ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-87-587

А.П.Исаев

ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С ДУХОВЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Направлено на Международную школу ЦЕРН-ОИЯИ
по физике, Варна, сентябрь 1987 г.

1987

I. Введение

В последнее время в связи с построением калибровочно-инвариантных теорий поля взаимодействующих струн /1/ было предложено /2/ использовать БРСТ формализм /3/. Основным достижением в этом направлении является построение БРСТ инвариантной вершины взаимодействия релятивистских струн /4,5/, с помощью которой определяется некоммутативное умножение в пространстве струнных полей, и введение на основе этого умножения фундаментального понятия В-алгебры /5,6/. Важную роль в процитированных работах играли духовые переменные, которые рассматривались как чисто вспомогательные переменные в полном соответствии с классической идеологией /7/.

В настоящей работе духовые поля, возникающие при квантовании теории релятивистской струны (РС), рассматриваются как динамические переменные, что приводит к формулировке расширенной модели РС, в которой духовые степени свободы могут проявляться в асимптотических состояниях. Такая модель носит вспомогательный характер, так как ее динамика является обобщением динамики обычной РС. Вычисления в расширенной модели облегчают получение некоторых результатов для обычной теории РС. В статье не вводится понятие струнного поля, хотя это легко сделать. Все рассмотрение проводится в произвольной калибровке, когда множители Лагранжа $f(\sigma,\tau)$ и $\bar{f}(\sigma,\tau)$, возникающие в гамильтоновом подходе, явно не фиксируются, а считаются на всех этапах исследования (за исключением 4 пункта работы) произвольными функциями. Такое рассмотрение восходит к опубликованным ранее работам /8/. Часть результатов из этих публикаций были недавно переоткрыты в работе /10/.

Настоящая статья организована следующим образом. Во втором пункте обсуждается гамильтонов подход к теории РС Намбу-Гото как к обобщенной гамильтоновой системе /11/. В третьем пункте представлено решение задачи Коши, которое определяет состояния РС с духовыми степенями свободы в любой момент времени по состоянию в начальный момент времени, и найден полный набор тензорных локальных законов сохранения, образующих конечную супералгебру Ли. В четвертом разделе работы на основе решения (квантово-механических) уравнений в вариационных производных построены ядро оператора эволюции и интегральное представление для пропагатора свободной замкнутой РС с духовыми степенями свободы. Построенный пропагатор можно интерпретировать как результат вычисления с помощью БРСТ формализма однопетлевой диаграммы в теории открытой взаимодействующей струны /I2/. В пятом пункте работы намечен путь построения вершины взаимодействия замкнутых РС, причем существенно используются результаты четвертого раздела.

2. Гамильтонова формулировка теории

В гамильтоновом подходе состояние замкнутой релятивистской струны описывается точкой в фазовом пространстве с координатами $x_\mu(\sigma,\tau)=x_\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ и $p_\mu(\sigma,\tau)=p_\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ (σ - параметр на струне, τ - параметр эволюции), где $x_\mu(\sigma,\tau)$-вектор-функция, задающая мировую поверхность струны в D -мерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой $\eta^{\mu\nu}$ $(-,+,+,\dots,+)$, а $p_\mu(\sigma,\tau)$ — плотность импульса струны в точке σ, в момент τ.

Динамика струны в гамильтоновых переменных описывается действием

$$A=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{2\pi}d\sigma\left(\dot x_\mu p^\mu-\frac{f(\sigma,\tau)}{4}a_\mu(\sigma,\tau)a^\mu(\sigma,\tau)+\frac{\bar f(\sigma,\tau)}{4}b_\mu(\sigma,\tau)b^\mu(\sigma,\tau)\right), \qquad (I)$$

где введены обозначения: $a^\mu=\frac{1}{M}p^\mu+Mx'^\mu$, $b^\mu=\frac{1}{M}p^\mu-Mx'^\mu$, $\dot x_\mu=\frac{\partial}{\partial\tau}x_\mu$, $x'_\mu=\frac{\partial}{\partial\sigma}x_\mu$; функции $f(\sigma,\tau)=f(\sigma+2\pi,\tau)$ и $\bar f(\sigma,\tau)=\bar f(\sigma+2\pi,\tau)$ являются множителями Лагранжа; $a^2(\sigma,\tau)$ и $b^2(\sigma,\tau)$ - функции связей, а M -параметр размерности массы, который в дальнейшем для простоты будет полагаться равным единице. Действие (I) можно получить, исходя из действия Намбу-Гото или пользуясь методом локализации канонических преобразований /9/.

Действие (I) инвариантно относительно локальных преобразований, которые генерируются функциями связей a_μ^2 и b_μ^2. Для компактной записи этих преобразований введем в рассмотрение новую (нелокальную) переменную $X_\mu(\sigma_1,\sigma_2,\tau)$, которая содержит всю информацию о струне:

$$X_\mu(\sigma_1,\sigma_2,\tau)=\frac{1}{2}(x_\mu(\sigma_1,\tau)+x_\mu(\sigma_2,\tau))+\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}d\sigma\, p_\mu(\sigma,\tau)). \qquad (2)$$

Теперь непосредственно можно убедиться в том, что действие (I) инвариантно относительно преобразований

$$X_\mu(\sigma_1,\sigma_2,\tau)\longmapsto U_1U_2X_\mu(\sigma_1,\sigma_2,\tau), \qquad (3а)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}-\begin{pmatrix} f(\sigma_1\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_1} & 0\\ 0 & \bar f(\sigma_2\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\end{pmatrix}\right\}\longmapsto\begin{pmatrix}U_1&0\\0&U_2\end{pmatrix}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}-\begin{pmatrix} f(\sigma_1\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_1}&0\\0&\bar f(\sigma_2\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}U_1^{-1}&0\\0&U_2^{-1}\end{pmatrix}. \qquad (3б)$$

Здесь $U_1=\exp\left(\varphi(\sigma_1,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)$, $U_2=\exp\left(\bar\varphi(\sigma_2,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)$ — линейные дифференциальные операторы, реализующие представление группы $diff(S^1)\otimes diff(S^1)$. На параметры φ и $\bar\varphi$ преобразований (3) необходимо наложить граничные условия

$$\varphi(\sigma,\tau_i)=\bar\varphi(\sigma,\tau_i),\qquad \varphi(\sigma,\tau_f)=\bar\varphi(\sigma,\tau_f),\qquad \forall\sigma, \qquad (4)$$

при этом преобразования (3а) в точках $\tau=\tau_i$ и $\tau=\tau_f$ сведутся просто к перепараметризации граничных контуров.

Гамильтоновы уравнения движения, которые вытекают из действия (I), имеют вид

$$\dot x_\mu=\frac{f}{2}(p_\mu+x'_\mu)-\frac{\bar f}{2}(p_\mu-x'_\mu),\quad \dot p_\mu=\left(\frac{f}{2}(p_\mu+x'_\mu)+\frac{\bar f}{2}(p_\mu-x'_\mu)\right)', \qquad (5а)$$

$$(p_\mu+x'_\mu)(p^\mu+x'^\mu)=(p_\mu-x'_\mu)(p^\mu-x'^\mu)=0. \qquad (5б)$$

Перейдем теперь к обсуждению квантовой динамики РС. Согласно правилам квантования обобщенных гамильтоновых систем /II/ квантовая динамика замкнутой РС описывается континуальным интегралом

$$G(C_1,C_2,\dots,C_\ell)=\int\mathcal{D}\{\mu\}\exp\{iA\},$$

$$\mathcal{D}\{\mu\}=\prod_{\sigma,\tau}\{\mathcal{D}[p_\nu]\mathcal{D}[x_\nu]\mathcal{D}[f]\mathcal{D}[\bar f]\}\Delta\Pi, \qquad (6)$$

где интегрирование ведется по всем плотностям импульса $p^\mu(\sigma,\tau)$, по всем поверхностям $x^\mu(\sigma,\tau)$, ограниченным контурами C_i, и по всем множителям Лагранжа $f(\sigma,\tau)$ и $\bar f(\sigma,\tau)$ (отметим, что множества этих функций ограничены соображениями причинности); Δ -детерминант Фаддеева-Попова, а П-множитель, фиксирующий калибровочный произвол (3). Будем работать в классе калибровочных условий, налагаемых только на множители Лагранжа $f,\bar f$:

$$f(\sigma,\tau)=f_0(\sigma,\tau;\theta_{\alpha\beta}),\qquad \bar f(\sigma,\tau)=\bar f_0(\sigma,\tau;\bar\theta_{\alpha\beta}), \qquad (7)$$

где f_0 и $\bar f_0$ – некоторые заданные функции (их явный вид зависит от топологии мировой поверхности $x_\mu(\sigma,\tau)$ и для дальнейшего нам не понадобится), зависящие от действительных параметров $\theta_{\alpha\beta}$ и $\bar\theta_{\alpha\beta}$. Эти параметры в общем случае зависимы и образуют нетривиальное многомерное фактор-пространство {пространство функций $(f,\bar f)$} / {пространство преобразований (3б)}, называемое пространством модулей M_g^ℓ, размерность которого определяется топологией мировой поверхности струны и равна /I3/ (при $g>1$) $3(\ell+2(g-1))$, где b – число граничных контуров $\mathcal{C}_i$, а g – род поверхности $x_\mu(\sigma,\tau)$. Выбор класса (7) калибровочных условий достаточно общий и возможность такого выбора следует из явного вида преобразований (3б). В этом случае множитель П равен

$$\Pi=\int\limits_{M_g^b}(d\theta_{\alpha\beta}\,d\bar\theta_{\alpha\beta})W(\theta_{\alpha\beta},\bar\theta_{\alpha\beta})\prod_{\sigma,\tau}\left\{\delta\left(f(\sigma,\tau)-f_0(\sigma,\tau;\theta_{\alpha\beta})\right)\delta\left(\bar f(\sigma,\tau)-\bar f_0(\sigma,\tau;\bar\theta_{\alpha\beta})\right)\right\} \qquad (8)$$

и не зависит от координат фазового пространства $x_\mu(\sigma,\tau)$ и $p_\mu(\sigma,\tau)$. Для общности в интеграле (8) введена весовая функция $W(\theta_{\alpha\beta},\bar\theta_{\alpha\beta})$.

В случае, когда поверхность $x_\mu(\sigma,\tau)$ имеет топологию цилиндра, что соответствует динамике свободной замкнутой РС, возможен выбор калибровочного условия (8) в виде (пространство M_0^2 – одномерно)

$$\Pi=\int\limits_0^\infty d\theta\prod_{\sigma,\tau}\left\{\delta\left(f(\sigma,\tau)-\frac{\theta\pi}{\tau_f-\tau_i}\right)\delta\left(\bar f(\sigma,\tau)+\frac{\theta\pi}{\tau_f-\tau_i}\right)\right\}. \qquad (9)$$

Калибровочное условие (9) соответствует ортонормированному выбору системы координат $\left(\xi^0=\frac{\pi\theta}{\tau_f-\tau_i},\ \xi^1=\sigma\right.$ на мировой поверхности $\left.x_\mu(\sigma,\tau):(\partial_0x_\mu\pm\partial_1x_\mu)^2=0\right)$. Как правило, в теории струны работают именно с таким калибровочным условием, что, как мы указывали выше, несовместимо с более сложными топологиями мировой поверхности $x_\mu(\sigma,\tau)$.

Определим теперь детерминант Фаддеева-Попова Δ, который соответствует выбору функционала П в виде (8). Стандартная техника /7/ приводит к следующему результату (так как мы игнорируем конформные аномалии /I4/, то наше рассмотрение является строгим, вообще говоря, только при $D=26$):

$$\Delta(f_0,\bar f_0)=\det\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+f_0'-f_0\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\det\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar f_0'-\bar f_0\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)= \qquad (10)$$

$$=\int\mathcal{D}\{\mu_g\}\exp\left[i\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\left\{i\eta\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+f_0'-f_0\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\zeta-i\bar\eta\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\bar f_0'-\bar f_0\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\bar\zeta\right\}\right], \qquad (11)$$

где $\mathcal{D}\{\mu_g\}=\prod\limits_{\sigma,\tau}\left\{\mathcal{D}[\eta(\sigma,\tau)]\mathcal{D}[\zeta(\sigma,\tau)]\mathcal{D}[\bar\eta(\sigma,\tau)]\mathcal{D}[\bar\zeta(\sigma,\tau)]\right\}$. Интегрирование ведется по периодическим антикоммутирующим полям (духам Фаддеева-Попова). Подставляя равенства (8) и (II) в интеграл (6), получаем следующее интегральное представление для функционала $G(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\ldots\mathcal{C}_b)$:

$$G(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_b)=\int\limits_{M_g^b}(d\theta_{\alpha\beta}\,d\bar\theta_{\alpha\beta})W(\theta_{\alpha\beta},\bar\theta_{\alpha\beta})\int\mathcal{D}\{\varphi(\sigma,\tau_i)\}\mathcal{D}\{\varphi(\sigma,\tau_f)\}\cdot \qquad (12)$$

$$\cdot\int\prod_{\sigma,\tau}\{\mathcal{D}[f]\mathcal{D}[\bar f]\delta(f-f_0)\delta(\bar f-\bar f_0)\}\int\prod_{\sigma,\tau}\{\mathcal{D}[p_\nu]\mathcal{D}[x_\nu]\}\mathcal{D}\{\mu_g\}\exp\{iA_g\}$$

где

$$A_g=\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\Big[\dot x_\mu p^\mu-\frac{f}{4}a^2+\frac{\bar f}{4}b^2+i\eta\dot\zeta-i\bar\eta\dot{\bar\zeta}-$$
$$-if(2\eta\zeta'+\eta'\zeta)+i\bar f(2\bar\eta\bar\zeta'+\bar\eta'\bar\zeta)\Big]. \qquad (13)$$

Суммирование по коллективным переменным $\varphi(\sigma,\tau_i)$ и $\varphi(\sigma,\tau_f)$, задающим все перепараметризации граничных контуров, остается в функциональном интеграле (I2), так как в нем интегрирование ведется по поверхностям $x_\mu(\sigma,\tau)$, ограниченным контурами

$$\exp\left(\varphi(\sigma,\tau_i)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)x_\mu(\sigma,\tau_i)=x_\mu(\Phi(\sigma,\tau_i),\tau_i),$$
$$\exp\left(\varphi(\sigma,\tau_f)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)x_\mu(\sigma,\tau_f)=x_\mu(\Phi(\sigma,\tau_f),\tau_f). \qquad (14)$$

Продемонстрируем теперь геометрический смысл множителей Лагранжа. Для этого выполним в интеграле (6) замену импульсной переменной

$$p_\mu(\sigma,\tau)=p_\mu^{cl}(\sigma,\tau)+\tilde p_\mu(\sigma,\tau)=\frac{2}{f-\bar f}\left(\dot x_\mu-\frac{f+\bar f}{2}x_\mu'\right)+\tilde p_\mu(\sigma,\tau),$$

то есть выделим из импульсной переменной $p_\mu(\sigma,\tau)$ классическую составляющую $p_\mu^{cl}(\sigma,\tau)$, которая определяется уравнением (5а). При этом интеграл (6) переписывается в виде

$$G(\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_b)=\int\mathcal{D}\{\tilde\mu\}\exp\{i\tilde A\}, \qquad (15)$$

где $\mathcal{D}\{\tilde\mu\}=\prod\limits_{\sigma,\tau}\{\mathcal{D}[\tilde p_\mu]\mathcal{D}[x_\mu]\mathcal{D}[f]\mathcal{D}[\bar f]\}\Delta\,\Pi$, а $\tilde A$ – известное действие:

$$\tilde A=\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\int\limits_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\left[-\frac{1}{4}(f-\bar f)\tilde p^2-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ac}\partial_a x_\mu\partial_c x^\mu\right]. \qquad (16)$$

Интеграл (I5) в последнее время весьма активно исследуется /I5/, при этом используется определение меры $\mathcal{D}\{\tilde\mu\}$ из работы /I4/. В формуле (I6) использованы обозначения: $\{a,c\}=\{0,1\}$; $\partial_0x_\mu=\dot x_\mu$; $\partial_1x_\mu=x_\mu'$, $g=\det\|g_{ab}\|$, $m\neq0$ – произвольная константа, а метрика g_{ac} с точностью до вейлевских преобразований определяется равенством

$$\sqrt{-g}\,g^{ac}=\frac{1}{(f-\bar f)}\begin{pmatrix}-2 & f+\bar f\\ f+\bar f & -2f\bar f\end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Эта формула указывает геометрический смысл множителей Лагранжа.

3. Динамика замкнутой релятивистской струны с духовыми степенями свободы

В этом разделе работы будет изучена динамика системы, которая описывается действием (I3), будет решена задача Коши и представлен полный набор полиномиальных локальных интегралов движения.

Действие (I3) приводит к динамическим уравнениям (5а), для координат фазового пространства (x_μ и p_μ) и к уравнениям динамики духов

$$\dot{\zeta} = f\zeta' - f'\zeta \quad , \quad \dot{\bar{\zeta}} = \bar{f}\bar{\zeta}' - \bar{f}'\bar{\zeta} \;, \tag{I8}$$

$$\dot{\eta} = 2f'\eta + f\eta' \quad , \quad \dot{\bar{\eta}} = 2\bar{f}'\bar{\eta} + \bar{f}\bar{\eta}' .$$

Аналога уравнения (5б) в рассматриваемом случае нет (так как функции f и $\bar{f}$ неявно зафиксированы), хотя можно написать аналоги функций связей $\frac{1}{4}a^2$ и $\frac{1}{4}b^2$. Они имеют вид

$$T = \frac{a^2}{4} + i(2\eta\zeta' + \eta'\zeta) \;, \quad \bar{T} = \frac{b^2}{4} + i(2\bar{\eta}\bar{\zeta}' + \bar{\eta}'\bar{\zeta}). \tag{I9}$$

Для системы уравнений (5а) и (I8) можно построить общее решение задачи Коши, которое определяет состояние системы в любой точке τ $(\tau_i < \tau \le \tau_f)$ по начальному состоянию в точке $\tau = \tau_i$. Для уравнений (5а) это решение найдено в работах /8/ и может быть представлено в компактной форме (см. формулу (2)):

$$X_\mu(\sigma_1, \sigma_2, \tau) = X_\mu(F(\sigma_1,\tau), \bar{F}(\sigma_2,\tau), \tau_i) \;, \tag{20}$$

где

$$F(\sigma,\tau) = T\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' f(\sigma,\tau')\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\}\sigma \;, \quad \bar{F}(\sigma,\tau) = T\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \bar{f}(\sigma,\tau')\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\}\sigma . \tag{2I}$$

Для уравнений (I8) решение задачи Коши записывается в виде

$$\zeta(\sigma,\tau) = \frac{1}{F'(\sigma,\tau)}\zeta(F(\sigma,\tau),\tau_i) \;, \quad \eta(\sigma,\tau) = (F'(\sigma,\tau))^2\eta(F(\sigma,\tau),\tau_i) \;,$$

$$\bar{\zeta}(\sigma,\tau) = \frac{1}{\bar{F}'(\sigma,\tau)}\bar{\zeta}(\bar{F}(\sigma,\tau),\tau_i) \;, \quad \bar{\eta}(\sigma,\tau) = (\bar{F}'(\sigma,\tau))^2\bar{\eta}(\bar{F}(\sigma,\tau),\tau_i). \tag{22}$$

В том, что функции (20) и (22) действительно определяют решение задачи Коши уравнений (5а) и (I8), легко убедиться непосредственно, если воспользоваться равенствами $\dot{F} = fF'$, $\dot{\bar{F}} = \bar{f}\bar{F}'$, $F(\sigma,\tau_i) = \bar{F}(\sigma,\tau_i) = \sigma$.

Из решения (20), продифференцировав по σ_1 и σ_2, легко получить выражения

$$a_\mu(\sigma,\tau) = F'(\sigma,\tau)a_\mu(F(\sigma,\tau),\tau_i) \;, \quad b_\mu(\sigma,\tau) = \bar{F}'(\sigma,\tau)\, b_\mu(\bar{F}(\sigma,\tau),\tau_i) \;, \tag{23}$$

которые представляют собой решения задачи Коши для уравнений

$$\dot{a}_\mu = (fa_\mu)' \quad , \quad \dot{b}_\mu = (\bar{f}b_\mu)'. \tag{24}$$

Знание эволюции струнных переменных $x_\mu, p_\mu, \zeta, \eta, \bar{\zeta}, \bar{\eta}$ (соотношения (20,22,23)) позволяет построить все локальные полиномиальные законы сохранения в теории замкнутой струны с духовыми степенями свободы. Перечислим здесь эти законы:

I) Закон сохранения полного импульса

$$P_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma\, a_\mu(\sigma,\tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma\, b_\mu(\sigma,\tau). \tag{25а}$$

2) Закон сохранения момента количества движения

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(x_\mu(\sigma,\tau)p_\nu(\sigma,\tau) - x_\nu(\sigma,\tau)p_\mu(\sigma,\tau)\right). \tag{25б}$$

3) Сохранение духовых чисел

$$Q_c = i\int_0^{2\pi} d\sigma\left(\zeta(\sigma,\tau)\eta(\sigma,\tau)\right) \;, \quad \bar{Q}_c = i\int_0^{2\pi} d\sigma\left(\bar{\zeta}(\sigma,\tau)\bar{\eta}(\sigma,\tau)\right), \tag{25в}$$

4)
$$Q_{\mu\nu} = \int d\sigma\left(\zeta(\sigma,\tau)a_\mu(\sigma,\tau)a_\nu(\sigma,\tau)\right) \;, \quad \bar{Q}_{\mu\nu} = \int d\sigma\left(\bar{\zeta}(\sigma,\tau)b_\mu(\sigma,\tau)b_\nu(\sigma,\tau)\right), \tag{25г}$$

5)
$$K_{\mu\nu} = i\int d\sigma(\zeta\zeta' a_\mu a_\nu) \;, \quad \bar{K}_{\mu\nu} = i\int d\sigma(\bar{\zeta}\bar{\zeta}' b_\mu b_\nu) \;, \tag{25д}$$

6)
$$Q = i\int d\sigma(\eta\zeta\zeta') \;, \quad \bar{Q} = i\int d\sigma(\bar{\eta}\bar{\zeta}\bar{\zeta}') \;, \tag{25е}$$

7)
$$I_\mu = i\int d\sigma(\zeta\zeta'\zeta'' a_\mu) \;, \quad \bar{I}_\mu = i\int d\sigma(\bar{\zeta}\bar{\zeta}'\bar{\zeta}'' b_\mu). \tag{25ж}$$

Отметим, что комбинации законов сохранения (25г) и (25е) дает БРСТ-заряды Q_B и $\bar{Q}_B$ /3/:

$$Q_B = \frac{1}{4}Q_\mu{}^\mu - Q \quad , \quad \bar{Q}_B = \frac{1}{4}\bar{Q}_\mu{}^\mu - \bar{Q} . \tag{26}$$

Интегралы движения (25) относительно скобок Пуассона, которые задаются каноническими суперскобками

$$\{x_\mu(\sigma,\tau),\ p_\nu(\sigma',\tau)\} = g_{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma'), \tag{27}$$

$$\{\xi(\sigma,\tau),\eta(\sigma',\tau)\} = -i\,\delta(\sigma-\sigma'),\quad \{\bar\xi(\sigma,\tau),\bar\eta(\sigma',\tau)\} = i\,\delta(\sigma-\sigma'),$$

образуют конечную замкнутую супералгебру Ли. Действительно, используя соотношения (27), получаем для переменных (25г) - (25ж)

$$\{Q_{\mu\nu},Q_{\lambda\rho}\} = -2i\left(g_{\lambda\nu}K_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}K_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda}K_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}K_{\nu\lambda}\right),$$

$$\{\bar Q_{\mu\nu},\bar Q_{\lambda\rho}\} = 2i\left(g_{\lambda\nu}\bar K_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\bar K_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda}\bar K_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}\bar K_{\nu\lambda}\right), \tag{28}$$

$$\{Q_{\mu\nu},Q\} = -iK_{\mu\nu},\quad \{\bar Q_{\mu\nu},\bar Q\} = +i\bar K_{\mu\nu},\quad \{Q_B,Q_B\} = \{\bar Q_B,\bar Q_B\} = 0$$

(остальные скобки Пуассона переменных (25г) - (25ж) равны нулю). К выражениям (28) необходимо добавить очевидные скобки Пуассона с участием переменных (25а)-(25в).

Отметим, что при рассмотрении квантовой версии теории с действием (13), за счет нормального упорядочения полей в выражениях для переменных (25), коммутационные соотношения (28) могут видоизменяться, а часть из переменных (25) перестанет сохраняться во времени (см.работу /16/). Отметим, что важность квантовых величин (25) заключается в том, что они определяют дополнительные симметрии полевого действия релятивистской струны и накладывают определенные ограничения на способы построения таких действий. В частности, сохранение БРСТ-заряда Q_B уже использовалось для построения калибровочно-инвариантного взаимодействия открытых струн /4,5/.

4. Пропагатор замкнутой релятивистской струны с духовыми степенями свободы

Введем вместо переменных ξ, $\bar\xi$, η и $\bar\eta$ новые духовые переменные c, π_c, $\bar c$, $\pi_{\bar c}$, которые определяются равенствами

$$\eta = \bar c + i\pi_c,\quad \xi = c + i\pi_{\bar c},\quad \bar\eta = \bar c - i\pi_c,\quad \bar\xi = c - i\pi_{\bar c}. \tag{29}$$

Для новых переменных из соотношений (27) получаем следующие скобки Пуассона:

$$\{\pi_c(\sigma,\tau), c(\sigma',\tau)\} = \{\pi_{\bar c}(\sigma,\tau), \bar c(\sigma',\tau)\} = -\frac{1}{2}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{30}$$

(Остальные скобки Пуассона равны нулю). Решение задачи Коши (22) в новых переменных переписывается в виде

$$c(\sigma,\tau) = \hat S_1^+ c(\sigma,\tau_i) + i\hat S_1^- \pi_{\bar c}(\sigma,\tau_i),\quad i\pi_{\bar c}(\sigma,\tau) = \hat S_1^- c(\sigma,\tau_i) + i\hat S_1^+ \pi_{\bar c}(\sigma,\tau_i), \tag{31}$$

$$\bar c(\sigma,\tau) = \hat S_2^+ \bar c(\sigma,\tau_i) + i\hat S_2^- \pi_c(\sigma,\tau_i),\quad i\pi_c(\sigma,\tau) = \hat S_2^- \bar c(\sigma,\tau_i) + i\hat S_2^+ \pi_c(\sigma,\tau_i),$$

где $\hat S_1^\pm = \frac{1}{2}\left(\mathcal F e^{\mathcal F\partial}\frac{1}{\mathcal F} \pm \bar{\mathcal F} e^{\bar{\mathcal F}\partial}\frac{1}{\bar{\mathcal F}}\right)$ и $\hat S_2^\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathcal F} e^{\partial\mathcal F}\mathcal F \pm \frac{1}{\bar{\mathcal F}} e^{\partial\bar{\mathcal F}}\bar{\mathcal F}\right)$, а

функции $\mathcal F(\sigma,\tau)$ и $\bar{\mathcal F}(\sigma,\tau)$ определяются из неявных операторных соотношений

$$T\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' f(\sigma,\tau')\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\} = \exp\left\{\mathcal F(\sigma,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\},\quad T\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \bar f(\sigma,\tau')\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\} = \exp\left\{\bar{\mathcal F}(\sigma,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right\}. \tag{32}$$

Используя обозначения (32), решение (20) можно переписать в виде

$$x_\mu(\sigma,\tau) = \hat S^+ x_\mu(\sigma,\tau_i) + \hat S^- \frac{1}{\partial} p_\mu(\sigma,\tau_i),\quad p_\mu(\sigma,\tau) = \partial \hat S^+ \frac{1}{\partial} p_\mu(\sigma,\tau_i) + \partial \hat S^- x_\mu(\sigma,\tau_i), \tag{33}$$

где $S^\pm = \frac{1}{2}\left(\exp\left(\mathcal F(\sigma,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) \pm \exp\left(\bar{\mathcal F}(\sigma,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right)$.

Вполне естественно считать, что соотношения (31) и (33) сохраняют свою форму и в квантовом случае, когда все динамические переменные становятся операторами (см.предыдущий пункт работы). При этом мы полагаем

$$\pi_c(\sigma,\tau) = -\frac{i}{2}\frac{\vec\delta}{\delta c(\sigma,\tau)},\quad \pi_{\bar c}(\sigma,\tau) = -\frac{i}{2}\frac{\vec\delta}{\delta\bar c(\sigma,\tau)},\quad p_\mu(\sigma,\tau) = -i\frac{\delta}{\delta x^\mu(\sigma,\tau)}. \tag{34}$$

Операторные соотношения (31) и (33) в квантовом случае диктуют уравнения на ядро $\mathcal K$ оператора эволюции РС :

$$\mathcal K(x^{(1)}_\mu, c^{(1)}, \bar c^{(1)}, x^{(2)}_\mu, c^{(2)}, \bar c^{(2)}) = \int\prod_{\sigma,\tau}\{\mathcal D[x_\nu]\mathcal D[p_\nu]\mathcal D[\eta]\mathcal D[\bar\eta]\mathcal D[\xi]\mathcal D[\bar\xi]\}\exp\{iA_g\} =$$

$$= \langle\!\langle x^{(2)}_\mu, c^{(2)}, \bar c^{(2)} | T\exp\left\{-i\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau\int d\sigma\left(fT - \bar f\bar T\right)\right\} | x^{(1)}_\mu, c^{(1)}, \bar c^{(1)}\rangle\!\rangle. \tag{35}$$

Здесь $|x^{(i)}_\mu, c^{(i)}, \bar{c}^{(i)}\rangle\rangle$ собственные векторы операторов $\hat{x}^{(i)}_\mu$, $\hat{c}^{(i)}$ и $\hat{\bar{c}}^{(i)}$; наборы полей $\{x^{(2)}_\mu, c^{(2)}, \bar{c}^{(2)}\}$ и $\{x^{(1)}_\mu, c^{(1)}, \bar{c}^{(1)}\}$ определяют соответственно конечное и начальное состояние струны. Отметим, что цепочку равенств(35) можно рассматривать как определение меры интегрирования $\prod\limits_{\sigma,\tau}\{\mathcal{D}[x_\mu]\mathcal{D}[P_\mu]\mathcal{D}[\eta]\mathcal{D}[\xi]\mathcal{D}[\bar{\eta}]\mathcal{D}[\bar{\xi}]\}$ в интеграле (I2).

Уравнения на функционал $\mathcal{K}$ (35), которые диктуются равенствами (3I) и (33), имеют вид

$$c^{(2)}\mathcal{K} = \left(\hat{S}^+_1 c^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{S}^-_1 \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}^{(1)}}\right)\mathcal{K}, \quad \frac{1}{2}\frac{\vec{\delta}\mathcal{K}}{\delta c^{(2)}} = \left(\hat{S}^-_2 c^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{S}^+_2 \frac{\vec{\delta}}{\delta c^{(1)}}\right)\mathcal{K}, \tag{36a}$$

$$\bar{c}^{(2)}\mathcal{K} = \left(\hat{S}^+_2 \bar{c}^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{S}^-_2 \frac{\delta}{\delta c^{(1)}}\right)\mathcal{K}, \quad \frac{1}{2}\frac{\vec{\delta}\mathcal{K}}{\delta \bar{c}^{(2)}} = \left(\hat{S}^-_1 c^{(1)} - \frac{1}{2}\hat{S}^+_1 \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}^{(1)}}\right)\mathcal{K}, \tag{36б}$$

$$x^{(2)}_\mu \mathcal{K} = \left(i\hat{S}^- \frac{1}{\partial}\frac{\delta}{\delta x^{(1)\mu}} + \hat{S}^+ x^{(1)}_\mu\right)\mathcal{K}, \quad -i\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta x^{(2)\mu}} = \left(i\partial\hat{S}^+ \frac{1}{\partial}\frac{\delta}{\delta x^{(1)\mu}} + \partial\hat{S}^- x^{(1)}_\mu\right)\mathcal{K}. \tag{37}$$

Легко проверить, что решением этих уравнений является следующий функционал:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = {} & Z(f,\bar{f})\exp\Big\{\frac{i}{2}\int d\sigma\Big(x^{(2)}_\mu(\sigma)\partial\hat{S}^+\frac{1}{\hat{S}^-}x^{(2)\mu}(\sigma) - 2x^{(1)}_\mu(\sigma)\partial\frac{1}{\hat{S}^-}x^{(2)\mu}(\sigma) + \\ & + x^{(1)}_\mu(\sigma)\partial\frac{1}{\hat{S}^-}\hat{S}^+ x^{(1)\mu}(\sigma)\Big\}\cdot\exp\Big\{2\int d\sigma\Big(\bar{c}^{(1)}(\sigma)\frac{1}{\hat{S}^-_1}\hat{S}^+_1 c^{(1)}(\sigma) - \bar{c}^{(1)}(\sigma)\frac{1}{\hat{S}^-_1}c^{(2)}(\sigma) - \\ & - \bar{c}^{(2)}(\sigma)\frac{1}{\hat{S}^-_1}c^{(1)}(\sigma) + \bar{c}^{(2)}(\sigma)\hat{S}^+_1\frac{1}{\hat{S}^-_1}c^{(2)}(\sigma)\Big)\Big\}\left(\bar{c}^{(1)}_0 - \bar{c}^{(2)}_0\right)\left(c^{(1)}_0 - c^{(2)}_0\right),\end{aligned} \tag{38}$$

где нулевые моды $c^{(i)}_0$, $\bar{c}^{(i)}_0$ определяются из соотношений

$$c^{(i)}_0 = \int d\sigma\left[\frac{1}{(\Phi^{(i)}(\sigma))'}c^{(i)}(\Phi^{(i)}(\sigma))\right], \quad \bar{c}^{(i)}_0 = \int d\sigma\left[\left((\Phi^{(i)}(\sigma))'\right)^2\bar{c}^{(i)}(\Phi^{(i)}(\sigma))\right],$$

$(\Phi^{(1)}(\sigma) = \Phi(\sigma,\tau_i), \Phi^{(2)}(\sigma) = \Phi(\sigma,\tau_f)$ – смотри формулы (I4)).

Функционал $Z(f,\bar{f})$ из уравнений (3I) и (33) не определяется. Для определения функционала $Z(f,\bar{f})$ необходимо найти дополнительное уравнение. Для этого вспомним, что ядро оператора эволюции струны (35) реализует представление (проективное) группы G диффеоморфизмов мировой поверхности струны с духовыми степенями свободы. Генераторы $\mathcal{T}$ и $\bar{\mathcal{T}}$ этой группы в случае, когда мировая поверхность имеет топологию цилиндра (при этом $G = diff_{\mathcal{T}}(S^1)\otimes diff_{\bar{\mathcal{T}}}(S^1)$),

определяются формулами /I6,3/

$$\mathcal{T}(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{T}^n e^{-in\sigma} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{T}^n_x + \mathcal{T}^n_g\right)e^{-in\sigma} = \mathcal{T}_x(\sigma) + \mathcal{T}_g(\sigma)$$

$$\mathcal{T}^n_x = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :a^{n-m}_\mu a^{m\mu}: - \beta\delta_{n,0}, \quad \mathcal{T}^n_g = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n):\eta_{n-m}\xi_m:,$$
$$(\beta = 1, \qquad \xi_n|0\rangle = \eta_n|0\rangle = a^n_\mu|0\rangle = 0 \quad (n>0))$$

(для оператора $\bar{\mathcal{T}}$ формулы аналогичны). Интерпретация ядра оператора эволюции $\mathcal{K}$ (35) как элемента группы диффеоморфизмов позволяет написать следующие уравнения, определяющие $\mathcal{K}$ /I7,I8/:

$$F'(\sigma,\tau_f)\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta F(\sigma,\tau_f)} = (-i)N_{\Phi^{(2)}}\left\{\frac{a^2}{4} + i(2\eta\xi' + \eta'\xi)\right\}\mathcal{K} =$$
$$= \left\{-i\mathcal{T}(\sigma) + \frac{i(D-26)}{24\pi}\hat{D}(\Phi^{(2)})\right\}\mathcal{K}, \tag{39a}$$

$$\bar{F}'(\sigma,\tau_f)\frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \bar{F}(\sigma,\tau_f)} = iN_{\Phi^{(2)}}\left\{\frac{b^2}{4} + i(2\bar{\eta}\bar{\xi}' + \bar{\eta}'\bar{\xi})\right\}\mathcal{K} =$$
$$= \left\{i\bar{\mathcal{T}}(\sigma) - \frac{i(D-26)}{24\pi}\hat{D}(\Phi^{(2)})\right\}\mathcal{K}, \tag{39б}$$

где символ $N_{\Phi^{-1}}$ обозначает нормальное упорядочение, связанное со следующим разложением полей по модам $(\Phi^{-1}(\Phi(\sigma)) = \Phi(\Phi^{-1}(\sigma)) = \sigma)$:

$$a_\mu(\sigma) = \Phi'\left[\frac{P_\mu}{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}a^{+n}_\mu + e^{-in\Phi}a^n_\mu\right)\right], \quad b_\mu(\sigma) = \Phi'\left[\frac{P_\mu}{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}b^n_\mu + e^{-in\Phi}b^{+n}_\mu\right)\right],$$

$$\eta(\sigma) = [\Phi']^2\left[\frac{\eta_0}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}\eta^+_n + e^{-in\Phi}\eta_n\right)\right], \quad \xi(\sigma) = \frac{1}{\Phi'}\left[\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}\xi^+_n + e^{-in\Phi}\xi_n\right)\right], \tag{40}$$

$$\bar{\eta}(\sigma) = [\Phi']^2\left[\frac{\bar{\eta}_0}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}\bar{\eta}_n + e^{-in\Phi}\bar{\eta}^+_n\right)\right], \quad \bar{\xi}(\sigma) = \frac{1}{\Phi'}\left[\bar{\xi}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in\Phi}\bar{\xi}_n + e^{-in\Phi}\bar{\xi}^+_n\right)\right],$$

$\hat{D}(\Phi^{-1}) = \frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2$ – производная Шварца. Прежде чем мы выпишем уравнение, которое определяет $Z(f,\bar{f})$ и которое следует из уравнений (39), отметим ряд фактов из теории группы диффеоморфизмов окружности $diff(S^1)$. Пусть функция $\mathcal{F}_0$ неявно определяется из равенства $exp(-\bar{\mathcal{F}}\partial)exp(\mathcal{F}\partial) = exp(\mathcal{F}_0\partial)$,
тогда имеют место соотношения

$$\left(\bar{\mathcal{F}}e^{-\bar{\mathcal{F}}\partial}\frac{1}{\bar{\mathcal{F}}}\right)\left(\mathcal{F}e^{\mathcal{F}\partial}\frac{1}{\mathcal{F}}\right) = \mathcal{F}_0 e^{\mathcal{F}_0\partial}\frac{1}{\mathcal{F}_0}, \quad \left(\frac{1}{\bar{\mathcal{F}}}e^{-\partial\bar{\mathcal{F}}}\bar{\mathcal{F}}\right)\left(\frac{1}{\mathcal{F}}e^{\partial\mathcal{F}}\mathcal{F}\right) = \frac{1}{\mathcal{F}_0}e^{\partial\mathcal{F}_0}\mathcal{F}_0. \tag{4I}$$

В случае интегрирования по поверхностям топологии цилиндра (пропагатор струны), когда возможен выбор калибровочного условия $f = -\bar{f} = \theta\pi = const$, существуют преобразования $exp(\varphi(\sigma,\tau_f)\partial) = exp(\tilde{\tilde{\varphi}}(\sigma)\partial)$, $exp(\varphi(\sigma,\tau_i)\partial) = exp(\tilde{\varphi}(\sigma)\partial)$, такие, что

$$exp(\tilde{\tilde{\varphi}}\partial)\,exp(f\partial)\,exp(-\tilde{\varphi}\partial) = exp(\theta\pi\partial),\ exp(\tilde{\tilde{\varphi}}\partial)\,exp(\bar{f}\partial)\,exp(-\tilde{\varphi}\partial) = exp(-\theta\pi\partial). \quad (42)$$

Здесь $\dfrac{1}{\theta} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{f_0(\sigma)}$.

Равенства (4I) и (42), подставленные в формулу (38), приводят к следующему выражению для K:

$$K = Z(f,\bar{f})\,exp\left\{\frac{i}{2}A(\tilde{x}^{(1)}_\mu, \tilde{x}^{(2)}_\mu) + 2A(\tilde{\tilde{c}}^{(i)}, \tilde{c}^{(i)})\right\}(\bar{c}^{(1)}_0 - \bar{c}^{(2)}_0)(c^{(1)}_0 - c^{(2)}_0), \quad (43)$$

где

$$A(\tilde{x}^{(1)}_\mu, \tilde{x}^{(2)}_\mu) = \langle \tilde{x}^{(2)}_\mu | \partial cth(\pi\theta\partial) | \tilde{x}^{(2)\mu}\rangle - 2\langle \tilde{x}^{(1)}_\mu | \partial (sh(\pi\theta\partial))^{-1} | \tilde{x}^{(2)\mu}\rangle + \langle \tilde{x}^{(1)}_\mu | \partial cth(\pi\theta\partial) | \tilde{x}^{(1)\mu}\rangle,$$

$$A(\tilde{\tilde{c}}^{(i)}, \tilde{c}^{(i)}) = \langle \tilde{\tilde{c}}^{(1)} | cth(\pi\theta\partial) | \tilde{c}^{(1)}\rangle - \langle \tilde{\tilde{c}}^{(1)} | (sh(\pi\theta\partial))^{-1} | \tilde{c}^{(2)}\rangle - \langle \tilde{\tilde{c}}^{(2)} | (sh(\pi\theta\partial))^{-1} | \tilde{c}^{(1)}\rangle +$$
$$+ \langle \tilde{\tilde{c}}^{(2)} | cth(\pi\theta\partial) | \tilde{c}^{(2)}\rangle,$$

а переменные с волной определяются из формул

$$\tilde{x}^{(2)}_\mu = exp(\tilde{\tilde{\varphi}}\partial)x^{(2)}_\mu,\ \tilde{x}^{(1)}_\mu = exp(\tilde{\varphi}\partial)x^{(1)}_\mu,\ \tilde{\tilde{c}}^{(1)} = \left(\frac{1}{\tilde{\varphi}}exp(\partial\tilde{\varphi})\tilde{\varphi}\right)\bar{c}^{(1)},$$
$$\tilde{c}^{(1)} = \left(\tilde{\varphi}\,exp(\tilde{\varphi}\partial)\frac{1}{\tilde{\varphi}}\right)c^{(1)},\ \tilde{\tilde{c}}^{(2)} = \left(\frac{1}{\tilde{\tilde{\varphi}}}exp(\partial\tilde{\tilde{\varphi}})\tilde{\tilde{\varphi}}\right)\bar{c}^{(2)}, \quad (44)$$
$$\tilde{c}^{(2)} = \left(\tilde{\tilde{\varphi}}\,exp(\tilde{\tilde{\varphi}}\partial)\frac{1}{\tilde{\tilde{\varphi}}}\right)c^{(2)}.$$

Подставляя теперь формулу (43) в уравнения (39) и учитывая равенства $F'(\sigma,\tau_f)\dfrac{\delta\theta}{\delta F(\sigma,\tau_f)} = -\bar{F}'(\sigma,\tau_f)\dfrac{\delta\theta}{\delta \bar{F}(\sigma,\tau_f)} = \left(\dfrac{\theta}{f_0}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}(\Phi^{(2)}(\sigma))'\right)^2$, вытекающие из формул (42), получаем уравнение, определяющее функционал $Z(f,\bar{f}) = Z(\theta)$ (этот функционал по симметрийным соображениям зависит только от параметра θ):

$$\frac{\partial}{\partial\theta}ln(Z(\theta)) = -\frac{D}{2}\frac{1}{\theta} + (2-D)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in2\pi\,exp(-in2\pi\theta)}{1-exp(-in2\pi\theta)}\right) + \frac{i(D-2)\pi}{12}. \quad (45)$$

Решение уравнения (45) хорошо известно:

$$Z(\theta) = Z_0\theta^{-\frac{D}{2}}e^{\left(i\frac{D-2}{12}\pi\theta\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-exp(-in2\pi\theta)\right)^{2-D} = Z_0\theta^{-\frac{D}{2}}\left[\eta(exp(-i2\pi\theta))\right]^{2-D}, \quad (46)$$

где $\eta(q) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ – функция Дедекинда, Z_0 – произвольная константа. Окончательное выражение для ядра оператора эволюции (43) с учетом формулы (46) имеет вид

$$K = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}}\!\!\ldots\int_{c^{(1)}}^{c^{(2)}}\!\!\ldots\int_{\bar{c}^{(1)}}^{\bar{c}^{(2)}}\left\{\prod_{\sigma,\tau}\left[\mathcal{D}[x_\nu]\mathcal{D}[p_\nu]\mathcal{D}[b]\mathcal{D}[\eta]\mathcal{D}[\bar{b}]\mathcal{D}[\bar{\eta}]\right]exp(iA_g)\right\} = Z_0\theta^{-\frac{D}{2}}\cdot \quad (47)$$
$$\cdot\left(\eta(exp(-i2\pi\theta))\right)^{2-D}exp\left\{\frac{i}{2}A(\tilde{x}^{(1)}_\mu, \tilde{x}^{(2)}_\mu) + 2A(\tilde{\tilde{c}}^{(i)}, \tilde{c}^{(i)})\right\}(\bar{c}^{(1)}_0 - \bar{c}^{(2)}_0)(c^{(1)}_0 - c^{(2)}_0).$$

Интегральное представление для пропагатора $G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2)$ релятивистской струны с духовыми степенями свободы получается, если подставить выражение (47) в формулу (I2), учитывая при этом калибровочное условие (9). В результате имеем

$$G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2) = \int_0^\infty d\theta\,\theta^{-\frac{D}{2}}\left[\eta(exp(-i2\pi\theta))\right]^{2-D}\int\mathcal{D}(\tilde{\varphi})\mathcal{D}(\tilde{\tilde{\varphi}})\,exp\left\{\frac{i}{2}A(\tilde{x}^{(1)}_\mu, \tilde{x}^{(2)}_\mu) + \right. \quad (48)$$
$$\left. + 2A(\tilde{c}^{(i)}, \tilde{\tilde{c}}^{(i)})\right\}(\bar{c}^{(1)}_0 - \bar{c}^{(2)}_0)(c^{(1)}_0 - c^{(2)}_0).$$

В заключение этого раздела работы отметим, что хотя $G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2)$ (48) формально выведено для произвольного числа D измерений пространства-времени, необходимое уравнение для $G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2)$ вида $T(\sigma)G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2) = -\bar{T}(\sigma)G(\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2) \sim \langle\langle x^{(2)}_\mu, c^{(2)}, \bar{c}^{(2)} | x^{(1)}_\mu, c^{(1)}, \bar{c}^{(1)}\rangle\rangle$ получается только при $D = 26$, так как в этом случае в формулах (39) исчезают члены, пропорциональные производным Шварца. При $D \neq 26$ ядро оператора эволюции K (47) необходимо домножить на функционал $exp\{iWZ(f,\bar{f})\}$ который удовлетворял бы уравнению

$$F'(\sigma,\tau_f)\frac{\delta exp\{iWZ\}}{\delta F(\sigma,\tau_f)} = -\bar{F}'(\sigma,\tau_f)\frac{\delta exp\{iWZ\}}{\delta \bar{F}(\sigma,\tau_f)} = -\frac{(D-26)}{24\pi}\hat{D}(\Phi^{(2)})exp\{iWZ\}. \quad (49)$$

Легко убедиться в том, что не существует локального функционала $WZ(f,\bar{f})$, удовлетворяющего условию (49). Поэтому естественно интерпретировать функционал $WZ(f,\bar{f})$ как слагаемое Весса-Зумино (коцикл /I9/).

5. Тройное взаимодействие струн

Взаимодействие квантовых струн описывается ядром оператора эволюции $K_3(x^{(\alpha)}_\mu(\sigma), c^{(\alpha)}(\sigma), \bar{c}^{(\alpha)}(\sigma)), \alpha\in\{1,2,3\}$, которое выражает процесс распада струны $x^{(3)}_\mu$ на две струны $x^{(1)}_\mu$, $x^{(2)}_\mu$. Так как интеграл (35) по полям $x_\mu(\sigma,\tau), c(\sigma,\tau), \bar{c}(\sigma,\tau)$ имеет вид квазигауссова интеграла, естественно предположить следующую форму для K_3:

$$K_3=\delta(c,\bar c)Z\left(A^{ij}_{\alpha\beta},(B_{\alpha\beta})^a{}_b\right)\exp\left\{\frac{i}{2}\left(x^{(\alpha)}_i A^{ij}_{\alpha\beta}x^{(\beta)}_j\right)+2\left(\bar c^{(\alpha)}_a (B_{\alpha\beta})^a{}_b\, c^{(\beta)b}\right)\right\}. \qquad (50)$$

Здесь $A^{T}_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}$; $\delta(c,\bar c)$ – множитель, учитывающий вклад от нулевых мод полей $c^{(\alpha)b}$ и $\bar c^{(\alpha)}_b$.

В формуле (50) опущены пространственно-временные индексы у полей $x^{(\alpha)}_\mu(\sigma)$, а интегрирование по параметрам на струне $\sigma,\ldots$ заменено на суммирование по дискретным индексам $i, j, a, b, \ldots$. Решения задачи Коши (22) и (23) задают естественную комплексную структуру на мировой поверхности струны и по аналогии с уравнениями (36) и (37) можно написать следующие уравнения, определяющие ядро K_3:

$$\left\{Z^{(3)}_{\pm}+\Theta^{3}_{\pm 2}Z^{(2)}_{\pm}+\Theta^{3}_{\pm 1}Z^{(1)}_{\pm}\right\}K_3=0, \qquad (51а)$$

$$\left\{\zeta^{(3)}_{\pm}+\Omega^{3}_{\pm 2}\zeta^{(2)}_{\pm}+\Omega^{3}_{\pm 1}\zeta^{(1)}_{\pm}\right\}K_3=0, \qquad (51б)$$

$$\left\{\eta^{(3)}_{\pm}+\Delta^{3}_{\pm 2}\eta^{(2)}_{\pm}+\Delta^{3}_{\pm 1}\eta^{(1)}_{\pm}\right\}K_3=0. \qquad (51в)$$

В формулах (51) введены обозначения

$$Z^{(\alpha)i}_{\pm}=\left(-i\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{(\beta)}_i}\pm\omega^{ij}x^{(\alpha)}_j\right),\quad \zeta^{(\alpha)b}_{\pm}=\left(c^{(\alpha)b}\pm\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\vec\partial}{\partial\bar c^{(\beta)}_b}\right),$$

$$\eta^{(\alpha)}_{\pm b}=\left(\bar c^{(\alpha)}_b\pm\frac{1}{2}\eta^{\beta\alpha}\frac{\vec\partial}{\partial c^{(\beta)b}}\right),\quad \eta^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};$$

$\Theta^{\alpha}_{\pm\beta}, \Omega^{\alpha}_{\pm\beta}, \Delta^{\alpha}_{\pm\beta}$ – некоторые матрицы, явный вид которых нам пока не важен; ω^{ij} – антисимметричная матрица, дискретный аналог производной $\frac{\partial}{\partial\sigma}$.

Рассмотрим более подробно уравнение (51а) (уравнения (51б) и (51в) рассматриваются аналогично). Из этого уравнения следует система уравнений, которая определяет матрицы $A_{\alpha\beta}=A^{T}_{\beta\alpha}$ через матрицы $\Theta^{\alpha\beta}_{\pm}$:

$$\begin{aligned}&(-A_{33}\pm\omega)+\Theta^{32}_{\pm}A_{23}+\Theta^{31}_{\pm}A_{13}=0,\\ &-A_{32}+\Theta^{32}_{\pm}(A_{22}\pm\omega)+\Theta^{31}_{\pm}A_{12}=0,\\ &-A_{31}+\Theta^{32}_{\pm}A_{21}+\Theta^{31}_{\pm}(A_{11}\pm\omega)=0.\end{aligned} \qquad (52)$$

Система (52) имеет решение только в том случае, если на матрицы $A_{\alpha\beta}$ наложены два условия, которые можно записать в виде

$$1=\Theta^{32}_{\pm}\Theta^{21}_{\pm}\Theta^{13}_{\pm}. \qquad (53)$$

Здесь

$$\Theta^{\alpha\beta}_{\pm}=(\Omega^{T}_{\alpha}\pm\omega)A^{-1}_{\gamma\alpha}A_{\gamma\beta}(\Omega_\beta\pm\omega)^{-1},\ \{(\alpha\beta\gamma)=(321),(213),(132)\}, \qquad (54)$$

$$\Omega_1=A_{11}-A_{12}A^{-1}_{32}A_{31},\quad \Omega_2=A_{22}-A_{23}A^{-1}_{13}A_{12},\quad \Omega_3=A_{31}A^{-1}_{21}A_{23}-A_{33}.$$

Для остальных комбинаций индексов $(\alpha\beta\gamma)$, не перечисленных в (54), положим $\Theta^{\alpha\beta}_{\pm}=(\Theta^{\beta\alpha}_{\pm})^{-1}$.

В случае выполнения условия (53) решение системы (52) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}&A_{13}=\chi^{31}(\phi^{31}-\phi^{32})^{-1}(A_{33}+\phi^{32}),\\ &A_{23}=\chi^{32}(\phi^{32}-\phi^{31})^{-1}(A_{33}+\phi^{31}),\\ &A_{12}=\chi^{31}(\phi^{31}-\phi^{32})^{-1}(A_{33}+\phi^{32})\left(\chi^{12}(\chi^{13})^{-1}\right)^{T}-(\chi^{12})^{T},\\ &A_{11}=\phi^{12}+(\phi^{13}-\phi^{12})(\chi^{13})^{-1}\left(A_{33}+(\phi^{32})^{T}\right)\left((\phi^{31})^{T}-(\phi^{32})^{T}\right)^{-1}(\chi^{31})^{T},\\ &A_{22}=\phi^{21}+(\phi^{23}-\phi^{21})(\chi^{23})^{-1}\left(A_{33}+(\phi^{31})^{T}\right)\left((\phi^{32})^{T}-(\phi^{31})^{T}\right)^{-1}(\chi^{32})^{T}.\end{aligned} \qquad (55)$$

Здесь $\chi^{\alpha\beta}=2(\Theta^{\alpha\beta}_{+}-\Theta^{\alpha\beta}_{-})^{-1}\omega$, $\phi^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Theta^{\alpha\beta}_{+}+\Theta^{\alpha\beta}_{-})\chi^{\alpha\beta}$, а матрица A_{33} удовлетворяет уравнению

$$Y^1A_{33}Y^2+Y^3A_{33}Y^4=Y^5,\quad \left\{Y^1\otimes(Y^2)^{T}+Y^3\otimes(Y^4)^{T}\right\}A_{33}=Y^5, \qquad (56)$$

где

$$Y^1=\chi^{12}(\chi^{13})^{-1},\quad Y^2=\left((\phi^{32})^{T}-(\phi^{31})^{T}\right)^{-1}(\chi^{31})^{T},\quad Y^3=\chi^{32}(\phi^{32}-\phi^{31})^{-1},$$

$$Y^4=\left(\chi^{21}(\chi^{23})^{-1}\right)^{T},\quad Y^5=(\chi^{21})^{T}-\chi^{12}+Y^1(\phi^{32})^{T}Y^2-Y^3\phi^{31}Y^4.$$

По-видимому, уравнения (56) не определяют матрицу A_{33} однозначно, т.е. уравнений (51) не достаточно для полного определения ядра K_3 . Более того, очевидно, что уравнения (51) не определяют функционал $Z(A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})$. Для однозначного определения функционала K_3 необходимы дополнительные соотношения типа уравнений (39). В конечномерном случае (когда индексы $i, j, a, b, \ldots$ пробегают конечное число значений) эти соотношения будут иметь вид

$$\mathrm{Tr}\left(U_{\pm}^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial U_{\pm}^{(\alpha)}} d_a \omega\right) K_3 = \mp i \left\{ \frac{1}{4} z_{\pm}^{(\alpha)i} z_{\pm}^{(\alpha)j} d_{ij,a} - i \eta_{\pm b}^{(\alpha)} t_{ac}{}^{b} \zeta_{\pm}^{(\alpha)c} \right\} K_3, \tag{57}$$

где симметричные матрицы d_a удовлетворяют условию $d_a \omega d_b = (1/2) t_{ab}{}^{c} d_c$, т.е. d_a – образующие алгебры Ли, а матрицы $U_{\pm}^{(\alpha)} = exp\{\varphi_{(\alpha)}^{a} (\omega d_a)\}$ являются элементами группы Ли ($\varphi_{(\alpha)}^{a}$ – параметры этой группы) и определяются из представления

$$\theta_{\pm}^{\alpha\beta} = (U_{\pm}^{(\alpha)})^{-1} \omega \theta^{\alpha\beta} \frac{1}{\omega} U_{\pm}^{(\beta)} \quad . \tag{58}$$

Возможность такого представления вытекает из равенств (54).

Отметим также уравнение на функционал K_3, которое не определяет K_3 полностью и которое следует из требования сохранения БРСТ-заряда:

$$(Q_{\pm}^{(1)} + Q_{\pm}^{(2)} + Q_{\pm}^{(3)}) K_3 = 0,$$

где

$$Q_{\pm}^{(\alpha)} = \frac{1}{4} z_{\pm}^{(\alpha)i} z_{\pm}^{(\alpha)j} d_{ij,a} \zeta_{\pm}^{(\alpha)a} + \frac{i}{2} \eta_{\pm c}^{(\alpha)} t_{ab}{}^{c} \zeta_{\pm}^{(\alpha)a} \zeta_{\pm}^{(\alpha)b} \; .$$

Интересный результат получается, если подставить формулу (58) в равенства (55) и (56) и найти предел для функционала K_3(50) в случае, когда матрицы $U_{\pm}^{(\alpha)}$ стремятся к единичной матрице (зависимость от духовых переменных c и $\bar{c}$ не рассматривается). В этом случае получаем

$$K_3 \sim \Sigma \cdot \delta(x^{(3)} + \theta^{31} x^{(1)} + \theta^{32} x^{(2)}) \, \delta(M^{31} x^{(1)} + M^{32} x^{(2)}), \tag{59}$$

где Σ – функционал, пропорциональный структуре $\det^{\frac{D}{2}}(1 + \omega_3 \theta^{32} (\omega_2)^{-1} (\theta^{32})^T + \omega_3 \theta^{31} (\omega_1)^{-1} (\theta^{31})^T)$ (здесь ω_α -матрицы, для которых $\det \omega_1 = \det \omega_2 = \pm \det \omega_3$), а $M^{\alpha\beta}$ – некоторые сингулярные матрицы, не имеющие обратных. Формула (59) является общей формулой для вершины взаимодействия бозонных струн (см.работы /I,4-6/).

6. Заключение

В работе рассматривалась квантовая и классическая динамика бозонной релятивистской струны с духовыми степенями свободы. Были построены локальные интегралы движения такой струны и решение задачи Коши. На основе решения задачи Коши было получено интегральное представление для пропагатора РС. Эти результаты могут стать основой для нового, отличного от работ /4-6/, подхода к построению теории поля взаимодействующих струн.

В заключение отметим универсальный характер методов исследования струн, которые представлены в данной статье. В частности, эти методы довольно легко переносятся на случай фермионной струны /20/.

Автор благодарен В.А.Рубакову за указание на важность решения задачи Коши для построения квантовых теорий, а также Л.Альварецу-Гоме, А.Б. и Ал.Б.Замолодчиковым и А.Т.Филиппову за полезные обсуждения и ценные критические замечания.

Литература

1. Neveu A., West. P. -Nucl.Phys., 1986, B268, p.125-150.
Kaku M., Kikkawa K. - Phys.Rev., 1974, D10, 1110-1133, 1823-1843.
Cremmer E., Gervais J. - Nucl.Phys., 1974, B76, p.209-230.
Green M., Schwarz J. - Nucl.Phys., 1983, B218, p.43-88.
2. Siegel W. - Phys.Lett., 1984, 142B, p.276-280.
Siegel W.-Phys.Lett., 1984, 149B, p.157-161, 162-166.
Siegel W.-Phys.Lett., 1985, 151B, p.391-395, 396-400.
3. Kato M., Ogawa K.-Nucl.Phys., 1983, B121, p.443-460.
Hwang S.-Phys.Rev., 1983, D28, No.10, p.2614-2620.
4. Hata H., Itoh K., Kunitomo H., Ogawa K.-Phys.Lett., 1986, 172B, No. 2, p.186-194, 195-199, 175B, No.2, p.138-144.
5. Witten E.-Nucl.Phys., 1986, B268, p.253-294.
6. Арефьева И.Я., Волович И.В.-ТМФ, I986, 67, № 2, с.320-324.
Арефьева И.Я., Волович И.В.-ТМФ, I986, 67, № 3, с.474-478.
7. Faddeev L.D., Popov V.N.-Phys.Lett., 1967, B25, p.29-30.
Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, I978.
8. Исаев А.П.-ТМФ, I983, 54, № 2, с.209-2I8.
Исаев А.П.-Письма в ЖЭТФ, I98I, 33, № 7, с.357-360.
Pron'ko G.P., Razumov A.V., Soloviev L.D. Some New Results in Classical Theory of Relativistic String. Preprint IHEP 82-106, Serpukhov, IHEP, 1982.
9. Филиппов А.Т. Краткие сообщения ОИЯИ № 3 (23) - 87,Дубна, I987, с.5.
10. Hwang S., Marnelius R.-Nucl.Phys., 1986, B272, No.2, 389-412.
11. Фаддеев Л.Д.-ТМФ, I969, I, №I, с.3-I8.
Вилковыский Г.А., Фрадкин Е.С. Материалы IУ международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, I976, ОИЯИ, 2-9788, Дубна, I976.

12. Freeman M.D., Olive D.I. - Phys.Lett., 1986, 175B, No.2, p.155-158.
13. Alvarez O.-Nucl.Phys., 1983, B216, No.1, p.125-184.
14. Polyakov A.M.-Phys.Lett., 1981, 103B, No.3, p.207-210.
15. Durhuus B. et al.-Nucl.Phys., 1982, B196, No.3, p.498-508.
Gervais J., Neveu A.-Nucl.Phys., 1982, B209, No.1, p.125-145.
Fradkin E.S., Tseytlin A.A.-Ann.Phys., 1982, v.143, No.2, p.413-447.
Zamolodchikov A.B.-Phys.Lett., 1982, 117B, No.1,2, p.87-90.
Belavin A.A., Knizhnik V.G.-Phys.Lett., 1986, 168B, p.201-206.
Манин Ю.И.-Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, №4, с.161-163.
L.Alvarez-Gaume. Preprint CERN TH.4480/86 (1986).
16. Исаев А.П. Теория релятивистской струны с духовыми степенями свободы. Препринт ОИЯИ Р2-87-34, Дубна (1987).
17. Исаев А.П. К вопросу о квантовании релятивистской струны. Препринт ИФВЭ 82-193, Серпухов, 1982.
18. Polyakov A.M.-Nucl.Phys., 1980, B164, No.1, p.171-188.
Luscher M., Symanzik K., Weisz P.-Nucl.Phys., 1980, B173, No.3, p.365-396.
19. Фаддеев Л.Д., Шаташвили С.-ТМФ, 1984, 60, №2, с.206-217.
20. Исаев А.П. Об одной схеме квантования фермионной струны. Труды IX семинара по физике высоких энергий и теории поля, Протвино, 1986. М.: Наука, 1987.
Бородулин В.И., Исаев А.П. Об интегрируемости фермионной струны в суперполевом гамильтоновом подходе. Препринт ОИЯИ Р2-87-376, Дубна (1987).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июля 1987 года.

Исаев А.П. Р2-87-587
Теория релятивистской струны с духовыми степенями свободы

Исследуется модель замкнутой бозонной релятивистской струны с духовыми степенями свободы. В этой модели найдено решение задачи Коши и построены все тензорные полиномиальные, локальные законы сохранения. На основе решения уравнений в функциональных производных найдены ядро оператора эволюции и пропагатор релятивистской струны с духовыми степенями свободы. Намечен путь построения взаимодействия релятивистских струн.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Isaev A.P. P2-87-587
Relativistic String Theory with Ghost Degrees of Freedom

A model of closed bosonic relativistic string with ghost degrees of freedom is investigated from a somewhat new point of view. A solution of the Cauchy problem is obtained and all polynomial local conservation laws are constructed. A heat-kernel and a propagator of this relativistic string are found from a functional equation resolution. A construction of the relativistic string interaction is sketched.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987