объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-87-673

В.К.Мельников

О ДИНАМИКЕ ДВУМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

Направлено в Оргкомитет VIII Международного
совещания по проблемам квантовой теории
поля, Алушта, октябрь 1987 г.

1987

Успех в исследовании различных нелинейных процессов часто достигается благодаря удачному выбрасыванию части членов в исходных уравнениях, описывающих этот процесс. В результате такого выбрасывания упрощенные уравнения допускают более детальное рассмотрение. Задним числом всегда оказывается, что выброшенные члены являются в каком-то смысле несущественными для качественного описания рассматриваемого процесса. Таким образом возникают, например, следующие три системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{I}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2 = 0, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial y} = v\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{3}$$

описывающие (при определенных условиях) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Здесь u (или v) - амплитуда длинной волны, а φ (или ψ) - комплексная огибающая пакета коротких волн. При этом параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2 = 1$.

Нетрудно видеть, что система (2) получается из системы (I) в результате выбрасывания из второго уравнения этой системы члена $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, а система (3) получается из системы (I) после выбрасывания члена $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. С другой стороны, все эти три системы эквивалентны друг другу в том смысле, что каждая из них преобразуется в любую другую с помощью простой замены независимых переменных. Действительно, если $u = u(x,y,t)$, $\varphi = \varphi(x,y,t)$ -решение системы (I), то нетрудно убедиться, что пара функций

$$v = v(x,y,t) = u(x, 2y+t, t), \quad \psi = \psi(x,y,t) = \varphi(x, 2y+t, t), \tag{4}$$

а также пара функций

$$v = v(x,y,t) = u(-x,\, t,\, t+2y),$$
$$\psi = \psi(x,y,t) = \varphi(-x,\, t,\, t+2y) \tag{5}$$

удовлетворяют системе (2). Далее, нетрудно убедиться, что если $u = u(x,y,t)$, $\varphi = \varphi(x,y,t)$ - решение системы (I), то пара функций

$$v = v(x,y,t) = u(x,y,2t+y),$$
$$\psi = \psi(x,y,t) = \varphi(x,y,2t+y), \tag{6}$$

а также пара функций

$$v = v(x,y,t) = u(-x,\, y+2t,\, y),$$
$$\psi = \psi(x,y,t) = \varphi(-x,\, y+2t,\, y) \tag{7}$$

удовлетворяют системе (3). Наконец, система (2) связана с системой (3) преобразованием $x \to -x$, $y \to t$, $t \to y$. При этой замене решение (4) системы (2) переходит в решение (7) системы (3), а решение (5) системы (2) переходит в решение (6) системы (3). Заметим, кстати, что система (I) инвариантна относительно замены $x \to -x, y \to t, t \to y$, система (2) в силу (4),(5) инвариантна относительно замены

$$x \to -x,\; y \to -y,\; t \to t+2y, \tag{8}$$

а согласно (6),(7) система (3) инвариантна относительно замены

$$x \to -x,\; y \to y+2t,\; t \to -t. \tag{9}$$

Как известно /I,2/, система (2) допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния. Отсюда следует, что к системам (I) и (3) также применим этот метод. При этом оказывается, что динамика солитонов этих систем имеет существенные различия, на которые будет указано ниже.

§ I. Односолитонные решения систем (I)-(3)

Согласно результатам работы /2/ система (2) обладает односолитонным решением вида

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta]}, \tag{10}$$

$$\psi = c\,\frac{\exp[i\nu x + i\tau y - i(\mu^2-\nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta]},$$

где вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина c удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu-\sigma)\mu^2 + \varkappa|c|^2 = 0, \tag{II}$$

а величины $\delta, \tau, \arg c$ принимают произвольные вещественные значения. Положим

$$\omega = \mu + i\nu,\quad \rho^2 = \tau + 2i\mu\sigma + \bar\omega^2, \tag{I2}$$

где черта, как и всюду в дальнейшем, означает комплексное сопряжение. В результате замены (8) односолитонное решение (I0) системы (2) превращается в односолитонное решение этой же системы

$$v' = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma' y+2\nu' t)+\delta']},$$
$$\psi' = c\,\frac{\exp[i\nu' x + i\tau' y - i(\mu^2-\nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma' y+2\nu' t)+\delta']}, \tag{I3}$$

где

$$\nu' = -\nu,\quad \sigma' = \sigma - 2\nu,\quad \tau' = -\tau - 2\mu^2 + 2\nu^2,\quad \delta' = -\delta. \tag{I4}$$

Таким образом, определенные посредством (I2) с помощью величин $\mu' = \mu$, ν', σ', τ' величины $\omega' = \mu' + i\nu'$, $\rho'^2 = \tau' + 2i\mu'\sigma' + \bar\omega'^2$ имеют вид

$$\omega' = \mu - i\nu = \bar\omega,\quad \rho'^2 = -\tau + 2i\mu\sigma - \omega^2 = -\bar\rho^2,$$

т.е. на односолитонном уровне замена переменных (8) эквивалентна замене параметров ω и ρ^2 на $\omega' = \bar\omega$ и $\rho'^2 = -\bar\rho^2$.

С помощью замены $x \to -x$, $y \to t$, $t \to y$ односолитонное решение (I0) системы (2) превращается в односолитонное решение

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu y-2\sigma t)-\delta]}, \tag{I5}$$

$$\psi = c\,\frac{\exp[-i\nu x - i(\mu^2-\nu^2)y + i\tau t]}{ch[\mu(x-2\nu y-2\sigma t)-\delta]}$$

системы (3). При этом вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина c по-прежнему удовлетворяют соотношению (I), а величины $\delta, \tau, \arg c$ принимают произвольные вещественные значения. В результате замены (9) односолитонное решение (I5) системы (3) превращается в односолитонное решение этой же системы

$$v' = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu' y-2\sigma' t)-\delta']},$$
$$\psi' = c\,\frac{\exp[-i\nu' x - i(\mu^2-\nu^2)y + i\tau' t]}{ch[\mu(x-2\nu' y-2\sigma' t)-\delta']}, \tag{I6}$$

где величины ν', σ', τ' и δ' определены посредством (I4). Нетрудно видеть, что решение (I6) системы (3) получается из решения (I3) системы (2) с помощью замены $x \to -x,\ y \to t,\ t \to y$.

Если теперь в решении (I0) системы (2) заменить y на $\frac{1}{2}(y-t)$, то на основании (4) получим односолитонное решение системы (I) вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2\{\mu[x+\sigma y+(2\nu-\sigma)t]+\delta\}},$$
$$\varphi = c\,\frac{\exp[i\nu x + i\frac{\tau}{2}y - i(\frac{\tau}{2}+\mu^2-\nu^2)t]}{ch\{\mu[x+\sigma y+(2\nu-\sigma)t]+\delta\}}. \tag{I7}$$

Аналогичным образом, заменив в решении (I5) системы (3) t на $\frac{1}{2}(t-y)$, в силу (6) получим односолитонное решение системы (I) вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2\{\mu[x-(2\nu-\sigma)y-\sigma t]-\delta\}},$$
$$\varphi = c\,\frac{\exp[-i\nu x - i(\frac{\tau}{2}+\mu^2-\nu^2)y + i\frac{\tau}{2}t]}{ch\{\mu[x-(2\nu-\sigma)y-\sigma t]-\delta\}}. \tag{I8}$$

Нетрудно видеть, что решение (I8) получается из решения (I7) с помощью замены $x \to -x,\ y \to t,\ t \to y$. Кроме того, нетрудно убедиться, что решение (I7) системы (I) можно получить из решения (I6) системы (3), заменив в нём t на $\frac{1}{2}(t-y)$, а решение (I8) системы (I) можно получить из решения (I3) системы (2), заменив в нём y на $\frac{1}{2}(y-t)$.

Таким образом, на односолитонном уровне системы (I)-(3) не обнаруживают разницы в поведении своих решений. Однако при рассмотрении двусолитонных решений этих систем обнаруживается существенная разница в их поведении.

§ 2. Двусолитонное решение системы (2)

Согласно результатам работы /2/ двусолитонное решение системы (2) получается следующим образом. Возьмем функции D и Ψ вида

$$D = 1 + \alpha_1\exp[2\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)] + \alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)] + 2\beta_0\exp[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)+\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)]\cos\theta + \gamma_0\exp[2\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)+2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)],$$
$$\Psi = 2a_1\{1+\beta_2\exp[2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)]\}\exp[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)]\exp[i\nu_1 x+i\tau_1 y-i(\mu_1^2-\nu_1^2)t] + 2a_2\{1+\beta_1\exp[2\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)]\}\exp[\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)]\exp[i\nu_2 x+i\tau_2 y-i(\mu_2^2-\nu_2^2)t], \tag{I9}$$

где

$$\omega_1 = \mu_1 + i\nu_1, \quad \omega_2 = \mu_2 + i\nu_2,$$
$$\rho_1^2 = \tau_1 + 2i\mu_1\sigma_1 + \bar{\omega}_1^2, \quad \rho_2^2 = \tau_2 + 2i\mu_2\sigma_2 + \bar{\omega}_2^2,$$
$$\alpha_1 = \frac{\varkappa|a_1|^2}{2(\sigma_1-\nu_1)\mu_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa|a_2|^2}{2(\sigma_2-\nu_2)\mu_2^2}, \tag{20}$$
$$\beta_0^2 = \frac{|\omega_1+\bar{\omega}_1||\omega_2+\bar{\omega}_2||\rho_1^2-\bar{\rho}_1^2||\rho_2^2-\bar{\rho}_2^2|}{|\omega_1+\bar{\omega}_2|^2\,|\rho_1^2-\bar{\rho}_2^2|^2}|\alpha_1\alpha_2|,$$
$$\gamma_0 = \alpha_1\alpha_2\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar{\omega}_2}\right|^2\left|\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1^2-\bar{\rho}_2^2}\right|^2,$$

$$\beta_1 = \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\bar\omega_1}\,\frac{\bar\rho_2^2-\bar\rho_1^2}{\bar\rho_2^2-\rho_1^2}\,\alpha_1\,,\quad \beta_2=\frac{\omega_1-\omega_2}{\bar\omega_1+\bar\omega_2}\,\frac{\bar\rho_1^2-\bar\rho_2^2}{\bar\rho_1^2-\rho_2^2}\,\alpha_2\,,$$

$$\theta=(\nu_1-\nu_2)x+(\tau_1-\tau_2)y-(\mu_1^2-\nu_1^2-\mu_2^2+\nu_2^2)t+\theta_0 .$$

Тогда функции

$$v = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D\,,\quad \psi=\frac{\Psi}{D} \tag{21}$$

являются решением системы (2). Если на входящие в определение функций D и Ψ параметры наложить требования

$$(\sigma_1-\nu_1)\varkappa>0\,,\quad (\sigma_2-\nu_2)\varkappa>0, \tag{22}$$

$$|\omega_1+\bar\omega_1||\omega_2+\bar\omega_2||\rho_1^2-\bar\rho_1^2||\rho_2^2-\bar\rho_2^2|\le|\omega_1+\bar\omega_2|^2|\rho_1^2-\bar\rho_2^2|^2, \tag{23}$$

то определенное указанным выше способом решение системы (2) не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t.

В типичном случае, т.е. при выполнении условий $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$ и $\sigma_1\neq\sigma_2$, определенное выше решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (10), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению обоих солитонов в области взаимодействия. Однако при удалении от области взаимодействия искажение обоих солитонов стремится к нулю. Окончательный результат взаимодействия выражается исключительно в фазовых сдвигах.

В том случае, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $\sigma_1=\sigma_2$, а $\nu_1\neq\nu_2$, наше решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (10), распространяющихся на плоскости x, y вдоль одной и той же прямой. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению обоих солитонов в течение некоторого ограниченного промежутка времени. Однако при $t\to\pm\infty$ искажение обоих солитонов стремится к нулю. Результатом взаимодействия являются фазовые сдвиги обоих солитонов.

Наконец, если $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $\sigma_1=\sigma_2$ и $\nu_1=\nu_2$, то решение (21) описывает одну уединенную волну, получившуюся из двух солитонов вида (10), которые движутся в одном и том же направлении с одинаковыми фазовыми скоростями. При этом образованная таким образом уединенная волна осциллирует. Действительно, пусть $\nu=\nu_1=\nu_2$, $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$. Тогда в силу неравенств $\omega_1+\bar\omega_2\neq 0$, $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$ ранг матрицы

$$\chi=\begin{vmatrix}1 & 2\sigma & 2\nu\\ 0 & \tau_1-\tau_2 & -\mu_1^2+\mu_2^2\end{vmatrix}$$

равен 2, что гарантирует наличие этого эффекта.

Таким образом, при выполнении неравенства $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$
рассматриваемое нами решение описывает различные типы упругого взаи-
модействия двух солитонов вида (10). В противном случае, т.е. при
выполнении условия $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$ наше решение описывает не-
упругое взаимодействие. Именно, если $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$, $\sigma_1\neq\sigma_2$,
то имеет место гашение одного солитона вида (10) другим солитоном
того же вида. Это явление было впервые обнаружено в работе /3/ и ис-
следовано детально в работе /4/. Заметим только, что имеется сущест-
венная качественная разница в поведении интересующего нас решения
в случае $\mu_1=\mu_2$ и в случае $\mu_1\neq\mu_2$. Отметим также, что случай
$\mu_1=\mu_2$ возможен как при $\omega_1=\omega_2$, так и при $\rho_1^2=\rho_2^2$, в то
время как случай $\mu_1\neq\mu_2$ возможен только при $\rho_1^2=\rho_2^2$. Нако-
нец, при $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$, $\sigma_1=\sigma_2$, а $\nu_1\neq\nu_2$ имеет место
эволюция одного солитона вида (10) в другой солитон того же вида,
но с другими значениями параметров. Эта ситуация возможна только
при $\rho_1^2=\rho_2^2$. Из этого равенства следует, что $(\sigma-\nu_1)\mu_1=$
$=(\sigma-\nu_2)\mu_2$, где $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$. Отсюда вытекает, что при $\nu_1\neq\nu_2$
справедливо неравенство $\mu_1\neq\mu_2$. На этой основе с помощью (19) и
(20) получаем, что перестройка одного солитона вида (10) в другой со-
литон этого же вида всегда сопровождается испусканием или поглощени-
ем некоторой дополнительной уединенной волны вида

$$v=f(x, y+t)\,,\quad \Psi=0\,, \tag{24}$$

где f – некоторая гладкая функция двух переменных.

§ 3. Двусолитонное решение системы (3)

Совершим теперь в функциях D и Ψ вида (19) замену координат $x\to -x$, $y\to t$, $t\to y$. В результате получим новые функции D и Ψ вида

$$D=1+\alpha_1\exp[2\mu_1(-x+2\nu_1 y+2\sigma_1 t)]+\alpha_2\exp[2\mu_2(-x+2\nu_2 y+2\sigma_2 t)]+$$
$$+2\beta_0\exp[\mu_1(-x+2\nu_1 y+2\sigma_1 t)+\mu_2(-x+2\nu_2 y+2\sigma_2 t)]\cos\theta+$$

$$+\gamma_0 \exp[2\mu_1(-x+2\nu_1 y+2\sigma_1 t)+2\mu_2(-x+2\nu_2 y+2\sigma_2 t)],$$

$$\Psi=2a_1\{1+\beta_2\exp[2\mu_2(-x+2\nu_2 y+2\sigma_2 t)]\}\exp[\mu_1(-x+2\nu_1 y+2\sigma_1 t)]\exp[-i\nu_1 x-i(\mu_1^2-\nu_1^2)y+i\tau_1 t]+$$
$$+2a_2\{1+\beta_1\exp[2\mu_1(-x+2\nu_1 y+2\sigma_1 t)]\}\times \tag{25}$$
$$\times\exp[\mu_2(-x+2\nu_2 y+2\sigma_2 t)]\exp[-i\nu_2 x-i(\mu_2^2-\nu_2^2)y+i\tau_2 t],$$

где

$$\theta=-(\nu_1-\nu_2)x-(\mu_1^2-\nu_1^2-\mu_2^2+\nu_2^2)y+(\tau_1-\tau_2)t+\theta_0. \tag{26}$$

Получаемые с помощью этих функций D и Ψ посредством формул (21) новые функции v и ψ, очевидно, являются решением системы (3). Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (22) и (23) это решение не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t.

Посмотрим теперь, каково поведение этого решения. В типичном случае, т.е. при выполнении условий $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$ и $\nu_1\neq\nu_2$ это решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (15), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Оба солитона испытывают сильное искажение в области взаимодействия, однако при удалении от области взаимодействия искажение обоих солитонов стремится к нулю. Окончательный результат взаимодействия выражается только фазовыми сдвигами.

В том случае, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $\nu_1=\nu_2$, $\sigma_1\neq\sigma_2$, рассматриваемое нами решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (15), распространяющихся на плоскости x, y вдоль одной и той же прямой. Взаимодействие между солитонами приводит к сильному искажению обоих солитонов в течение некоторого ограниченного промежутка времени, однако при $t\to\pm\infty$ искажение обоих солитонов стремится к нулю. Результат взаимодействия выражается только фазовыми сдвигами.

Наконец, при $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $\nu_1=\nu_2$ и $\sigma_1=\sigma_2$ рассматриваемое решение описывает уединенную волну, образованную двумя слившимися солитонами вида (15). Получившаяся уединенная волна осциллирует.

Таким образом, в случае $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$ картина, возникающая в процессе изучения взаимодействия двух солитонов системы (3), повторяет в точности ту картину, которая имелась при рассмотрении взаимодействия двух солитонов системы (2). Разница состоит только в том, что во всех утверждениях предыдущего параграфа параметры ν_1, ν_2 и σ_1, σ_2 поменялись местами.

Рассмотрим теперь случай, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$, а $\nu_1\neq\nu_2$. В этом случае имеет место гашение одного солитона вида (15) другим солитоном того же вида. Эта ситуация возможна только при $\rho_1^2=\rho_2^2$. Однако допустимы как случай $\mu_1=\mu_2$, так и случай $\mu_1\neq\mu_2$. Таким образом, гашение одного солитона другим солитоном в системе (3) не имеет качественного отличия от этого же процесса в системе (2).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$, $\nu_1=\nu_2$, а $\sigma_1\neq\sigma_2$. В этом случае интересующее нас решение описывает эволюцию одного солитона вида (15) в другой солитон этого же вида, но с другими значениями параметров. Это явление возможно как при $\omega_1=\omega_2$, так и при $\rho_1^2=\rho_2^2$. И здесь обнаруживается существенная разница между системами (2) и (3). Действительно, положим $\omega_1=\omega_2=\omega=\mu+i\nu$. Пусть, далее, $\sigma_2=\nu$, $a_2=0$. Тогда с учётом (20) и (25) выражения для функций D и Ψ примут вид

$$D=1+\alpha_1\exp[2\mu(-x+2\nu y+2\sigma_1 t)]+\alpha_2\exp[2\mu(-x+2\nu y+2\sigma_2 t)],$$

$$\Psi=2a_1\exp[\mu(-x+2\nu y+2\sigma_1 t)]\exp[-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_1 t],$$

где $\alpha_2>0$ – произвольно. Выясним, какой процесс описывает рассматриваемое нами решение при таком выборе функций D и Ψ. Нетрудно видеть, что при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении присутствует уединенная волна вида

$$v=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu y-2\sigma_1 t)-\delta_1]},$$
$$\psi=c_1\frac{\exp[-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_1 t]}{ch[\mu(x-2\nu y-2\sigma_1 t)-\delta_1]}, \tag{27}$$

где $\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1$, $c_1=a_1\exp(-\delta_1)$. При $(\sigma_2-\sigma_1)\mu<0$ эта волна появляется при $t\to\infty$. Кроме того, при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu<0$ и $t\to\infty$ в нашем решении содержится вторая уединенная волна вида

$$v=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu y-2\sigma_2 t)-\delta_2]},\quad \psi=0, \tag{28}$$

где $\delta_2=\frac{1}{2}\ln\alpha_2$. При $(\sigma_1-\sigma_2)\mu>0$ эта волна возникает при $t\to-\infty$. Таким образом, если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$, то при $t\to-\infty$ наше решение имеет асимптотику (27), а при $t\to\infty$ оно имеет асимптотику (28). Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu>0$, то при $t\to-\infty$ наше решение имеет асимптотику (28), а при $t\to\infty$ оно имеет асимптотику (27). Это значит, что при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$ рассматриваемое нами решение описывает эволюцию солитона (27) в солитон (28), а при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu>0$ это решение описывает эволюцию солитона (28) в солитон (27). Мы видим, что эволюция солитона (27) в солитон (28) сопровождается исчезновением (поглощением) ψ - волны. Наоборот, эволюция солитона (28) в солитон (27) сопровождается появлением (излучением) ψ - волны. Впервые это явление было обнаружено нами ранее в другой системе уравнений /5/.

Из равенств (27) и (28) следует, что излучение или поглощение ψ -волны сопровождается изменением фазовой скорости v -волны. При этом между амплитудой c_1 ψ -волны и разностью $\sigma_1-\sigma_2$ фазовых скоростей v - волны выполняется соотношение

$$\varkappa|c_1|^2 = 2(\sigma_1-\sigma_2)\mu^2,$$

непосредственно вытекающее из (II) в силу равенства $\sigma_2=\nu=\nu_1$.

Заметим, что из двусолитонного решения системы (2) получить решение, описывающее процессы излучения и поглощения ψ -волны, невозможно.

Существует ещё одно явление, отличающее систему (3) от системы (2). Суть его состоит в следующем. Пусть снова $\omega_1=\omega_2=\omega=\mu+i\nu$. Тогда согласно (20) и (25) выражения для функций D и Ψ принимают вид

$$D = 1+\alpha_1 \exp[2\mu(-x+2\nu y+2\sigma_1 t)]+\alpha_2\exp[2\mu(-x+2\nu y+2\sigma_2 t)]+$$
$$+2\beta_0\exp[2\mu(-x+2\nu y)+2\mu(\sigma_1+\sigma_2)t]\cos\theta, \tag{29}$$
$$\Psi = 2a_1\exp[\mu(-x+2\nu y+2\sigma_1 t)-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_1 t]+$$
$$+2a_2\exp[\mu(-x+2\nu y+2\sigma_2 t)-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_2 t],$$

где в силу (26) имеем

$$\theta = (\tau_1-\tau_2)t+\theta_0. \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$ и $t\to-\infty$ получаемое с помощью (29) и (30) решение системы (3) имеет асимптотику

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu y-2\sigma_1 t)-\delta_1]}, \tag{31}$$

$$\psi_1 = c_1\frac{\exp[-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_1 t]}{ch[\mu(x-2\nu y-2\sigma_1 t)-\delta_1]},$$

где $\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1$, $c_1=a_1\exp(-\delta_1)$, а при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$ и $t\to\infty$ это решение имеет асимптотику

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x-2\nu y-2\sigma_2 t)-\delta_2]},$$
$$\psi = c_2\frac{\exp[-i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)y+i\tau_2 t]}{ch[\mu(x-2\nu y-2\sigma_2 t)-\delta_2]}, \tag{32}$$

где $\delta_2=\frac{1}{2}\ln\alpha_2$, $c_2=a_2\exp(-\delta_2)$. Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu>0$, то при $t\to-\infty$ рассматриваемое нами решение имеет асимптотику (32), а при $t\to\infty$ оно имеет асимптотику (31). Таким образом, в рассматриваемой сейчас ситуации наше решение описывает эволюцию солитона (31) в солитон (32), если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu>0$, а если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu>0$, то имеет место эволюция солитона (32) в солитон (31). Существенно отметить, что в данном случае эволюция одного солитона в другой солитон не сопровождается испусканием или поглощением дополнительной уединенной волны вида (24), как это было обнаружено при рассмотрении двусолитонного решения системы (2). При этом на основе (20) справедливы равенства

$$\varkappa|c_1|^2 = 2(\sigma_1-\nu)\mu^2,\quad \varkappa|c_2|^2=2(\sigma_2-\nu)\mu^2, \tag{33}$$

аналогичные равенству (II). Из этих равенств следует, что приращение $|c_2|^2-|c_1|^2$ квадратов амплитуд ψ - волны связано с разностью $\sigma_2-\sigma_1$ фазовых скоростей v - волны простым соотношением

$$(|c_2|^2-|c_1|^2)\varkappa = 2(\sigma_2-\sigma_1)\mu^2.$$

Из равенств (33) следует, что

$$\sigma_1 = \frac{\varkappa|c_1|^2}{2\mu^2}+\nu,\quad \sigma_2=\frac{\varkappa|c_2|^2}{2\mu^2}+\nu. \tag{34}$$

Пусть ζ_1 и ζ_2 равны соответственно наибольшей и наименьшей из величин $\frac{\varkappa|c_1|^2}{2\mu^2}$ и $\frac{\varkappa|c_2|^2}{2\mu^2}$. Из равенств (34) следует, что если параметр ν лежит вне интервала $(-\zeta_1,-\zeta_2)$, то справедливо неравенство $\sigma_1\sigma_2>0$. В противном случае, т.е. при $\nu\in(-\zeta_1,-\zeta_2)$ имеет место неравенство $\sigma_1\sigma_2<0$. Отсюда следует, что в случае

$\nu \bar{\in} (-\zeta_1, -\zeta_2)$ солитоны (31) и (32) движутся в одном и том же направлении. Наоборот, если $\nu \in (-\zeta_1, -\zeta_2)$, то солитоны (31) и (32) движутся в прямо противоположных направлениях, т.е. рассматриваемое нами решение в этом случае описывает отражение солитона. Решения такого типа впервые были обнаружены в работе /6/ при рассмотрении другой системы уравнений.

§ 4. Двусолитонное решение системы (I)

Заменим теперь в выражениях (19) для функций D и Ψ координату y на $\frac{1}{2}(y-t)$. В результате получим функции D и Φ вида

$$
\begin{aligned}
D &= 1 + \alpha_1 \exp[2\mu_1(x + \sigma_1 y + \nu_1' t)] + \alpha_2 \exp[2\mu_2(x + \sigma_2 y + \nu_2' t)] + \\
&+ 2\beta_0 \exp[\mu_1(x + \sigma_1 y + \nu_1' t) + \mu_2(x + \sigma_2 y + \nu_2' t)] \cos\theta + \\
&+ \gamma_0 \exp[2\mu_1(x + \sigma_1 y + \nu_1' t) + 2\mu_2(x + \sigma_2 y + \nu_2' t)], \\
\Phi &= 2a_1 \{1 + \beta_2 \exp[2\mu_2(x + \sigma_2 y + \nu_2' t)]\} \exp[\mu_1(x + \\
&+ \sigma_1 y + \nu_1' t)] \exp\left[i\nu_1 x + i\frac{\tau_1}{2} y - i\left(\frac{\tau_1}{2} + \mu_1^2 - \nu_1^2\right) t\right] + \\
&+ 2a_2 \{1 + \beta_1 \exp[2\mu_1(x + \sigma_1 y + \nu_1' t)]\} \exp[\mu_2(x + \\
&+ \sigma_2 y + \nu_2' t)] \exp\left[i\nu_2 x + i\frac{\tau_2}{2} y - i\left(\frac{\tau_2}{2} + \mu_2^2 - \nu_2^2\right) t\right],
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где $\nu_1' = 2\nu_1 - \sigma_1$, $\nu_2' = 2\nu_2 - \sigma_2$, а

$$\theta = (\nu_1 - \nu_2) x + \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) y - \left(\frac{\tau_1}{2} - \frac{\tau_2}{2} + \mu_1^2 - \nu_1^2 - \mu_2^2 + \nu_2^2\right) t + \theta_0 .$$

Нетрудно видеть, что функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \tag{36}$$

являются решением системы (I). Далее, нетрудно убедиться, что условия (22) и (23) гарантируют отсутствие особенностей у этого решения при любых вещественных значениях координат x, y, t.

Выясним теперь, каково поведение этого решения. Нетрудно проверить, что если $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$ и $\sigma_1 \neq \sigma_2$, то рассматриваемое здесь решение системы (I) описывает упругое взаимодействие двух солитонов вида (17), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. В том случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$, а $\nu_1 \neq \nu_2$, наше решение описывает упругое взаимодействие двух солитонов вида (17), распространяющихся на плоскости x, y вдоль

одной и той же прямой. Наконец, если $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\nu_1 = \nu_2$, то интересующее нас решение описывает одну уединенную волну, образованную двумя слившимися солитонами вида (17). Качественная картина каждого из упомянутых выше процессов тождественна с той, которая уже встречалась в аналогичной ситуации в случае систем (2) и (3).

Посмотрим теперь, каково поведение рассматриваемого здесь решения при выполнении условия $(\omega_1 - \omega_2)(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0$. В том случае, когда $\sigma_1 \neq \sigma_2$, имеет место гашение одного солитона вида (17) другим солитоном того же вида. Здесь возможны случаи как с $\omega_1 = \omega_2$, так и с $\rho_1^2 = \rho_2^2$, и, следовательно, возможно как $\mu_1 = \mu_2$, так и $\mu_1 \neq \mu_2$, т.е. имеет место полное сходство с аналогичной ситуацией для систем (2) и (3). Далее, если $\sigma_1 = \sigma_2$, а $\nu_1 \neq \nu_2$, то имеет место эволюция одного солитона вида (17) в другой солитон того же вида, но с другими значениями параметров. Эта ситуация возможна только при $\rho_1^2 = \rho_2^2$. Пусть $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Тогда из равенства $\rho_1^2 = \rho_2^2$ следует, что $(\sigma - \nu_1)\mu_1 = (\sigma - \nu_2)\mu_2$, т.е. при $\nu_1 \neq \nu_2$ имеем $\mu_1 \neq \mu_2$. Это значит, что эволюция одного солитона вида (17) в другой солитон этого же вида обязательно сопровождается испусканием или поглощением дополнительной уединенной волны вида (24). Кроме того, из равенства $(\sigma - \nu_1)\mu_1 = (\sigma - \nu_2)\mu_2$ следует, что $\sigma \neq \nu_1$ и $\sigma \neq \nu_2$, т.е. в выражениях (35) для функций D и Φ нельзя положить $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ или $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. Это значит, что в системе (I) нет решений, описывающих процессы излучения или поглощения φ - волны. Таким образом, рассмотренное выше двусолитонное решение системы (I) по количеству и качеству возможных вариантов совпадает с двусолитонным решением системы (2) и отличается от двусолитонного решения системы (3).

Существует ещё один путь для получения двусолитонного решения системы (I). Именно: заменим в выражениях (25) для функций D и Ψ время t на $\frac{1}{2}(t-y)$. В результате получим функции D и Φ вида

$$
\begin{aligned}
D &= 1 + \alpha_1 \exp[2\mu_1(-x + \nu_1' y + \sigma_1 t)] + \alpha_2 \exp[2\mu_2(-x + \nu_2' y + \sigma_2 t)] + \\
&+ 2\beta_0 \exp[\mu_1(-x + \nu_1' y + \sigma_1 t) + \mu_2(-x + \nu_2' y + \sigma_2 t)] \cos\theta + \\
&+ \gamma_0 \exp[2\mu_1(-x + \nu_1' y + \sigma_1 t) + 2\mu_2(-x + \nu_2' y + \sigma_2 t)],
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$\Phi = 2a_1 \{1 + \beta_2 \exp[2\mu_2(-x + \nu_2' y + \sigma_2 t)]\} \exp[\mu_1(-x + \nu_1' y +$$

$$+\sigma_1 t)]\exp\left[-i\nu_1 x - i\left(\frac{\tau_1}{2}+\mu_1^2-\nu_1^2\right)y + i\frac{\tau_1}{2}t\right] +$$

$$+2a_2\{1+\beta_1\exp[2\mu_1(-x+\nu_1' y+\sigma_1 t)]\}\exp[\mu_2(-x+\nu_2' y+$$

$$+\sigma_2 t)]\exp\left[-i\nu_2 x - i\left(\frac{\tau_2}{2}+\mu_2^2-\nu_2^2\right)y + i\frac{\tau_2}{2}t\right],$$

где

$$\nu_1' = 2\nu_1-\sigma_1, \quad \nu_2' = 2\nu_2-\sigma_2,$$

$$\theta = -(\nu_1-\nu_2)x - \left(\frac{\tau_1}{2}-\frac{\tau_2}{2}+\mu_1^2-\nu_1^2-\mu_2^2+\nu_2^2\right)y+\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_2)t+\theta_0.$$

Очевидно, что получаемые с помощью этих функций D и Φ посредством (36) функции u и φ удовлетворяют системе (I). При выполнении условий (22),(23) это решение не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t. Нетрудно видеть, что функции D и Φ вида (37) могут быть получены из функций D и Φ вида (35) с помощью замены координат $x\to -x, y\to t, t\to y$. Поскольку именно эта замена координат связывает систему (2) с системой (3), то возникает иллюзия, что определенное с помощью функций D и Φ вида (37) двусолитонное решение системы (I) будет иметь более богатую динамику, нежели аналогичное решение, определенное с помощью функций D и Φ вида (35). Посмотрим же, что происходит на самом деле.

В типичном случае, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, а $2\nu_1-\sigma_1\neq 2\nu_2-\sigma_2$, наше решение описывает упругое взаимодействие двух солитонов вида (I8), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Если же $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $2\nu_1-\sigma_1=2\nu_2-\sigma_2$, а $\sigma_1\neq\sigma_2$, то рассматриваемое нами решение описывает упругое взаимодействие двух солитонов вида (I8), распространяющихся на плоскости x, y вдоль одной и той же прямой. Наконец, при $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, $\nu_1=\nu_2$ и $\sigma_1=\sigma_2$ это решение описывает одну уединенную волну, образованную двумя слившимися солитонами вида (I8). Таким образом, при $(\omega_1-\omega_2)\times(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$ ничего нового по сравнению с тем, что было раньше, не обнаруживается.

Посмотрим теперь, что происходит при $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$. Нетрудно видеть, что при $2\nu_1-\sigma_1\neq 2\nu_2-\sigma_2$ наше решение описывает гашение одного солитона вида (I8) другим солитоном этого же вида. Этот процесс возможен как при $\omega_1=\omega_2$, так и при $\rho_1^2=\rho_2^2$, т.е. возможно гашение как в случае $\mu_1=\mu_2$, так и в случае $\mu_1\neq\mu_2$. Далее, при $2\nu_1-\sigma_1=2\nu_2-\sigma_2$, но $\sigma_1\neq\sigma_2$ имеет место эволюция одного солитона вида (I8) в другой солитон этого же вида, но с другими значениями параметров. Очевидно, что при этом выполняется неравенство $\nu_1\neq\nu_2$, т.е. $\omega_1\neq\omega_2$. Значит, справедливо равенство $\rho_1^2=\rho_2^2$. Из этого равенства следует, что $(\sigma_1-\nu_1)\mu_1=(\sigma_2-\nu_2)\mu_2$. Таким образом, в этой ситуации должно выполняться неравенство $\mu_1\neq\mu_2$. В силу этого неравенства получаем, что описываемая рассматриваемым здесь решением эволюция одного солитона вида (I8) в другой солитон этого же вида обязательно сопровождается испусканием или поглощением дополнительной уединенной волны вида (24). Наконец, из равенства $(\sigma_1-\nu_1)\mu_1=(\sigma_2-\nu_2)\mu_2$ следует, что если $\nu_1=\sigma_1$, то $\nu_2=\sigma_2$. Это значит, что в выражениях (37) для функций D и Φ нельзя положить $a_1=0$, $a_2\neq 0$ или $a_1\neq 0$, $a_2=0$, т.е. из интересующего нас решения невозможно получить решение, описывающее процессы излучения или поглощения φ - волны.

Суммируя все сказанное выше, мы видим, что двусолитонные решения систем (I) и (2) имеют одинаковую динамику. Однако динамика двусолитонного решения системы (3) оказывается богаче, нежели динамика двусолитонных решений систем (I) и (2). При этом выясняется, что в типичном случае, т.е. при выполнении неравенства $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\neq 0$, динамика двусолитонного решения совпадает у всех трех систем. Разница в динамике двусолитонных решений этих систем обнаруживается только в случае $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$. Эта разница состоит в том, что с помощью двусолитонного решения системы (3) удается описать процессы излучения и поглощения ψ - волны, а также процесс эволюции одного солитона этой системы в другой солитон этой же системы, происходящий без испускания или поглощения дополнительной уединенной волны вида (24). При этом возможен случай, когда исходный солитон и конечный солитон имеют прямо противоположные направления движения, т.е. происходит отражение солитона.

Литература

I. Mel'nikov V.K. Lett. Math. Phys., I983, v.7, No 2, p. I29-I36.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна: ОИЯИ, I986.
3. Мельников В.К. Изв. вузов - Радиофизика, I987, т. 30, № 7.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-87-494, Дубна: ОИЯИ, I987.
5. Mel'nikov V.K. Phys. Lett., I986, v. AII8, No I, p. 22-24.
6. Calogero F., Degasperis A. Lett. Nuovo Cimento, I976, v. I6, No I4, p. 425-433.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 сентября I987 года.

Мельников В.К.

Р2-87-673

О динамике двумерных солитонов

Рассмотрены три системы нелинейных эволюционных уравнений, описывающие взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн на плоскости x, y. Проанализирована динамика двусолитонных решений этих систем. И хотя каждые две из этих систем могут быть преобразованы друг в друга с помощью простой замены координат, динамика двусолитонных решений этих систем имеет существенные качественные различия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K.

P2-87-673

On Dynamics of Two-Dimensional Solitons

Three systems of nonlinear evolution equations are considered, that describe the interaction of a long wave with a short wave packet on the x,y plane. The dynamics of two-soliton solutions of these systems is analysed. It is shown that the dynamics of two-soliton solutions of these systems has essential qualitative differences although any two of these systems can be transformed into each other by a simple change of coordinates.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987