_{mn}\check\epsilon\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \qquad /80/$$

где

$$\Pi^{mn} = \frac{\epsilon}{\check\epsilon}\Theta^{mn} = \check\nabla_k \frac{\epsilon}{\check\epsilon}(\Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn}). \qquad /81/$$

Этот тензор называем тензором энергии гравитационного поля $g_{ab}$ на фоне метрики $\check g_{ab}$.

Докажем, что

$$(\check\nabla_n - P_n)\check g_{am}\Theta^{mn} = \Theta_a, \qquad /82/$$

где $\Theta_a$ - ковектор /14/. Действительно, согласно /76/ и /79/

$$(\check\nabla_n - P_n)\check g_{am}\Theta^{mn} = (\check\nabla_n - P_n)(\check\nabla_k - P_k)\Theta^{nk}_a +$$

$$+(\check{\nabla}_n - P_n)(\check{\nabla}_k - P_k)\check{g}_{am}(\Theta^{nkm} - \Theta^{knm}). \qquad /83/$$

Применяя формулы /52/ и /55/, находим

$$(\check{\nabla}_n - P_n)(\check{\nabla}_k - P_k)\check{g}_{am}(\Theta^{nkm} - \Theta^{knm}) = \check{R}^s_{nka}\check{g}_{sm}\Theta^{knm}. \qquad /84/$$

Из вышеперечисленных алгебраических свойств тензора кривизны в случае связности Кристоффеля следует, что

$$\check{R}^s_{nka}\check{g}_{sm} = \check{R}^s_{amn}\check{g}_{sk}. \qquad /85/$$

Поэтому

$$\check{R}^s_{nka}\check{g}_{sm}\Theta^{knm} = \check{R}^s_{amn}\Theta^{mn}_{s}. \qquad /86/$$

Таким образом, формула /82/ доказана, а из нее и из формул /71/ и /81/ следует, что

$$\check{\nabla}_n \Pi^{mn} = \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}\check{g}^{am}\Theta_a. \qquad /87/$$

При выводе формулы /87/ мы воспользовались тем, что $\check{\nabla}_n\check{g}_{am} = 0$.

Докажем теперь, что при $\check{g}_{ab} = \eta_{ab}$ тензор /81/ совпадает с тензором Папапетру. Действительно, согласно /9/ и /76/

$$\Theta^{kmn} = \Phi^{kmn} - \frac{1}{2}(\Phi^m\check{g}^{nk} + \Phi^n\check{g}^{mk}), \qquad /88/$$

где

$$\Phi^{kmn} = \check{g}^{ka}\Phi^{mn}_a. \qquad /89/$$

Следовательно, входящий в /81/ тензор

$$T^{kmn} = \Theta^{mkn} + \Theta^{nkm} - \Theta^{kmn} \qquad /90/$$

равен

$$T^{kmn} = \Phi^{mkn} + \Phi^{nkm} - \Phi^{kmn} - \Phi^k\check{g}^{mn}. \qquad /91/$$

Учитывая /42/, отсюда получаем

$$T^{kmn} = (\check{\nabla}_\ell - P_\ell)S^{\ell kmn}, \qquad /92/$$

где

$$S^{\ell kmn} = \check{g}^{m\ell}g^{kn} + \check{g}^{n\ell}g^{km} - \check{g}^{\ell k}g^{mn} - \check{g}^{mn}g^{\ell k}. \qquad /93/$$

Собирая формулы /79/ и /90-94/, находим

$$\Theta^{mn} = (\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell)S^{\ell kmn} =$$



$$= (\check{\nabla}_\ell - P_\ell)(\check{\nabla}_k - P_k)S^{k\ell mn}. \qquad /94/$$

Далее, в силу формулы /70/ в данном случае

$$(\check{\nabla}_\ell - P_\ell)(\check{\nabla}_k - P_k) - (\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell) = \check{\nabla}_\ell\check{\nabla}_k - \check{\nabla}_k\check{\nabla}_\ell. \qquad /95/$$

Поэтому

$$\Theta^{mn} = (\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell)S^{k\ell mn} + \check{R}^k_{k\ell p}S^{p\ell mn} + \check{R}^\ell_{k\ell p}S^{kpmn} + \check{R}^m_{k\ell p}S^{k\ell pn} + \check{R}^n_{k\ell p}S^{k\ell mp}. \qquad /96/$$

Учтем, что $\check{R}_{mn} = \check{R}_{nm}$, поскольку мы рассматриваем кристоффелеву связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$. Следовательно,

$$\check{R}^k_{k\ell p}S^{p\ell mn} + \check{R}^\ell_{k\ell p}S^{kpmn} = \check{R}_{\ell p}(S^{p\ell mn} - S^{\ell pmn}) = 0. \qquad /97/$$

Учтем еще, что

$$S^{k\ell mn} = S^{k\ell nm} \qquad /98/$$

и запишем формулу /96/ в виде

$$\Theta^{mn} = (\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell)S^{k\ell mn} + \check{R}^m_{k\ell p}S^{k\ell pn} + \check{R}^n_{k\ell p}S^{k\ell pm}. \qquad /99/$$

Теперь заметим, что согласно /71/, /81/, /90/ и /92/

$$\Pi^{mn} = \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}\Theta^{mn} = \check{\nabla}_k\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}T^{kmn} = \check{\nabla}_k\check{\nabla}_\ell\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}S^{\ell kmn}, \qquad /100/$$

а следовательно,

$$\Pi^{mn} = \check{\nabla}_k\check{\nabla}_\ell\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}S^{k\ell mn} + \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}S^{k\ell pm}\check{R}^n_{k\ell p} + \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}S^{k\ell pn}\check{R}^m_{k\ell p}. \qquad /101/$$

При $\check{g}_{ab} = \eta_{ab}$, где $\eta_{ab}$ – метрика Минковского, тензор кривизны фоновой связности равен нулю, а тензор /100/ отличается от тензора, полученного Папапетру, лишь множителем $-16\pi$.

## 3. ГАРМОНИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ

Фоновую связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ назовем гармонической по отношению к главной метрике $g_{ab}$, если

$$\Phi^a = (\check{\nabla}_m - P_m)g^{am} = 0. \qquad /102/$$

При этом условии многие формулы, начиная с /9/, сильно упрощаются, в частности,

$$(\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell) S^{k\ell mn} = -\check{g}^{k\ell} (\check{\nabla}_k - P_k)(\check{\nabla}_\ell - P_\ell) g^{mn} ,$$

$$\check{\nabla}_k \check{\nabla}_\ell \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}} S^{k\ell mn} = -\check{g}^{k\ell} \check{\nabla}_k \check{\nabla}_\ell \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}} g^{mn} , \qquad /103/$$

в чем нетрудно убедиться.

## 4. ПОЛНАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИЯ

С помощью вышеприведенных формул и приведенной в [3, с.130] формулы

$$\check{R}^a_{mnb} = R^a_{mnb} + \nabla_m P^a_{bn} - \nabla_n P^a_{bm} + P^a_{ms} P^s_{nb} - P^a_{ns} P^s_{mb} , \qquad /104/$$

выражающей закон изменения тензора кривизны при переходе от связности $\Gamma^a_{mn}$ к связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$, можно сделать вывод о том, что полная вариация интеграла /1/ равна

$$\delta S = \int \Theta \epsilon \, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 , \qquad /105/$$

где

$$\Theta = \Theta^{mn}_a \delta \check{\Gamma}^a_{mn} + [G_{mn} - \frac{1}{2}(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) + \frac{1}{2} \check{R}_{ab} g^{ab} g_{mn} ] \delta g^{mn} . \qquad /106/$$

Полагая, что в этой формуле множитель при $\delta g^{mn}$ равен нулю, приходим к уравнениям, в силу которых ковектор /15/ равен нулю. В частном случае, когда кривизна фоновой метрики постоянна, такие уравнения были постулированы в работе [4].

Замечание. Ничто в формулах не изменится, если размерность многообразия считать равной любому натуральному числу N, суммирование по повторяющимся тензорным индексам подразумевать от 1 до N, а произведение $dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ заменить на $\prod_{k=1}^{N} dx^k$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Papapetrou A. Einstein's theory of gravitation and flat space. Proc.Roy.Irish.Acad., 1948, A52, p.11-23.
2. Эйнштейн А., Громмер Я. Общая теория относительности и закон движения. /1927/. В кн.: Собр.научн.трудов А.Эйнштейна. М.: Наука, 1966, т.2, с.198-222.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.
4. Rosen N. Localization of Gravitational Energy. Foundations of Physics. 1985, vol.15, No.10, p.997-1008.



Рукопись поступила в издательский отдел
10 сентября 1987 года.





Черников Н.А.



Р2-87-683


Вариационный метод Гильберта и тензор Папапетру


На четырехмерном многообразии рассматривается пара независимых геометрических объектов. Один из них, отождествляемый с гравитационным полем, определяет невырожденную метрику и называется главным. Другой объект называется фоновым. На первых порах это аффинная связность без кручения. Из двух объектов составляется эйнштейновского вида инвариантный интеграл по четырехмерной области. Этот интеграл называется лагранжевой функцией действия рассматриваемых объектов. От функции действия берется функциональная производная по фоновой связности при фиксированном главном объекте. Она называется тензором праэнергии гравитационного поля. Для тензора праэнергии формулируется и доказывается основная теорема. Затем вводится фоновая метрика, фоновая же связность считается для этой метрики кристоффелевой. Вариационная производная от функции действия по фоновой метрике /производная Гильберта/ называется тензором энергии гравитационного поля. К этому тензору применяется вышеуказанная теорема. На конечном этапе тензор кривизны фоновой метрики можно положить равным нулю. В результате получается известный тензор Папапетру.



Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс



Chernikov N.A.



P2-87-683


The Hilbert Variational Method and Papapetrou Tensor


A pair of independent geometrical objects is considered on a four-dimensional manifold. One of them identified with the gravitational field defines the nondegenerate metric and is called the basic object; the other is called the background object. At first stages this is the affine connexion without torsion. Composed of two objects is an invariant integral of the Einstein form over the four-dimensional region. This integral is called the Lagrangian action of the considered objects. The functional derivative of the action function is taken with respect to the background connexion at a fixed basic object. It is called the tensor of pre-energy of the gravitational field; for it a basic theorem is formulated and proved. Then the background metric is introduced, the background connexion being considered Christoffel for that metric. The variational derivative of the action function with respect to the background metric (the Hilbert derivative) is called the energy tensor of the gravitational field. The above theorem is applied to that tensor. At a finite step the curvature tensor of the background metric may be set zero. As a result, we obtain the known Papapetrou tensor.



The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987