объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-502

В.И.Иноземцев

О ЗАРЯЖЕННЫХ ВИХРЯХ В (2+1)-МЕРНОЙ АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА

Направлено в журнал "Europhysics Letters"

1987

Статические вихри в /2 + 1/-мерной абелевой модели Хиггса являются простейшими объектами с нетривиальными топологическими свойствами в классической теории поля [1]. Модель содержит взаимодействие заряженного скалярного поля с электромагнитным; тем не менее все состояния с конечной энергией имеют нулевой электрический заряд.

Обобщение модели путем добавления в лагранжиан слагаемого Черна-Саймонса, не нарушающего калибровочной инвариантности, вызвало значительный интерес [2-5]. Это слагаемое, не сохраняющее четность, приводит к появлению массы векторного поля в пространстве трех измерений [2]. Если массовый член уже присутствовал в лагранжиане, то появляются два состояния с различными массами [5]. Вихри приобретают электрический заряд как в абелевой модели [6], так и в ее неабелевых обобщениях [6,7]. При этом авторы работ [6,7] пришли к выводу об удвоении числа возможных типов вихрей, основанному на указанном выше появлении двух состояний векторного поля с различными массами.

В данной заметке мы приводим аргументы в пользу гипотезы об отсутствии такого удвоения, а также вычисляем поправки к полям и энергии вихря в рамках теории возмущений при введении в лагранжиан модели слагаемого Черна-Саймонса. Все сказанное ниже применимо и к неабелевой теории, уравнения которой для состояний, обладающих центром симметрии, полностью аналогичны уравнениям абелевой модели [7].

Модель определяется лагранжианом

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu + iA_\mu)\Phi(\partial^\mu - iA^\mu)\Phi^* - \frac{\lambda}{8}(\Phi\Phi^* - 1)^2 + \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha,$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \qquad /1/$$

Для простоты заряд скалярного поля Φ выберем равным 1.

Вихри обладают минимальным магнитным потоком $\Phi = 2\pi$ и цилиндрической симметрией:

$$A_0 = A_0(\rho), \quad A_\phi = -\frac{A(\rho)}{\rho}, \quad A_\rho = 0, \quad \Phi = f(\rho)e^{-i\phi}, \qquad /2/$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Вариация /1/ приводит к следующим уравнениям движения для A, f, A_0:[6,7]

$$\frac{d^2A}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dA}{d\rho} - (1+A)f^2 = \mu\rho\frac{dA_0}{d\rho}, \qquad /3а/$$

$$\frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df}{d\rho} - \left(\frac{(A+1)^2}{\rho^2} - A_0^2\right)f + \frac{\lambda}{2}f(1-f^2) = 0, \qquad /3б/$$

$$\frac{d^2A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dA_0}{d\rho} - A_0 f^2 = \frac{\mu}{\rho}\frac{dA}{d\rho}. \qquad /3в/$$

Функционал энергии с учетом уравнения движения /3/ может быть записан в виде

$$\epsilon = \frac{1}{2}\int d^2x\left(\frac{A'^2}{\rho^2} + f'^2 + A_0'^2 + f^2\left(\frac{(A+1)^2}{\rho^2} + A_0^2\right) + \frac{\lambda}{4}(1-f^2)^2\right). \qquad /4/$$

Решения с конечной энергией должны удовлетворять граничным условиям

$$\lim_{\rho\to\infty} A = 0, \quad \lim_{\rho\to\infty} A = -1, \quad \lim_{\rho\to\infty} f = 1, \qquad /5/$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{A}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} f = 0, \qquad /6а/$$

$$\lim_{\rho\to 0} A_0 = C < \infty. \qquad /6б/$$

Отметим, что в работах [6,7] вместо /6б/ налагается условие $C = 0$, которое не следует из уравнения движения и требования непрерывности A_0 и $\partial A_0/\partial x_i$. Заряд вихря $Q = \int d^2x A_0|\Phi|^2$ может быть определен интегрированием /3в/ и оказывается равным $2\pi\mu$.

На больших расстояниях можно исследовать асимптотическое поведение полей, обладающих свойствами /5/. Линеаризованные уравнения /3/, как было установлено в [6,7], имеют частные решения

$$A + 1 = C_\pm(\mu)\rho K_1(\mu_\pm\rho), \quad A_0 = \mp C_\pm(\mu)K_0(\mu_\pm\rho), \qquad /7а/$$

$$1 - f = \phi K_0(\sqrt{\lambda}\rho). \qquad /7б/$$

Здесь $\mu_\pm = \sqrt{1+\mu^2/4} \pm \mu/2$ – две различные массы состояний векторного поля, появление которых характерно для моделей со слагаемым Черна-Саймонса. Именно существование двух линейно независимых асимптотических решений уравнений /3/ привело авторов работ [6,7] к утверждению о существовании двух типов вихрей с одинаковыми значениями магнитного потока и заряда и различными асимптотическим поведением полей /7а/.

Покажем, что по крайней мере при значениях параметра μ в некоторой малой окрестности $\mu = 0$ это утверждение несовместимо с предположением об ограниченности энергии и потенциала A_0; вычисления по теории возмущений свидетельствуют в пользу существования только одного типа вихря.

Итак, предположим, следуя [6,7], что асимптотика A_0 имеет вид $C_\pm(\mu)K_0(\mu_\pm\rho)$. Покажем, что если A_0 всюду ограничена и энергия вихря ϵ конечна при $\mu\to 0$, то $\lim_{\mu\to 0} C_\pm(\mu) = 0$. Далее, если ограничены также величины A_0'/ρ, f, $\mu A'/\rho$, то $\lim_{\mu\to 0} A_0(\rho) = 0$.

Для доказательства этих утверждений умножим уравнение /3в/ на $A_0\rho$ и проинтегрируем по ρ от 0 до ∞. Получим неравенство

$$\int_0^\infty \rho(A_0'^2 + A_0^2 f^2)\,d\rho = -\mu\int_0^\infty A_0A'\,d\rho \le \frac{\mu}{2}\left(\int_0^\infty A_0^2\rho\,d\rho + \int_0^\infty\frac{A'^2}{\rho}\,d\rho\right).$$

Так как $\epsilon \ge \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{A'^2}{\rho}d\rho$, то оба интеграла в правой части неравенства ограничены и

$$\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty \rho(A_0'^2 + A_0^2f^2)\,d\rho = 0. \qquad /8/$$

Поскольку $\lim_{\rho\to\infty} f^2 = 1$, из $A_0 \sim C_\pm(\mu)K_0(\mu_\pm\rho)$ и /8/ следует

$$\lim_{\mu\to 0} C_\pm(\mu) = 0. \qquad /9/$$

Далее, пусть ограничены сверху A_0, $\frac{A_0'}{\rho}$, f, $\frac{\mu A'}{\rho}$. Тогда из /3в/ следует, что ограничена и вторая производная A_0'': $|A_0''| \le C_0$. Пусть $\lim|A'(\rho_0)| = \delta > 0$. Тогда в интервале $(\rho_0 - \delta/2C_0, \rho_0 + \delta/2C_0)$ $\lim_{\mu\to 0}|A'(\rho)| \ge \frac{\delta}{2}$, $\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty \rho A'^2 d\rho > \rho_0\frac{\delta^3}{4C_0}$, что противоречит /8/ при $\delta \ne 0$. Следовательно, $\lim_{\mu\to 0} A'(\rho) = 0$ и $\lim_{\mu\to 0} A_0(\rho) = \mathrm{const} = C_1$.

Применяя точно такой же прием, как описанный выше, из /8/ найдем, что $C_1 = 0$.

Известно, что асимптотика векторного и скалярного полей для вихря в обычной абелевой модели Хиггса имеет вид

$$\tilde{A} + 1 \sim Z_1\rho K_1(\rho), \quad \tilde{f} \sim 1. \qquad /10/$$

Величина Z_1 отлична от 0 и при $\lambda=1$ равна 1,7079 [8]. Сравнивая /7а/, /9/ и /10/, видим, что гипотетические решения $\{A_0, A_1, f\}$ с асимптотикой /7а/, указанные в [6,7], не переходят при $\mu \to 0$ в решения $\{0, \tilde{A}, \tilde{f}\}$ с асимптотикой /10/. Более того, при $\lim_{\mu\to 0} A_0(\rho) \neq 0$ функции A_0, A, f либо их производные должны обладать сингулярностями при $\mu \to 0$.

С физической точки зрения более естественно ожидать, что при малых μ решения уравнений /3/ будут близки к набору $\{0, \tilde{A}, \tilde{f}\}$, соответствующему незаряженному вихрю. Такие решения можно искать в виде асимптотических рядов

$$A \simeq \sum_{n=0} a_n(\rho)\mu^{2n}, \quad A_0 = \mu \sum_{n=1} a_{0n}(\rho)\mu^{2(n-1)}, \; f = \sum_{n=0} f_n(\rho)\mu^{2n}, \qquad /11/$$

$$a_0 = \tilde{A}, \quad f_0 = \tilde{f}.$$

В /11/ учтена симметрия /3/ относительно замены $\mu \to -\mu, A_0 \to -A_0$.

Найдем явный вид функций a_1, a_{01}, f_1 в /11/. При подстановке /11/ в /3/ получим линейные относительно этих функций уравнения

$$a_1'' - \frac{a_1'}{\rho} - a_1\tilde{f}^2 - 2f_1(\tilde{A}+1) = \rho a_{01}', \qquad /12а/$$

$$f_1'' + \frac{f_1'}{\rho} - f_1\frac{(\tilde{A}+1)^2}{\rho^2} - 2f\frac{(\tilde{A}+1)a_1}{\rho^2} + \frac{\lambda}{2} f_1(1-3\tilde{f}^2) = -\tilde{f}a_{01}^2, \qquad /12б/$$

$$a_{01}'' + \frac{a_{01}'}{\rho} - a_{01}\tilde{f}^2 = \frac{A'}{\rho}. \qquad /12в/$$

Существует частное решение /12в/, удовлетворяющее граничным условиям /5/:

$$a_{01}(\rho) = \frac{1}{2}(\tilde{A}+1). \qquad /13/$$

Это решение оказывается единственным, так как нетрудно показать, что для решений $f\{\tilde{a}_{01}\}$ однородного уравнения /12в/ с граничными условиями типа /5/ должны выполняться соотношения

$$\int_0^\infty \rho\,\tilde{a}_{01}'^2 d\rho = 0, \quad \int_0^\infty \rho\tilde{f}^2\tilde{a}_{01}^2 = 0, \qquad /14/$$

из которых следует $\tilde{a}_{01} = 0$.

После того, как найдено решение /13/ для a_{01}, легко убедиться, что система /12а-б/ с граничными условиями $\lim_{\rho\to 0,\infty} \{a_1(\rho), f_1(\rho)\} = 0$ обладает решением

$$a_1(\rho) = \frac{\rho^2}{8}(\tilde{A}+1), \quad f_1(\rho) = 0. \qquad /15/$$

Единственность /15/, т.е. отсутствие ограниченных нетривиальных решений однородной системы /12а-б/ удалось установить лишь численными методами в случае $\lambda = 1$, для которого известна аналитическая аппроксимация функций $\tilde{A}, \tilde{f}$ [8].

Определим теперь структуру асимптотических разложений при $\rho \to \infty$, соответствующих /11, 13, 15/. Очевидно, в них должны присутствовать оба слагаемых /7а/ с массами $\mu_\pm$:

$$\begin{aligned} 1 + A(\rho) &\sim \rho[C_+(\mu)K_1(\mu_+\rho) + C_-(\mu)K_1(\mu_-\rho)], \\ A_0(\rho) &\sim C_-(\mu)K_0(\mu_-\rho) - C_+(\mu)K_0(\mu_+\rho). \end{aligned} \qquad /16/$$

Сравнивая /16/ с /13/, /15/, найдем

$$C_\pm(\mu) \simeq \frac{Z_1}{2}(1 + O(\mu^2)),$$

где Z_1 - коэффициент в асимптотическом разложении $\tilde{A}(\rho)$: $\tilde{A}(\rho) = -1 + Z_1\rho K_1(\rho)$.

Далее, согласно /3а/ и /16/ установим асимптотику поля Хиггса [9]:

$$f = 1 - \phi K_0(\sqrt{\lambda}\rho) + \psi(\rho),$$

$$\psi(\rho) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{C_+^2 e^{-2\mu_+\rho}}{\mu_+^2(4\mu_+^2-\lambda)\rho^2} + \frac{C_-^2 e^{-2\mu_-\rho}}{\mu_-^2(4\mu_-^2-\lambda)\rho^2} + \frac{4C_+C_- e^{-(\mu_++\mu_-)\rho}}{\rho[(\mu_++\mu_-)^2-\lambda]}\right]. \qquad /17/$$

Очевидно, при $\sqrt{\lambda} > 2\mu_-$ в разложении /17/ будет доминировать слагаемое $\psi(\rho)$, пропущенное в [6,7].

Заметим также, что гипотеза [6,7] о существовании двух типов не подтверждается при вычислении отдельных слагаемых в /11/: для всех n функции a_n, a_{0n}, f_n удовлетворяют уравнениям, аналогичным /12/, решение которых при $\lambda = 1$ и заданных граничных условиях единственно.

Наконец, по формулам /13/, /15/ можно вычислить поправку к энергии вихря ϵ порядка μ^2. Удивительно, что ответ не зависит от параметра λ и не требует знания решений каких-либо уравнений:

$$\delta\epsilon = \frac{\mu^2}{4}\int d^2x\left[\tilde{A}'^2 + \frac{\tilde{A}'}{\rho}(A+1) + \tilde{f}^2(\tilde{A}+1)^2\right] = \frac{\pi\mu^2}{4}.$$

Этот результат было бы интересно сравнить с вариационными расчетами энергии вихрей, о проведении которых сообщили авторы работ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Jaffe A., Taubes C. Vortices and Monopoles, Birkhauser, 1980.
2. Schonfield J. - Nucl.Phys., 1981, B185, p.157.
3. Deser S., Jackiw R., Templeton S. - Ann.Phys., 1982, 140, p.372.
4. Boyanowski D., Blankenbecler R. - Phys.Rev., 1986, D34, p.612.
5. Pisarski R.D., Rao S. - Phys.Rev., 1985, D32, p.2081.
6. Paul S.K., Khare A. - Phys.Lett., 1986, 174B, p.420.
   Kumar C., Khare A. - Phys.Lett., 1986, 178B, p.395.
   Khare A. In:Current Trends in Physics, 1986, p.73.
7. de Vega H., Schaposnic F.A. - Phys.Rev.Lett., 1986, 56, p.2564; Phys.Rev., 1986, D34, p.3206.
8. de Vega H., Schaposnik F.A. - Phys.Rev., 1976, D14, p.1100.
9. Plohr B. - J.Math.Phys., 1981, 22, p.2184.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1987 года.

Иноземцев В.И. P2-87-502

О заряженных вихрях в /2+1/-мерной абелевой модели Хиггса

Рассматривается асимптотическое поведение полей в классической /2+1/-мерной абелевой модели Хиггса, в лагранжиан которой введено слагаемое Черна - Саймонса. Модель допускает существование вихрей с электрическим зарядом Q. В рамках теории возмущений вычислены поправки второго порядка по Q к полям, описывающим нейтральный вихрь; приводятся аргументы в пользу гипотезы об отсутствии удвоения возможных вихревых конфигураций.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Inozemtsev V.I. P2-87-502

On Charged Vortices in the (2+1)-Dimensional Abelian Higgs Model

We consider the asymptotic behaviour of scalar and vector fields in the classical three-dimensional Abelian Higgs model with a Chern-Simons term added to the Lagrangian. The model exhibits vortices with electric charge Q. We calculate corrections of the second order in Q to the fields describing a neutral vortex. We also present some arguments against to hypothesis of the doubling of possible vortex states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987