объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-494

В.К.Мельников

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x,y

Направлено в Оргкомитет Школы по нелинейным дифференциальным уравнениям, 28 сентября-3 октября 1987 г., Варна, НРБ

1987

В течение нескольких столетий волновые процессы являются источником многих далеко не тривиальных проблем математической физики. Развитие ряда разделов чистой математики было стимулировано изучением взаимодействия различных типов волн. В настоящее время изучение волновых явлений вызвало бурный расцвет метода обратной задачи рассеяния и ряда связанных с ним разделов математики (теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, теория функций комплексного переменного, алгебраическая и риманова геометрии и т.д.) В настоящем докладе мы коснёмся нескольких проблем, возникающих при описании взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу.

Исходным пунктом наших рассмотрений послужит система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2+c_1\frac{\partial}{\partial y}|\varphi|^2=0,\\ i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+c_3|\varphi|^2\varphi,\end{gathered}\qquad(1)$$

где u – амплитуда длинной волны, φ – комплексная огибающая пакета коротких волн, параметры c, $\varkappa$, c_1, c_2, c_3 могут принимать только вещественные значения, причем $\varkappa^2=1$. Эта система является естественным обобщением известных систем, используемых для изучения взаимодействия длинной волны с пакетом коротких волн на оси x /1,2/. Она пригодна для описания взаимодействия ионно-звуковых и ленгмюровских волн в плазме или поверхностных (например, капиллярных) и внутренних (например, гравитационных) волн в жидкости. Она применима также для изучения взаимодействия внутримолекулярных возбуждений с акустическими фононами в тонких пленках.

В известных случаях, например при наличии сильного однородного магнитного поля в плазме или постоянного сильного ветра, дующего в заданном направлении, можно предположить, что пакет коротких волн является квазиодномерным. Считая направление оси x совпадающим с направлением магнитного поля (или направлением ветра), мы можем сделанное выше предположение заменить требованием малости параметров c_1 и c_2. Кроме того, предположим, что параметр c_3 также мал. В предельном случае $c_1=c_2=c_3=0$ мы получаем существенно более простую систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad(2)$$

которая допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния, берущего начало в пионерской работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры /3/.

Заменим, наконец, в решении системы (2) координату x на $x-cy$, т.е. положим

$$v(x,y,t)=u(x-cy,y,t),\ \psi(x,y,t)=\varphi(x-cy,y,t).$$

Нетрудно видеть, что в силу (2) функции $v(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2=0,\quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}=v\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.\qquad(3)$$

Эта система описывает довольно богатую динамику волн, речь о которой пойдет ниже.

§ 1. Односолитонное решение системы (3)

Система (3) обладает односолитонным решением вида

$$\begin{gathered}v=\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta]},\\ \psi=c\,\frac{\exp[i\nu x+i\tau y-i(\mu^2-\nu^2)t]}{\operatorname{ch}[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta]},\end{gathered}\qquad(4)$$

где вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина c удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu-\sigma)\mu^2+\varkappa|c|^2=0,\qquad(5)$$

а параметры δ, τ и $\arg c$ принимают произвольные вещественные значения. Из равенства (5) следует, что для существования решений вида (4) необходимо выполнение условия $(\sigma-\nu)\varkappa\geq 0$. Параметры δ и $\arg c$ определяют положение решения (4) в пространстве-времени и при $\mu^2+\nu^2>0$ с помощью замены $x\to x+x_0$, $t\to t+t_0$ могут быть сделаны произвольными, например равными нулю. Заслуживают упоминания два частных случая решения (4). Первый случай соответствует $\sigma=\tau=0$. В этом случае решение (4) не зависит от y, т.е.

$$v=\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2[\mu(x+2\nu t)+\delta]},\ \psi=c\,\frac{\exp[i\nu x-i(\mu^2-\nu^2)t]}{\operatorname{ch}[\mu(x+2\nu t)+\delta]}.\qquad(6)$$

Из равенства (5) следует, что эти решения возможны только при $\varkappa\nu<0$, т.е. определяемые с помощью (6) волны могут распространяться только в одном направлении. Второй случай соответствует $\sigma=\nu$, $c=0$ и являетсяся довольно тривиальным:

$$v = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu x + 2\mu\nu(y+t) + \delta]}, \quad \psi = 0. \tag{7}$$

Это решение является весьма частным случаем решений вида

$$v = f(x, y+t), \quad \psi = 0, \tag{8}$$

где f – произвольная гладкая функция двух переменных. В то время как решение (7) обладает всеми свойствами солитонных решений, решение (8) таковым является далеко не всегда. Ниже будут указаны другие случаи решений вида (8), обладающих свойствами солитонных решений. Эти решения возникают при изучении взаимодействия солитонов вида (4).

Решение (4) допускает представление

$$v = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D; \quad \psi = \frac{\Psi}{D}, \tag{9}$$

если положить

$$D = 1 + \alpha\exp[2\mu(x + 2\sigma y + 2\nu t)],$$

$$\Psi = 2a\exp[\mu(x+2\sigma y+2\nu t) + i\nu x + i\tau y - i(\mu^2-\nu^2)t]. \tag{I0}$$

При этом между параметрами c, δ, с одной стороны, и параметрами α, a, с другой стороны, существует связь

$$\alpha = \exp(2\delta), \quad a = c\exp(\delta). \tag{II}$$

Отсюда согласно (5) вытекает, что параметры α и a должны удовлетворять соотношению

$$\alpha = \frac{\varkappa|a|^2}{2(\sigma-\nu)\mu^2}.$$

Далее, заметим, что при изучении взаимодействия солитонов (4) важную роль играют комплексные параметры

$$\omega = \mu + i\nu, \quad \rho^2 = \tau + 2i\mu\sigma + \bar{\omega}^2,$$

где черта, как и всюду в дальнейшем, означает комплексное сопряжение. Нетрудно видеть, что решение вида (6) соответствует случаю $\rho^2 = \bar{\omega}^2$, а решение вида (7) соответствует случаю $\rho^2 = \bar{\rho}^2$.

§ 2. Взаимодействие двух солитонов

При изучении взаимодействия двух солитонов вида (4) мы воспользуемся представлением (9) с функциями D и Ψ вида

$$D = 1 + \alpha_1\exp[2\mu_1(x + 2\sigma_1 y + 2\nu_1 t)] +$$

$$\begin{aligned} &+ \alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)] + \\ &+ 2\beta_0\exp[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t) + \mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)]\cos\theta + \\ &+ \gamma_0\exp[2\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t) + 2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)], \end{aligned} \tag{I2}$$

$$\begin{aligned} \Psi = {} & 2a_1\{1 + \beta_2\exp[2\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)]\} \times \\ & \times \exp[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t) + i\nu_1 x + i\tau_1 y - i(\mu_1^2+\nu_1^2)t] + \\ & + 2a_2\{1 + \beta_1\exp[2\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)]\} \times \\ & \times \exp[\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t) + i\nu_2 x + i\tau_2 y - i(\mu_2^2-\nu_2^2)t], \end{aligned} \tag{I3}$$

где $\omega_1 = \mu_1 + i\nu_1, \quad \omega_2 = \mu_2 + i\nu_2,$

$$\begin{aligned} &\rho_1^2 = \tau_1 + 2i\mu_1\sigma_1 + \bar{\omega}_1^2, \quad \rho_2^2 = \tau_2 + 2i\mu_2\sigma_2 + \bar{\omega}_2^2, \\ &\alpha_1 = \frac{\varkappa|a_1|^2}{2(\sigma_1-\nu_1)\mu_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\varkappa|a_2|^2}{2(\sigma_2-\nu_2)\mu_2^2}, \\ &\beta_0^2 = \frac{|\omega_1+\bar{\omega}_1||\omega_2+\bar{\omega}_2||\rho_1^2-\bar{\rho}_1^2||\rho_2^2-\bar{\rho}_2^2|}{|\omega_1+\bar{\omega}_2|^2|\rho_1^2-\bar{\rho}_2^2|^2}|\alpha_1\alpha_2|, \\ &\gamma_0 = \alpha_1\alpha_2\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar{\omega}_2}\right|^2\left|\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\rho_1^2-\bar{\rho}_2^2}\right|^2, \\ &\beta_1 = \alpha_1\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\bar{\omega}_1}\,\frac{\bar{\rho}_2^2-\bar{\rho}_1^2}{\bar{\rho}_2^2-\rho_1^2}, \quad \beta_2 = \alpha_2\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar{\omega}_2}\,\frac{\bar{\rho}_1^2-\bar{\rho}_2^2}{\bar{\rho}_1^2-\rho_2^2}, \\ &\theta = (\nu_1-\nu_2)x + (\tau_1-\tau_2)y - (\mu_1^2-\nu_1^2-\mu_2^2+\nu_2^2)t + \theta_0. \end{aligned} \tag{I4}$$

Согласно результатам работы /4/ определенные посредством (9) и (I2)-(I4) функции v и ψ удовлетворяют системе (3), т.е. являются её решением. Далее, нетрудно убедиться, что если выполнены условия

$$(\sigma_1-\nu_1)\varkappa > 0, \quad (\sigma_2-\nu_2)\varkappa > 0, \tag{I5}$$

$$|\omega_1+\bar\omega_1||\omega_2+\bar\omega_2||\rho_1^2-\bar\rho_1^{\,2}||\rho_2^2-\bar\rho_2^{\,2}|\le|\omega_1+\bar\omega_2|^2|\rho_1^2-\bar\rho_2^{\,2}|^2, \tag{16}$$

то имеем $\alpha_1\ge 0,\ \alpha_2\ge 0,\ 0\le\beta_0^2\le\alpha_1\alpha_2,\ \gamma_0\ge 0$, и, следовательно, при любых вещественных значениях x, y, t справедливо неравенство $D\geqslant 1$. Это значит, что при выполнении условий (15) и (16) указанное выше решение системы (3) не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t. Заметим, кстати, что в силу (15) неравенство (16) будет заведомо удовлетворено, если дополнительно потребовать выполнения условия $\mu_1\mu_2>0$. Действительно, в этом случае справедливы неравенства

$$|\omega_1+\bar\omega_1||\omega_2+\bar\omega_2|\le|\omega_1+\bar\omega_2|^2,\quad |\rho_1^2-\bar\rho_1^2||\rho_2^2-\bar\rho_2^2|\le|\rho_1^2-\bar\rho_2^{\,2}|,$$

из которых очевидным образом вытекает (16).

Выясним теперь, каково поведение у этого решения. Пользуясь общими формулами, полученными в работе /5/, легко находим, что если параметры ω_1, ρ_1^2, относящиеся к одному солитону, и параметры ω_2, ρ_2^2, относящиеся к другому солитону, удовлетворяют условию $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)\ne 0$, то рассматриваемое нами решение имеет следующие три типа поведения.

1) В том случае, когда параметры σ_1 и σ_2 этих солитонов не равны между собой, рассматриваемое нами решение описывает взаимодействие двух солитонов вида (4), распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению обоих солитонов в области взаимодействия. Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любого из солитонов искажение этого солитона стремится к нулю и на бесконечности остаются только фазовые сдвиги, т.е. величины δ_1, $\arg c_1$, относящиеся к первому солитону, и величины δ_2, $\arg c_2$, относящиеся ко второму солитону, принимают разные значения в зависимости от того, в каком направлении от области взаимодействия мы будем двигаться в бесконечность вдоль гребня рассматриваемого солитона.

2) Далее, в том случае, когда $\sigma_1=\sigma_2$, но $\nu_1\ne\nu_2$, оба солитона движутся вдоль одной и той же прямой. Их взаимодействие ограничено во времени и стремится к нулю при $t\to\pm\infty$. Это приводит к сильному искажению обоих солитонов на протяжении некоторого ограниченного промежутка времени, однако при $t\to\pm\infty$ искажение обоих солитонов стремится к нулю. Результат взаимодействия солитонов выражается только в том, что величины δ_1, $\arg c_1$ у первого солитона и величины δ_2, $\arg c_2$ у второго солитона имеют разные значения до взаимодействия и после взаимодействия.

3) Наконец, в случае $\sigma_1=\sigma_2$, $\nu_1=\nu_2$ два солитона образуют одну уединенную волну, которая движется как одно целое. При этом получившаяся уединенная волна осциллирует.

Таким образом, в случае, когда выполняется неравенство $(\omega_1-\omega_2)\times(\rho_1^2-\rho_2^2)\ne 0$, взаимодействие обоих солитонов носит упругий характер.

§ 3. Гашение солитонов

Ситуация меняется коренным образом, если $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$. В этом случае при $\sigma_1\ne\sigma_2$ взаимодействие двух солитонов вида (4) приводит к тому, что помимо области взаимодействия, в которой искажение обоих солитонов значительно, искажение будет также значительным в той части каждого из солитонов, которая уже провзаимодействовала с другим солитоном и находится далеко от области взаимодействия. Кроме того, в этом случае возможно появление дополнительной волны, имеющей отличную от (4) структуру. Действительно, согласно (10)-(14) при любом фиксированном t в той части окрестности прямой $x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t=0$, которая лежит в области $\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)\gg 1$, справедлива нулевая асимптотика, а в части окрестности этой же прямой, лежащей в области $\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)\ll -1$, справедлива асимптотика

$$v\sim\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)+\delta_1]},\qquad \psi\sim c_1\frac{\exp[i\nu_1 x+i\tau_1 y-i(\mu_1^2-\nu_1^2)t]}{ch[\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)+\delta_1]}, \tag{17}$$

где

$$\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1,\quad c_1=a_1\exp(-\delta_1).$$

Далее, при любом фиксированном t в той части окрестности прямой $x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t=0$, которая лежит в области $\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)\gg 1$, также справедлива нулевая асимптотика, а в той части окрестности этой прямой, которая лежит в области $\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)\ll -1$, справедлива асимптотика

$$v\sim\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)+\delta_2]},\qquad \psi\sim c_2\frac{\exp[i\nu_2 x+i\tau_2 y-i(\mu_2^2-\nu_2^2)t]}{ch[\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)+\delta_2]}, \tag{18}$$

где
$$\delta_2 = \frac{1}{2} \ln \alpha_2, \quad c_2 = a_2 \exp(-\delta_2).$$
При этом согласно (I4) справедливы равенства
$$\varkappa |c_1|^2 = 2(\sigma_1 - \nu_1)\mu_1^2, \quad \varkappa |c_2|^2 = 2(\sigma_2 - \nu_2)\mu_2^2.$$
Таким образом, если мы устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t)+\delta_1=0$, то обнаружим, что при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2>0$ наше решение имеет нулевую асимптотику, если $y \to \infty$, а если $y \to -\infty$, то справедлива асимптотика (I7). Наоборот, если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2<0$, то, устремляясь в бесконечность вдоль этой же прямой, мы видим, что при $y \to \infty$ наше решение обладает асимптотикой (I7), а при $y \to -\infty$ справедлива нулевая асимптотика. Аналогичным образом, устремляясь на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t)+\delta_2=0$, легко находим, что при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$ наше решение имеет нулевую асимптотику, если $y \to \infty$, а если $y \to -\infty$, то справедлива асимптотика (I8). Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_2<0$, то, устремляясь в бесконечность вдоль только что упомянутой прямой, мы видим, что при $y \to \infty$ наше решение обладает асимптотикой (I8), а при $y \to -\infty$ справедлива нулевая асимптотика.

Выясним теперь, каково расположение асимптотик (I7) и (I8) на плоскости x, y. В силу (I4) из равенства $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$ следует, что $(\mu_1-\mu_2)[(\sigma_1-\nu_1)\mu_1-(\sigma_2-\nu_2)\mu_2]=0$. С учетом неравенства $\mu_1^2\mu_2^2(\sigma_1-\nu_1)\times(\sigma_2-\nu_2)>0$ отсюда следует, что $\mu_1\mu_2>0$ и $(\sigma_1-\nu_1)(\sigma_2-\nu_2)\mu_1\mu_2>0$. Эти неравенства гарантируют выполнение условия (I6), т.е. рассматриваемое нами решение действительно не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t. Кроме того, на основании неравенства $\mu_1\mu_2>0$ из неравенства $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$ следует неравенство $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2<0$. Это значит, что если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при
$$y \gg \frac{\mu_2\delta_1-\mu_1\delta_2-\mu_1}{2(\sigma_2-\sigma_1)\mu_1\mu_2} - \frac{\nu_2-\nu_1}{\sigma_2-\sigma_1}t,$$
справедлива асимптотика (I7), а в нижней полуплоскости, т.е. при
$$y \ll \frac{\mu_1\delta_2-\mu_2\delta_1-\mu_2}{2(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1\mu_2} - \frac{\nu_1-\nu_2}{\sigma_1-\sigma_2}t,$$
имеет место асимптотика (I8). Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1<0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при
$$y \gg \frac{\mu_1\delta_2-\mu_2\delta_1-\mu_2}{2(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1\mu_2} - \frac{\nu_1-\nu_2}{\sigma_1-\sigma_2}t,$$
расположена асимптотика (I8), а в нижней полуплоскости, т.е. при

$$y \ll \frac{\mu_2\delta_1-\mu_1\delta_2-\mu_1}{2(\sigma_2-\sigma_1)\mu_1\mu_2} - \frac{\nu_2-\nu_1}{\sigma_2-\sigma_1}t,$$
выполняется асимптотика (I7). Таким образом, ненулевые асимптотики обоих солитонов всегда расположены по разные стороны от некоторой прямой, параллельной оси x.

Здесь необходимо отметить следующее. Если $\omega_1=\omega_2$, то с помощью (I4) получаем, что $\rho_1^2-\rho_2^2=\tau_1-\tau_2+2i(\sigma_1-\sigma_2)\mu$, где $\mu=\mu_1=\mu_2$, и на основе неравенства $\sigma_1 \neq \sigma_2$ находим, что $\rho_1^2 \neq \rho_2^2$. Если же $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\rho_1^2=\rho_2^2$. Имеется важное различие между случаем $\omega_1=\omega_2$ и случаем $\omega_1 \neq \omega_2$. Дело в том, что при $\omega_1=\omega_2$ соотношения (I7) и (I8) определяют все нетривиальные асимптотики нашего решения. Оказывается, что при $\mu_1 \neq \mu_2$ существует ещё одно направление, в окрестности которого наше решение обладает ненулевой асимптотикой. Оно расположено в области, определяемой неравенствами $\mu_1(x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t) \gg 1$ и $\mu_2(x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t) \gg 1$. Находится оно следующим образом. С учетом равенства $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$ запишем функции D и Ψ в виде
$$\begin{aligned} D = 1 &+ \alpha_1 \exp[2\mu_1(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[4(\sigma_1-\sigma)\mu_1 y+4(\nu_1-\nu)\mu_1 t] + \\ &+ \alpha_2 \exp[2\mu_2(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[4(\sigma_2-\sigma)\mu_2 y+4(\nu_2-\nu)\mu_2 t] + \\ &+ 2\beta_0 \exp[(\mu_1+\mu_2)(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[2(\mu_1\sigma_1+\mu_2\sigma_2-\mu_1\sigma- \\ &-\mu_2\sigma)y+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2-\mu_1\nu-\mu_2\nu)t]\cos\theta, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \Psi &= 2a_1 \exp[\mu_1(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[2(\sigma_1-\sigma)\mu_1 y+2(\nu_1-\nu)\mu_1 t] \times \\ &\times \exp[i\nu_1 x+i\tau_1 y-i(\mu_1^2-\nu_1^2)t] + \\ &+ 2a_2 \exp[\mu_2(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[2(\sigma_2-\sigma)\mu_2 y+2(\nu_2-\nu)\mu_2 t] \times \\ &\times \exp[i\nu_2 x+i\tau_2 y-i(\mu_2^2-\nu_2^2)t]. \end{aligned}$$
Положим теперь в этих равенствах
$$\nu = \frac{\mu_1\nu_1-\mu_2\nu_2}{\mu_1-\mu_2}, \quad \sigma = \frac{\mu_1\sigma_1-\mu_2\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}. \qquad (19)$$
В результате выражения для функций D и Ψ примут вид
$$D = 1 + D_0 \exp\left(-4\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 y - 4\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 t\right), \qquad (20)$$
$$\Psi = \Psi_0 \exp\left(-2\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 y - 2\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 t\right),$$
где

$$D_0=\alpha_1\exp[2\mu_1(x+2\sigma y+2\nu t)]+\alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\sigma y+2\nu t)]+$$
$$+2\beta_0\exp[(\mu_1+\mu_2)(x+2\sigma y+2\nu t)]\cos\theta,$$
$$\Psi_0=2a_1\exp[\mu_1(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[i\nu_1 x+i\tau_1 y-i(\mu_1^2-\nu_1^2)t]+ \tag{2I}$$
$$+2a_2\exp[\mu_2(x+2\sigma y+2\nu t)]\exp[i\nu_2 x+i\tau_2 y-i(\mu_2^2-\nu_2^2)t].$$

Отсюда следует, что в окрестности прямой $x+2\sigma y+2\nu t+\delta=0$, где $\delta=\frac{\delta_1-\delta_2}{\mu_1-\mu_2}$, наше решение при $(\mu_1-\mu_2)(\sigma_1-\sigma_2)<0$ обладает нулевой асимптотикой, если $y\to-\infty$, а если $y\to\infty$, то справедлива асимптотика

$$v\sim 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_0,\quad \psi\sim 0. \tag{22}$$

Наоборот, если $(\mu_1-\mu_2)(\sigma_1-\sigma_2)>0$, то при $y\to\infty$ справедлива нулевая асимптотика, а при $y\to-\infty$ имеет место асимптотика (22).

Согласно (I4) равенство $\rho_1^2=\rho_2^2$ эквивалентно двум равенствам

$$(\sigma_1-\nu_1)\mu_1=(\sigma_2-\nu_2)\mu_2,\quad \tau_1+\mu_1^2-\nu_1^2=\tau_2+\mu_2^2-\nu_2^2.$$

На основании первого из этих равенств с учётом (I9) получаем, что $\sigma=\nu$, а из второго равенства в силу (I4) вытекает, что

$$\theta=(\nu_1-\nu_2)x+(\tau_1-\tau_2)(y+t)+\theta_0.$$

Таким образом, определенная посредством (I9) и (2I) функция D_0 зависит только от x и $y+t$, т.е. определяет решение системы (3) вида (8). Оно является солитоном. Позже мы детально рассмотрим взаимодействие этого солитона с солитоном вида (4), а сейчас отметим один важный факт. Решение

$$v=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_0,\quad \psi=0$$

является уединенной волной, амплитуда которой стремится к нулю при $x+2\nu(y+t)\to\pm\infty$. Кроме того, эта волна обладает периодической модуляцией. Условием этого является отличие от нуля определителя матрицы

$$\Gamma=\begin{vmatrix}1 & 2\nu\\ \nu_1-\nu_2 & \tau_1-\tau_2\end{vmatrix}.$$

Как нетрудно убедиться, справедливо равенство

$$\det\Gamma=-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left[(\mu_1-\mu_2)^2+(\nu_1-\nu_2)^2\right],$$

из которого следует, что в рассматриваемом случае, т.е. при $\mu_1\neq\mu_2$ и $\mu_1\mu_2>0$, справедливо неравенство $\det\Gamma\neq 0$.

Выясним теперь расположение третьей нетривиальной асимптотики (22) относительно первых двух. С этой целью положим

$$r=\mathrm{sign}[(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1],\quad s=\mathrm{sign}[(\mu_1-\mu_2)(\sigma_1-\sigma_2)].$$

Возьмем, далее, векторы

$$\ell_1=(-2r\sigma_1,\ r),\quad \ell_2=(2r\sigma_2,\ -r),\quad \ell=(2s\sigma,\ -s),$$

определяющие соответственно направления, вдоль которых справедливы нетривиальные асимптотики (I7), (I8), (22). Пусть ε - угол, на который нужно повернуть вектор ℓ_1 для того, чтобы он совпал с вектором ℓ_2. В силу неравенства $\sigma_1\neq\sigma_2$ имеем $-\pi<\varepsilon<\pi$, причем $\varepsilon\neq 0$. Пусть, далее, ε_1 - угол, на который нужно повернуть вектор ℓ, чтобы он совпал с вектором ℓ_1, а ε_2 - угол, на который нужно повернуть вектор ℓ_2, чтобы он совпал с вектором ℓ. Справедливы равенства

$$|\ell_1||\ell_2|\sin\varepsilon=\det\begin{vmatrix}-2\sigma_1 & 1\\ 2\sigma_2 & -1\end{vmatrix}=2(\sigma_1-\sigma_2),$$

$$|\ell||\ell_1|\sin\varepsilon_1=\det\begin{vmatrix}2s\sigma & -s\\ -2r\sigma_1 & r\end{vmatrix}=\frac{2\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(\sigma_1-\sigma_2)rs,$$

$$|\ell||\ell_2|\sin\varepsilon_2=\det\begin{vmatrix}2r\sigma_2 & -r\\ 2s\sigma & -s\end{vmatrix}=\frac{2\mu_1}{\mu_1-\mu_2}(\sigma_1-\sigma_2)rs,$$

где $|\ell|$, $|\ell_1|$ и $|\ell_2|$ - соответственно длина вектора ℓ, ℓ_1 и ℓ_2. По определению имеем

$$rs=\mathrm{sign}[(\mu_1-\mu_2)\mu_1]=\mathrm{sign}[(\mu_1-\mu_2)\mu_2].$$

Отсюда следует, что все три величины $\sin\varepsilon$, $\sin\varepsilon_1$ и $\sin\varepsilon_2$ имеют одинаковый знак. Это возможно, если только вектор ℓ лежит вне угла ε. Далее справедливы неравенства $0<\varepsilon_1<\pi$, $0<\varepsilon_2<\pi$, если $0<\varepsilon<\pi$, а если $-\pi<\varepsilon<0$, то $-\pi<\varepsilon_1<0$, $-\pi<\varepsilon_2<0$.

§ 4. Распад и слияние солитонов

Рассмотрим, наконец, случай, когда $(\omega_1-\omega_2)(\rho_1^2-\rho_2^2)=0$, $\sigma_1=\sigma_2$, а $\nu_1\neq\nu_2$. Это возможно только при $\rho_1^2=\rho_2^2$. Положим $\sigma=\sigma_1=\sigma_2$. Тогда при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится бегущая волна вида

$$v=\frac{2\mu_1^2}{\mathrm{ch}^2[\mu_1(x+2\sigma y+2\nu_1 t)+\delta_1]},$$

$$\psi = c_1 \frac{\exp[i\nu_1 x + i\tau_1 y - i(\mu_1^2 - \nu_1^2)t]}{ch[\mu_1(x+2\sigma y + 2\nu_1 t) + \delta_1]}, \qquad (23)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\ln \alpha_1, \quad c_1 = a_1 \exp(-\delta_1),$$

а при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 < 0$ эта волна появится при $t \to \infty$. Далее, при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 > 0$ и $t \to -\infty$ в нашем решении образуется вторая бегущая волна вида

$$v = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\sigma y+2\nu_2 t)+\delta_2]}, \qquad (24)$$

$$\psi = c_2 \frac{\exp[i\nu_2 x + i\tau_2 y - i(\mu_2^2-\nu_2^2)t]}{ch[\mu_2(x+2\sigma y+2\nu_2 t)+\delta_2]},$$

где

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\ln\alpha_2, \quad c_2 = a_2\exp(-\delta_2),$$

а при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 < 0$ эта волна сформируется при $t\to\infty$. В силу неравенства $\mu_1\mu_2 > 0$ отсюда следует, что если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 > 0$, то при $t\to-\infty$ в нашем решении имеется волна (23), а при $t\to\infty$ в нашем решении появится волна (24). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 < 0$, то при $t\to-\infty$ в нашем решении содержится волна (24), а при $t\to\infty$ в нашем решении образуется волна (23).

Здесь необходимо отметить следующее. В силу равенств $\rho_1^2=\rho_2^2$ и $\sigma_1=\sigma_2$ имеем

$$\tau_1+\mu_1^2-\nu_1^2 = \tau_2+\mu_2^2-\nu_2^2, \quad (\sigma-\nu_1)\mu_1 = (\sigma-\nu_2)\mu_2. \qquad (25)$$

Далее, справедливы равенства

$$\varkappa|c_1|^2 = 2(\sigma-\nu_1)\mu_1^2, \quad \varkappa|c_2|^2 = 2(\sigma-\nu_2)\mu_2^2. \qquad (26)$$

Отсюда вытекает, что при $\nu_1\neq\nu_2$ имеем $\mu_1\neq\mu_2$. Это значит, что в нашем решении содержится ещё одна бегущая волна. Эта волна находится следующим образом. Согласно (20) при $\sigma_1=\sigma_2$ функции D и Ψ имеют вид

$$D = 1 + D_0\exp\left(-4\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 t\right),$$

$$\Psi = \Psi_0\exp\left(-2\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu_1-\mu_2}\mu_1\mu_2 t\right),$$

где функции D_0 и Ψ_0 определены посредством равенств (2I). На основании этих равенств получаем, что если $(\mu_1-\mu_2)(\nu_1-\nu_2) > 0$, то при $t\to-\infty$ в нашем решении содержится третья бегущая волна

$$v = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_0, \quad \psi = 0, \qquad (27)$$

а при $(\mu_1-\mu_2)(\nu_1-\nu_2) < 0$ эта волна появится при $t\to\infty$.

Выясним теперь, в каком порядке появляются волны (23),(24),(27). С этой целью перепишем равенства (26) в виде

$$\nu_1 = \sigma - \frac{\alpha}{\mu_1}, \quad \nu_2 = \sigma - \frac{\alpha}{\mu_2}, \qquad (28)$$

где в силу (25) имеем

$$\alpha = \frac{\varkappa|c_1|^2}{2\mu_1} = \frac{\varkappa|c_2|^2}{2\mu_2}. \qquad (29)$$

Согласно (28) имеем

$$\nu_1-\nu_2 = \alpha\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1\mu_2}, \qquad (30)$$

т.е. знак произведения $(\mu_1-\mu_2)(\nu_1-\nu_2)$ совпадает со знаком величины α.

Рассмотрим сначала случай $\varkappa\mu_1 < 0$, $\varkappa\mu_2 < 0$. Будем считать для определенности, что $\varkappa\mu_1 < \varkappa\mu_2 < 0$. С учетом (29) получаем, что $\alpha < 0$, и, следовательно, волна (27) появится при $t\to\infty$. Далее, на основании (30) находим, что $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 < 0$, а $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 > 0$. Это значит, что волна (23) появится при $t\to-\infty$, а волна (24) появится при $t\to\infty$. Таким образом, в рассматриваемом нами случае наше решение описывает распад волны (23) на две волны (24) и (27). При этом в зависимости от значения величины σ могут быть следующие четыре возможности.

I) Если $\varkappa\sigma < 0$, то в силу (28) справедливы неравенства $\varkappa\nu_1 < 0$ и $\varkappa\nu_2 < 0$. Это значит, что три волны движутся в одном и том же направлении.

2) Если $0 < \varkappa\sigma < \varkappa\alpha\mu_1^{-1}$, то с учётом (28) получаем, что $\varkappa\nu_1 < 0$ и $\varkappa\nu_2 < 0$. Отсюда следует, что образовавшиеся в результате распада волны (23) две волны (24) и (27) движутся в прямо противоположных направлениях, причем направление движения волны (24) совпадает с направлением движения волны (23).

3) Если $\varkappa\alpha\mu_1^{-1} < \varkappa\sigma < \varkappa\alpha\mu_2^{-1}$, то с помощью (28) находим, что $\varkappa\nu_1 > 0$, а $\varkappa\nu_2 < 0$. Таким образом, образовавшиеся в результате распада волны (23) две волны (24) и (27) движутся в прямо противоположных направлениях, причем на этот раз с направлением движения волны (23) совпадает направление движения волны (27), а волна (24) движется в прямо противоположном направлении.

4) Наконец, если $\varkappa\sigma > \varkappa\alpha\mu_2^{-1}$, то на основании (28) имеем $\varkappa\nu_1 > 0$ и $\varkappa\nu_2 > 0$, т.е. все три волны снова движутся в одном и том же направлении.

Рассмотрим теперь случай $\varkappa\mu_1>0$, $\varkappa\mu_2>0$. Будем считать для определенности, что $0<\varkappa\mu_1<\varkappa\mu_2$. Согласно (29) на этот раз имеем $\alpha>0$, и, следовательно, волна (27) образуется при $t\to-\infty$. Далее, на основании (30) получаем, что $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$, а $(\nu_1-\nu_2)\mu_1<0$. Это значит, что волна (23) возникает при $t\to-\infty$, а волна (24) появится при $t\to\infty$. Таким образом, в рассматриваемом сейчас случае наше решение описывает слияние двух волн (23) и (27) в одну волну (24). При этом в зависимости от значения величины σ могут иметь место следующие четыре случая.

1) Если $\varkappa\sigma<0$, то в силу (28) справедливы неравенства $\varkappa\nu_1<0$ и $\varkappa\nu_2<0$. Это значит, что все три волны движутся в одном и том же направлении.

2) Если $0<\varkappa\sigma<\varkappa\alpha\mu_2^{-1}$, то с учётом (28) получаем, что $\varkappa\nu_1<0$ и $\varkappa\nu_2<0$. Отсюда следует, что волны (23) и (27) движутся навстречу друг другу, а образовавшаяся в результате слияния этих волн волна (24) движется в том же направлении, что и волна (23).

3) Если $\varkappa\alpha\mu_2^{-1}<\varkappa\sigma<\varkappa\alpha\mu_1^{-1}$, то с помощью (28) находим, что $\varkappa\nu_1<0$, а $\varkappa\nu_2>0$. Таким образом, волны (23) и (27) снова движутся навстречу друг другу, а образовавшаяся в результате слияния этих волн волна (24) движется в том же направлении, что и волна (27).

4) Наконец, если $\varkappa\sigma>\varkappa\alpha\mu_1^{-1}$, то на основании (28) имеем $\varkappa\nu_1>0$ и $\varkappa\nu_2>0$, т.е. все три волны снова движутся в одном и том же направлении.

Приведенный выше перечень вариантов будет неполным, если не упоминать, хотя бы кратко, случаи $\sigma=0$, $\sigma=\alpha\mu_1^{-1}$ и $\sigma=\alpha\mu_2^{-1}$. Характерной чертой всех этих случаев будет равенство нулю фазовой скорости одной из трех волн (23), (24) или (27). Именно, если $\sigma=0$, то равна нулю фазовая скорость волны (27), если $\sigma=\alpha\mu_1^{-1}$, то равна нулю фазовая скорость волны (23), и, наконец, если $\sigma=\alpha\mu_2^{-1}$, то равна нулю фазовая скорость волны (24). Таким образом, при $\varkappa\mu_1<\varkappa\mu_2<0$ стационарная волна (23) распадается на две бегущие в противоположных направлениях волны (24) и (27), если $\sigma=\alpha\mu_1^{-1}$, а если $\sigma=0$ или $\sigma=\alpha\mu_2^{-1}$, то бегущая волна (23) распадается на бегущую в том же самом направлении волну и стационарную волну. Наоборот, при $0<\varkappa\mu_1<\varkappa\mu_2$ две бегущие навстречу друг другу волны (23) и (27) сливаются в одну стационарную волну (24), если $\sigma=\alpha\mu_2^{-1}$, а если $\sigma=0$ или $\sigma=\alpha\mu_1^{-1}$, то бегущая волна, слившись со стационарной волной, образует бегущую в том же самом направлении волну (24).

§ 5. Взаимодействие солитона (4) с волной (27)

В двух предыдущих параграфах уже фигурировали уединенные волны вида (8), имеющие отличную от (4) структуру. В этом параграфе мы

рассмотрим взаимодействие солитона (4) с такой волной. Мы убедимся, что упомянутые выше волны обладают всеми свойствами солитонных решений. Мы покажем, что в случае общего положения солитон (4) взаимодействует упруго с уединенной волной (27), а при специальном выборе параметров имеет место гашение, распад и слияние волн, аналогичные описанным выше.

С этой целью возьмем функции D и Ψ вида

$$D=1+2\beta_0\exp[(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\cos\theta+$$
$$+\alpha_0\exp[2(\mu_1+\mu_2)x+4(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]+ \qquad (31)$$
$$+\{\alpha+2\beta_1\exp[(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\cos(\theta+\hat{\theta}_0)+$$
$$+\gamma_0\exp[2(\mu_1+\mu_2)x+4(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\}\exp[2\mu(x+2\sigma y+2\nu t)],$$

$$\Psi=2a\exp[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+i\nu x+i\tau y-i(\mu^2-\nu^2)t]\times$$
$$\times\{1+[\eta_1\exp(i\theta)+\eta_2\exp(-i\theta)]\exp[(\mu_1+\mu_2)x+ \qquad (32)$$
$$+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]+$$
$$+\gamma_1\exp[2(\mu_1+\mu_2)x+4(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\},$$

где $\omega=\mu+i\nu$, $\omega_1=\mu_1+i\nu_1$, $\omega_2=\mu_2+i\nu_2$,

$$\alpha_0=-\beta_0^2\frac{|\omega_1-\omega_2|^2}{(\omega_1+\bar{\omega}_1)(\omega_2+\bar{\omega}_2)},\quad \alpha=\frac{\varkappa|a|^2}{2(\sigma-\nu)\mu^2},$$

$$\beta_1=\alpha\beta_0\left|\frac{\omega_1-\omega}{\omega_1+\bar{\omega}}\right|\left|\frac{\omega_2-\omega}{\omega_2+\bar{\omega}}\right|,\ \gamma_0=\alpha\alpha_0\left|\frac{\omega_1-\omega}{\omega_1+\bar{\omega}}\right|^2\left|\frac{\omega_2-\omega}{\omega_2+\bar{\omega}}\right|^2, \qquad (33)$$

$$\theta=(\nu_1-\nu_2)x-(\mu_1^2-\nu_1^2-\mu_2^2+\nu_2^2)(y+t)+\theta_0,$$

$$\eta_1=\beta_0\frac{\omega-\omega_1}{\omega+\bar{\omega}_2},\ \eta_2=\beta_0\frac{\omega-\omega_2}{\omega+\bar{\omega}_1},\ \gamma_1=\alpha_0\frac{\omega-\omega_1}{\omega+\bar{\omega}_2}\ \frac{\omega-\omega_2}{\omega+\bar{\omega}_1}.$$

Из результатов работы /4/ следует, что при таком выборе функций D и Ψ

определяемые с их помощью согласно (9) функции v и ψ удовлетворяют системе (3). Если на входящие в (31)-(33) параметры наложить дополнительные требования

$$(\sigma-\nu)\varkappa>0\ ,\quad \frac{|\omega_1-\omega_2|^2}{(\omega_1+\bar\omega_1)(\omega_2+\bar\omega_2)}<-1\ , \tag{34}$$

то при любых вещественных значениях x, y, t будет выполняться неравенство $D>0$, и, следовательно, интересующее нас в настоящее время решение не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат x, y, t. Заметим, что для справедливости второго из условий (34) необходимо выполнение неравенства $\mu_1\mu_2<0$.

Выясним теперь поведение этого решения. В типичной ситуации, т.е. когда выполнено неравенство $(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\neq 0$, рассматриваемое нами решение описывает упругое взаимодействие солитона (4) с уединенной волной (27). Проверим это сначала для случая $\sigma\neq(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(\mu_1+\mu_2)^{-1}$. Действительно, при любом фиксированном t в области $\mu(x+2\sigma y+2\nu t)\ll -1$ справедлива асимптотика

$$v\sim 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_-\ ,\quad \psi\sim 0\ , \tag{35}$$

где

$$D_-=1+2\beta_0\exp[(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\cos\theta+$$
$$+\alpha_0\exp[2(\mu_1+\mu_2)x+4(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\ ,$$

а в области $\mu(x+2\sigma y+2\nu t)\gg 1$ наше решение имеет асимптотику

$$v\sim 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_+\ ,\quad \psi\sim 0\ , \tag{36}$$

где

$$D_+=\alpha+2\beta_1\exp[(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\cos(\theta+\hat\theta_0)+$$
$$+\gamma_0\exp[2(\mu_1+\mu_2)x+4(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)]\ .$$

Далее, при любом фиксированном t в области $(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)\ll -1$ наше решение обладает асимптотикой

$$v\sim v_-=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta_-]}\ ,$$
$$\psi\sim\psi_-=c_-\frac{\exp[i\nu x+i\tau y-i(\mu^2-\nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta_-]}\ , \tag{37}$$

где

$$\delta_-=\frac{1}{2}\ln\alpha\ ,\quad c_-=a\exp(-\delta_-)\ ,$$

а в области $(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)\gg 1$ имеет место асимптотика

$$v\sim v_+=\frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta_+]}\ ,$$
$$\psi\sim\psi_+=c_+\frac{\exp[i\nu x+i\tau y-i(\mu^2-\nu^2)t]}{ch[\mu(x+2\sigma y+2\nu t)+\delta_+]}\ , \tag{38}$$

где

$$\delta_+=\frac{1}{2}(\ln\gamma_0-\ln\alpha_0)\ ,\ c_+=a\alpha_0^{-1}\gamma_1\exp(-\delta_+)\ .$$

В силу (33) справедливы равенства

$$\delta=\delta_+-\delta_-=\ln\left|\frac{\omega_1-\omega}{\omega_1+\bar\omega}\right|+\ln\left|\frac{\omega_2-\omega}{\omega_2+\bar\omega}\right|\ ,\ |c_+|=|c_-|\ .$$

Если мы теперь устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $(\mu_1+\mu_2)x+2(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)(y+t)=0$, то убедимся, что при $y\to-\infty$ справедлива асимптотика (35), а при $y\to\infty$ имеет место асимптотика (36), если $\left(\sigma-\frac{\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\mu>0$, а если $\left(\sigma-\frac{\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\mu<0$, то при $y\to-\infty$ выполняется асимптотика (36), а при $y\to\infty$ справедлива асимптотика (35). Устремляясь аналогичным образом на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $x+2\sigma y+2\nu t=0$, мы видим, что при $y\to-\infty$ имеет место асимптотика (37), а при $y\to\infty$ выполняется асимптотика (38), если $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2-(\mu_1+\mu_2)\sigma>0$, а если $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2-(\mu_1+\mu_2)\sigma<0$, то при $y\to-\infty$ справедлива асимптотика (38), а при $y\to\infty$ имеет место асимптотика (37). Отсюда следует, что взаимодействие солитона (4) с уединенной волной (27) приводит к заметному возмущению обеих волн в области взаимодействия. Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любой из волн возмущение стремится к нулю и на бесконечности остаются только фазовые сдвиги.

Аналогичное явление имеет место и в случае, когда $\sigma=\frac{\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2}{\mu_1+\mu_2}$, но $\nu\neq\sigma$. Действительно, нетрудно убедиться, что если $(\nu-\sigma)\mu>0$, то содержащаяся в нашем решении уединенная волна при $t\to-\infty$ имеет вид (35), а при $t\to\infty$ она принимает вид (36). Наоборот, если $(\nu-\sigma)\mu<0$, то при $t\to-\infty$ уединенная волна имеет вид (36), а при $t\to\infty$ она принимает вид (35). Далее, нетрудно убедиться, что если $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2-(\mu_1+\mu_2)\nu>0$, то при $t\to-\infty$ присутствующий в нашем решении солитон имеет вид (37), а при $t\to\infty$ он принимает вид (38). Наоборот, если $\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2-(\mu_1+\mu_2)\nu<0$, то при $t\to-\infty$ выполняется асимптотика (38), а при $t\to\infty$ справедлива асимптотика (37). Таким образом, взаимодействие солитона с уединенной волной в этом случае приводит к существенному искажению обеих волн в течение некоторого ограниченного промежутка времени. Однако при $t \to \pm\infty$ искажение обеих волн стремится к нулю. Результат взаимодействия выражается исключительно в фазовых сдвигах.

Поведение нашего решения меняется радикально, если $(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)=0$, т.е. когда $\omega=\omega_1$, либо $\omega=\omega_2$. Пусть $\omega=\omega_2$. Тогда при $\sigma \neq \frac{\mu\nu+\mu_1\nu_1}{\mu+\mu_1}$ будет иметь место гашение солитонов. Получающаяся при этом картина повторяет в точности ту, которая уже была проанализирована в § 3. Иначе говоря, качественное поведение нашего решения повторяет картину, уже описанную ранее, хотя эти два решения и не совпадают друг с другом.

В том случае, когда $\sigma = \frac{\mu\nu+\mu_1\nu_1}{\mu+\mu_1}$, имеет место либо распад солитона (4) на солитон (4) и уединенную волну вида (27), либо слияние солитона (4) с уединенной волной (27), в результате чего образуется солитон вида (4). Таким образом, получающаяся в этом случае картина повторяет уже рассмотренную в § 4. Однако фигурирующие здесь и там решения снова не совпадают друг с другом.

Теперь мы в состоянии сформулировать две важные чисто математические проблемы, тесно связанные со сказанным выше. Прежде всего, важно выяснить, с какими свойствами предложенного в работе /6/ для интегрирования системы (3) линейного дифференциального оператора связано столь необычное поведение солитонов. Второй вопрос относится к возможности продолжения рассмотренных здесь решений по параметрам c_1, c_2, c_3. Иными словами, речь идет о нахождении решений системы (I), которые при $c_1=c_2=c_3=0$ обращаются в рассмотренные выше. Помимо чисто математического интереса ответ на последний вопрос имеет громадное прикладное значение.

Литература

1. Benney D.J. -Stud. Appl. Math., 1977, v. 56, No I, p. 81-94.
2. Yajima N., Oikawa M. - Progr. Theor. Phys. 1976, v. 56, № 6, p. 1719-1739.
3. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. -Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095-1097.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна: ОИЯИ, 1986.
5. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-819, Дубна: ОИЯИ, 1986.
6. Mel'nikov V.K.-Let. Math. Phys., 1983, v. 7, No 2, p. 129-136.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1987 года.

Мельников В.К. Р2-87-494

Математические проблемы описания взаимодействия волн на плоскости x,y

Рассмотрена система нелинейных эволюционных уравнений, описывающая взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн на плоскости x,y. Указаны условия, при которых эта система допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния. С помощью этого метода найдено несколько типов решений, описывающих гашение волн, распад и слияние волн и т.д. На этой основе сформулированы две чисто математические проблемы, имеющие важное прикладное значение. Полученные результаты тесно связаны с рядом задач гидродинамики, физики плазмы и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-87-494

Mathematical Problems of Description of the Wave Interaction on the x,y Plane

A system of nonlinear evolution equations describing the interaction of a long wave with a short wave packet on the x,y plane is considered. Conditions are pointed out under which this system can be investigated by the inverse scattering method. This method was used to derive several types of solutions describing cancellation of waves, decay and fusion of waves, etc. This underlies two purely mathematical problems having important applications. The obtained results are relevant to the problems of hydrodynamics, plasma physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987