сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-514

К.В.Рерих

О НОВЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЧУ - ЛОУ

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], широкий класс уравнений Чу-Лоу и им подобных, отличающихся от последних по существу только матрицей кроссинг-симметрии, допускает формулировку их в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений [1,3]:

$$S_i(-w) = \sum_j A_{ij} S_j(w),$$

$$S_i(w+1) = 1/\sum_j A_{ij} S_j(w). \qquad /1/$$

Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S-матрицы в состояниях i, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $n \times n$ со свойствами $A^2 = E$, $\sum_j A_{ij} = 1$. Решения системы /1/ должны быть мероморфными действительными функциями униформизующей переменной $w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$, где ω - энергия пиона в лабораторной системе, и удовлетворять некоторым локальным условиям требуемого поведения на пороге и в борновском полюсе.

Ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных разностных уравнений система /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, на решение которой были направлены многолетние исследования ряда авторов /см. ссылки, например, в [3-5]/. Отношения $x_i(w) = S_i(w)/S_k(w)$ /$n = 3$/ для известных частных решений /1/ являются рациональными функциями w [1,6], либо рациональными функциями $e^{\lambda w}$, где λ - const [7]. Наряду с этим для уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$ были получены [5,8] решения, являющиеся трансцендентными мероморфными функциями $z = e^{\lambda w}$. Ниже будет показано существование таких же решений для уравнений Чу - Лоу /1/ с матрицей

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /2/$$

При малых значениях z эти решения определяются сходящимся в некоторой окрестности начала координат рядом по z, дан алгоритм вычисления найденных решений для произвольных значений z, получено графическое представление решений.

2. НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧУ - ЛОУ

Будем рассматривать систему уравнений /1/ с матрицей /2/ в удобной для нас форме /3,1-2,4/, предложенной в [9]:

$$x' = F(x, y), \quad F(x, y) = \frac{x + 2x^2 - xy - 2y^2}{1 + 3x + 3y - 2x^2 - 3xy - 2y^2} \qquad /3.1/$$

$$y' = -F(y, x), \quad x' = x(w + 1), \quad y' = y(w + 1)$$

$$x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w) \qquad /3.2/$$

$$s_1 s_1'(1 - 2y + x)(1 - 2y' - x') = 1 \qquad /4/$$

$$s_1' = s_1(w + 1), \quad s_1(-w) = s_1(w).$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $s_1(w)$, $x(w)$, $y(w)$ из /3.1/ и /4/ дается следующей формулой:

$$S_i(w) = s_1(w) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y(w) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x(w) \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ниже мы ограничимся построением новых решений системы /3.1/, не прибегая на этой стадии к уравнению /4/.

Система /3.1/, рассматриваемая как преобразование плоскости x, y, является квадратичным преобразованием Кремона [10]. Оно имеет следующие неподвижные точки: $d_1(x = 0, y = 0)$ и d_2, $d_3(x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}, y = \frac{2}{3})$ и фундаментальные точки [4] $O_i(x_i, y_i)$ $(O_i'(-x_i, y_i)$ /для обратного преобразования/:

$$O_1(1, 1), \quad O_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad O_3\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right). \qquad /5/$$

Через неподвижную точку d_1 проходит известное решение [1,6], лежащее на параболе $y = x^2$. Ниже мы будем интересоваться решениями, проходящими через $d_2(x = \frac{2}{3}\sqrt{2}, y = \frac{2}{3})$.

Совершим для удобства квадратичное преобразование Кремона от функций $x(w)$ и $y(w)$ к $u_1(w)$ и $u_2(w)$:

$$u_1 = \frac{(y + x)(y - 1)}{y^2 - x^2}, \quad x = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2 - 2u_1 u_2}$$
$$/6/$$
$$u_2 = \frac{(y - x)(y - 1)}{y^2 - x^2}, \quad y = \frac{u_1 + u_2}{u_1 + u_2 - 2u_1 u_2}.$$

Тогда система /3.1/ примет более простой вид:

$$u_1(w + 1) = \frac{(9u_1 + u_2 - 2u_1 u_2)(1 - u_1)}{u_1 + u_2 - 2u_1^2},$$
$$/7/$$
$$u_2(w + 1) = 1 - u_1(w).$$

Неподвижная точка d_2 перейдет в точку $(u_{10} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \; u_{20} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2})$. Диагонализуя линейное приближение к системе /7/ в окрестности этой точки, получим

$$v_1(w + 1) = \lambda_1 v_1 + f_1(v_1, v_2),$$

$$v_2(w + 1) = \lambda_2 v_2 + f_2(v_1, v_2).$$

где v_1 и v_2 - линейные комбинации $u_1 - u_{10}$, $u_2 - u_{20}$, $\lambda_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{65}}{2\sqrt{2} + 1}$, $\lambda_2 < 1 < \lambda_1$, f_1, f_2 - голоморфны в начале координат, а их первые частные производные равны нулю в этой точке.

Тогда согласно теореме из [11] /см. с.74/ можно утверждать, что система /7/ имеет два частных решения: $u_i^{I}(z_1(w))$ и $u_i^{II}(z_2(w))$, голоморфных в окрестности $z = 0$, а $z_1(w)$ и $z_2(w)$ являются решениями уравнений

$$z_1(w + 1) = \lambda_1 z_1(w), \quad z_2(w + 1) = \lambda_2 z_2(w)$$

и имеют вид

$$z_1(w) = \exp(\ln \lambda_1 \cdot w), \quad z_2 = \exp(\ln \lambda_2 \cdot w).$$

Легко видеть из /7/, что фактически нужно найти только $u_1(z)$, так как

$$u_2(z) = 1 - u_1\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

Для $u_1(z)$ получим из /7/ уравнение

$$u_1(\lambda^2 z)[1 + u_1(\lambda z) - u_1(z) - 2u_1^2(\lambda z)] =$$

$$= [1 + 7u_1(\lambda z) - u_1(z) - 2u_1(z)\,u_1(\lambda z)]\,(1 - u_1(\lambda z)). \qquad /8/$$

Подставляя в /8/ $u_1(z)$ в виде ряда по степеням z:

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \qquad /9/$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях уравнения, получим

$$f_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda = \lambda_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{65}}{2\sqrt{2}+1}, \qquad /10/$$

$$f_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda = \lambda_{3,4} = \frac{6\sqrt{2} \mp \sqrt{65}}{2\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\lambda_{1,2}}.$$

Значения $f_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $\lambda = \lambda_{3,4}$ соответствуют решениям, проходящим через неподвижную точку d_3. Коэффициент f_1 остается произвольным, мы полагаем $f_1 = 1$. Из уравнения для коэффициентов при $z^k\ (k \geq 2)$ получим рекуррентное соотношение на f_k:

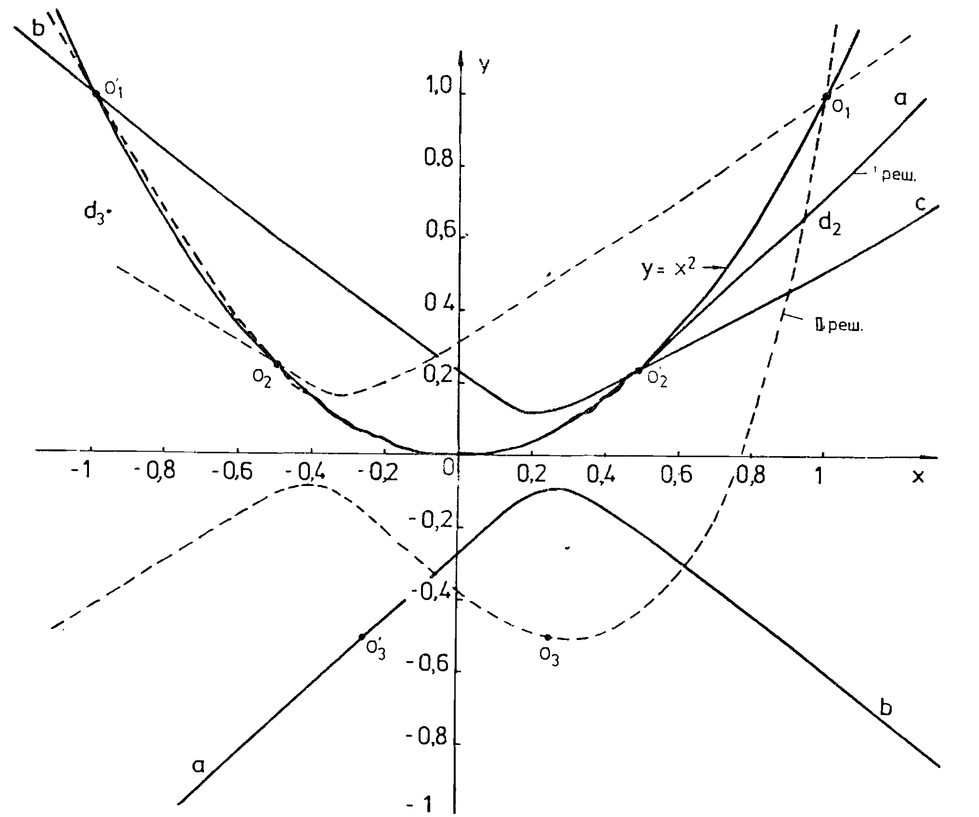
$$f_k = \frac{\sum\limits_{m=1}^{k-1} f_{k-m}\left[(2\lambda^{2k-m} - \lambda^{2k-2m} - 3\lambda^{k-m} + 7\lambda^k) f_m - 2(\lambda^{2k-2m} - 1)\lambda^m \sum\limits_{n=0}^{m} f_{m-n} f_n\right]}{(2f_0^2 - 1)\lambda^{2k} + 6\lambda^k(1 - 2f_0) - 1 + 4f_0 - 2f_0^2}. \qquad /11/$$

Вычисление на ЭВМ $f_k\ (k \leq 20)$ для 1 решения $/\lambda = \lambda_1 \approx 4{,}32/$ показывает, что можно ожидать сходимости ряда /9/ для $u_1(z)$ в области $|z| \leq \sqrt{\lambda_1}$. При малых z $(|z| < \frac{1}{4}\sqrt{\lambda_1})$ мы можем определить с высокой степенью точности $u_1(z)$ и $u_2(z)$ с помощью ряда /9/, учитывая члены с $k \leq 20$. Для больших значений z, используя итерации /7/ $\left(u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right)$

$$u(\lambda^n z) = T^n u(z), \qquad /12/$$

где оператор T задан правой частью /7/, мы можем указать такие n и $z_n = \frac{z}{\lambda^n}$, что, вычисляя u_1 и u_2 при $z = z_n$ с помощью "усеченного" ряда /9/ и применяя /12/, мы получим $u_1(z)$ и $u_2(z)$ с большой точностью. Расчет на ЭВМ дает ближайшие полюса функции $u_1(z)$ при $z = -2{,}616$ и $z = -45{,}002$. На рисунке дано графическое представление $x(z)$ и $y(z)$ для 1 решения в области $|z| < 100$.

Для II решения $/\lambda = \lambda_2 \approx 0{,}11/$ полюса в $u_1(z)$ будут находиться в $1/\lambda_2$ раз дальше, чем в $u_2(z)$. Поэтому мы определим аналогично $u_1(z)$ функцию $u_2(z)$ из уравнения, которое имеет тот же



вид /8/, если заменить $u_1 \to u_2$, $\lambda \to \frac{1}{\lambda_2}$. Рекуррентное соотношение для коэффициентов в разложении $u_2(z)$ в ряд /9/ будет иметь тот же вид /11/, если λ заменить на $\frac{1}{\lambda_2}$, а $f_0 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Вычисление на ЭВМ f_k /$k \le 20$/ показывает, что можно ожидать сходимости /9/ для $u_2(z)$ в области $|z| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$. Для малых значений z ($|z| < \frac{1}{4}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$) $u_2(z)$ и $u_1(z)$ вычисляются с помощью "усеченного" ряда /$k \le 20$/, при бо́льших z – с помощью итераций обратного оператора T^{-1}:

$$u(\lambda_2^{-n} z) = (T^{-1})^n u(z),$$

$$T^{-1}:\quad u_1\left(\frac{1}{\lambda_2} z\right) = 1 - u_2(z)$$

$$u_2\left(\frac{1}{\lambda_2} z\right) = \frac{(9u_2 + u_1 - 2u_1u_2)(1-u_2)}{u_1 + u_2 - 2u_2^2}.$$

Расчет на ЭВМ дает ближайшие полюса $u_2(z)$ при $z \approx -2{,}96$; $z \approx -201{,}55$. На рисунке дано графическое представление $x(z)$ и $y(z)$ для II решения /пунктирная линия/ для $|z| < 700$.

Остановимся на свойствах полученных решений. Для I решения при $z > 0$ решение выходит из неподвижной точки d_2, пересекает параболу $y = x^2$ в т. O_2' и далее осциллирует вокруг нее, бесконечно приближаясь к началу координат. При $z < 0$ кривая проходит в направлении abc через т. O_3', пересекая параболу в т. O_1' и O_2'.

Для II решения при $z > 0$ решение выходит из d_2, пересекая параболу в т. O_1, уходя на бесконечность ($v \to \infty$) при $x \approx 1{,}72$, затем переходит в правый нижний квадрант /$x > 1{,}72$, $y < 0$/, уходя на бесконечность $x \to \infty$, $y \to -\infty$ /не отражено на графике/ и далее переходит в левый верхний квадрант, пересекая параболу в т. O_1' и O_2, и далее осциллирует вокруг параболы, бесконечно приближаясь к началу координат. При $z < 0$ кривая пересекает ось x, проходит через O_3, O_1 и O_2.

Заметим, что решения, проходящие через симметричную неподвижную точку d_3, получаются простой заменой $x \to -x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
2. Chew G.F., Low F.E. - Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
3. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. - Ann. of Phys., 1970, 59, p.408.
4. Rerikh K.V. In: Proceedings of the XIII International Conference of Differential Geometric Methods in Theoretical Physics. Shumen, Bulgaria, 1984, World Scient., 1986, p.170-178.
5. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-85-725, Дубна, 1985; In: Proceedings of the XIX International Symposium. Ahrenshoop, DDR, 1985, p.236.
6. Rotheluther T. - Zs.Phys., 1964, 177, p.287.
7. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. - ЯФ, 1968, 10, с.168.
8. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-86-798, Дубна, 1986.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971.
10. Hudson H. Cremona Transformations in Plane and Space. Cambridge, 1927.
11. Harris W.A., Yr., Sibya Y. Trans. of Amer. Math. Soc., 1965, vol.115, p.62.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1987 года.

Рерих К.В. Р2-87-514

О новых решениях уравнений Чу – Лоу

Исследуется система уравнений Чу – Лоу для матричных элементов S-матрицы как функций униформизующей переменной w, в которой эта система имеет вид нелинейных разностных уравнений. Найдено квадратичное преобразование Кремона искомых функций, приводящее исходные уравнения к более простому виду. Получены новые частные решения в виде рядов по переменной $z = e^{\ln\lambda w}$, сходящихся в некоторой окрестности начала координат в плоскости z. Дан алгоритм вычисления найденных решений для произвольных значений z, найдены ближайшие полюса, получено графическое представление решений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс.

Rerikh K.V. P2-87-514

On New Solutions of Chew-Low Eguations

The system is investigated of Chew-Low equations for S-matrix elements as functions of the uniformizing variable w in terms of which this system is a system of nonlinear difference equations. The quadratic Cremona transformation for unknown functions reducing the initial equations to a more simple form is found. New particular solutions as series in variable $z = e^{\ln\lambda w}$ convergent in a vicinity of the coordinate origin in the plane z are obtained. The computation algorithm for obtained solutions for any values of z is presented, the nearest poles and a graphic representation of solutions are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987