87-490

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-87-490

И.В.Барашенков, Б.С.Гетманов, В.Е.Ковтун*

РОЖДЕНИЕ ТАХИОНОВ В ПРОЦЕССАХ РАСПАДА СОЛИТОНОВ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Направлено в журнал "Physics Letters",
в Оргкомитет Международной рабочей группы
по нелинейным процессам, Киев, 1987

*Харьковский государственный университет

1987

I. Введение

Как было показано Лундом и Редже /I/, динамика релятивистских вихрей в сверхтекучей жидкости (или, эквивалентно, релятивистских струн, взаимодействующих посредством скалярного поля) описывается двумерной системой („$O(2)$ sine-Gordon") с лагранжианом

$$L_1 = \alpha_\eta \alpha_\xi + \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \beta_\eta \beta_\xi - \sin^2\alpha , \qquad \text{(Ia)}$$

или, в терминах полей $u_1 = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ и $u_2 = \cos\alpha \sin\beta$,

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{u_{1\xi} u_{1\eta} + u_{2\xi} u_{2\eta}}{1 - (u_1^2 + u_2^2)} + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 - 1) \qquad \text{(Iб)}$$

(здесь $2\eta = t + x$, $2\xi = t - x$ – переменные светового конуса). Позднее /2-4/ был обнаружен ряд независимых приложений модели (I), установлен факт ее интегрируемости и показано, что солитоны (I) взаимодействуют упруго /2,4,5/.

Предметом рассмотрения настоящей заметки является родственная модель – „$O(1,1)$ sine-Gordon" /7/:

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{u_{1\xi} u_{1\eta} - u_{2\xi} u_{2\eta}}{1 - (u_1^2 - u_2^2)} + \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2 - 1) . \qquad (2)$$

Очевидное сходство лагранжианов (Iб) и (2) дает все основания ожидать, что последняя система также имеет широкий диапазон приложений в теории поля. Кроме того, переход от (I) к (2), т.е. замена компактной группы симметрии $O(2)$ некомпактной $O(1,1)$, заслуживает внимания сам по себе. Ранее /8/ высказывалось предположение, что введение некомпактности должно существенно расширять спектр классических решений теоретико-полевой системы. Как будет явствовать из дальнейшего, наши выводы находятся в полном соответствии с этими представлениями.

Оказалось, что принципиальное отличие модели (2) от (I) заключается в <u>нетривиальности динамики солитонов</u>. Именно: ниже будут предъявлены точные решения системы (2), описывающие неупругие процессы – распады солитонов и их слияния.

2. $\mathcal{G}$ - система и ее N -солитонное решение

Уравнение $O(1,1)$ sine – Gordon является вещественной редукцией следующей комплексной системы:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi^+_\eta \varphi^-_\xi}{1-\varphi^+\varphi^-} + \varphi^+\varphi^- - 1\right) + \text{к.с.} \qquad (3)$$

Полагая в (3) $(\varphi^\pm)^* = \varphi^\pm \equiv u_1 \pm u_2$, мы получаем, с точностью до полной производной, лагранжиан (2). Выражение (3) задает одну из лагранжевых версий так называемой " $\mathcal{G} = sl(2,\mathbb{C})$ - системы", или просто " $\mathcal{G}$ - системы" - системы общего положения, возникающей в невырожденном $sl(2,\mathbb{C})$ случае схемы единого описания интегрируемых массивных моделей релятивистской теории поля [6]. Следующие из (3) уравнения движения служат условиями совместности при всех λ линейной системы

$$\Psi_\eta = (\lambda^2 U_2^+ + U_0^+)\Psi, \quad \Psi_\xi = (\lambda^{-2} U_2^- + U_0^-)\Psi,$$

где

$$U_2^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & q_1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad U_0^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_1 q_2 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{2}q_1 q_2 \end{pmatrix},$$

$$U_2^- = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ q_4 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad U_0^- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}q_3 q_4 & q_3 \\ 0 & \frac{1}{2}q_3 q_4 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$$q_1 = \varphi^+,\ q_4^* = -\varphi^-,\ q_2 = -(\varphi^-_\eta)^*[1-\varphi^+(\varphi^-)^*]^{-1},\ q_3 = -\varphi^+_\xi[1-\varphi^+(\varphi^-)^*]^{-1}.$$

В работе [7] предложена процедура одевания и получены явные N - солитонные решения $\mathcal{G}$ -системы, ее редукций и эквивалентных спинорных систем, убывающие на бесконечности. Аналогично строятся многосолитонные решения и на произвольном фоне. Отсылая за деталями к последующей подробной публикации, мы приведем окончательный ответ:

$$q_1 = \Delta_1 \Delta_2^{-1}\left(q_1^0 - 2\langle t_2 | a_1^{-1} | S_1\rangle\right),$$
$$q_4 = \Delta_1 \Delta_2^{-1}\left(q_4^0 - 2\langle \nu^{-1} t_1 | a_1^{-1} | \mu^{-1} S_2\rangle\right). \qquad (5)$$

В (5) введены следующие обозначения. Двухкомпонентные векторы $\vec{S}^i$ и $\vec{t}^i$, $i = 1,\dots,N$ задаются равенствами $\vec{S}^i = (S_1^i, S_2^i) = \vec{n}^i \Psi_0^{-1}|_{\lambda=\mu_i}$ и $\vec{t}^i = \vec{m}^i \Psi_0^T|_{\lambda=\nu_i}$ соответственно, тогда как N -векторы $|S_A\rangle$ и $|t_A\rangle$, $A=1,2$ образованы так: $\langle t_A| = |t_A\rangle^T = (t_A^1, t_A^2, \dots, t_A^N)$. При этом $\langle \nu^{-1} t_A| \equiv (\nu_1^{-1} t_A^1, \nu_2^{-1} t_A^2, \dots, \nu_N^{-1} t_A^N)$. Далее, $\vec{m}^i$ и $\vec{n}^i$ обозначают любые постоянные 2 - векторы; ν_i и μ_i - произвольные комплексные константы (полюса матриц Ψ и Ψ^{-1} соответственно), а $\Delta_{1,2}$ суть определители $N\times N$ матриц a_1 и a_2 с элементами $a_{1,2}^{ij} = 2(\nu_j S_{1,2}^i t_{1,2}^j + \mu_i S_{2,1}^i t_{2,1}^j)/(\nu_j^2 - \mu_i^2)$. Наконец, $\Psi_0, q_1^0, \dots, q_4^0$ - произвольное фоновое решение системы (4). Полагая $q_1^0 = \dots = q_4^0 \equiv 0$, получаем из (5) формулы работы [7], в то время как для $q_1^0, \dots, q_4^0 \not\equiv 0$ решение (5) представимо в виде отношения детерминантов:

$$q_1 = q_1^0 \frac{\det[a_1 - 2(q_1^0)^{-1}|S_1\rangle\langle t_2|]}{\Delta_2},$$
$$q_4 = q_4^0 \frac{\det[a_1 - 2(q_4^0)^{-1}|\mu^{-1}S_2\rangle\langle \nu^{-1}t_1|]}{\Delta_2}. \qquad (6)$$

3. Распады и слияния

Сосредоточимся на простейшем решении $\mathcal{G}$ -системы, полученном одеванием постоянного фона $q^0_{1,\dots,4} = const$ и соответствующем случаю, когда матрица Ψ имеет единственный простой полюс при $\lambda = e^{-\rho_1}$ и простой нуль при $\lambda = e^{-\rho_2}$. Для простоты ограничимся также вещественными решениями, т.е. рассмотрим редукцию $\mathcal{G}$ -системы (3) к уравнению $O(1,1)$ sine - Gordon (2).

При подстановке постоянного решения $q^0_{1,\dots,4} = const$ в уравнения движения возникает условие $q_1^0 q_4^0 = q_2^0 q_3^0 = -1$. Полагая $q_1^0 = 1$, вводя обозначения $q_2^0 = exp(-2\alpha)$, $\lambda = exp(-\rho_0)$;

$$z_A = -ch(\alpha-\rho_A)[e^{\rho_A+\alpha}\xi - e^{-\rho_A-\alpha}\eta] =$$
$$= -ch(\alpha-\rho_A)[ch(\alpha+\rho_A)\cdot x - sh(\alpha+\rho_A)\cdot t],\ A=0,1,2;\ B_{1,2} = 2ch(\alpha-\rho_{1,2}),$$

и выбирая Ψ_0 в виде

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} e^{-z_0} & e^{z_0+\alpha} \\ -e^{-z_0} & e^{z_0-\alpha+2\rho_0} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

получаем из (6):

$$\varphi^{\pm}=\frac{e^{2z_1\pm(\rho_1-\rho_2)}B_2n_1m_2+e^{2z_2\mp(\rho_1-\rho_2)}B_1n_2m_1-2e^{\pm(2\alpha-\rho_1-\rho_2)}sh(\rho_2-\rho_1)n_2m_2}{e^{2z_1}B_2n_1m_2+e^{2z_2}B_1n_2m_1+2\,sh(\rho_2-\rho_1)n_2m_2}. \tag{8а}$$

Решение (8а) допускает нетривиальные вырождения. Запишем его для удобства в виде

$$\varphi^{\pm}=\frac{C_1^{\pm}e^{2z_1}+C_2^{\pm}e^{2z_2}+C_3^{\pm}}{\tilde{C}_1e^{2z_1}+\tilde{C}_2e^{2z_2}+\tilde{C}_3}=\frac{C_1^{\pm}e^{2z_3}+C_2^{\pm}+C_3^{\pm}e^{-2z_2}}{\tilde{C}_1e^{2z_3}+\tilde{C}_2+\tilde{C}_3e^{-2z_2}}, \tag{8б}$$

где параметры $C^{\pm}_{1,2,3}$, $\tilde{C}_{1,2,3}$ очевидным образом выражаются через α, ρ_A, n_A, m_A . , а $z_3=z_1-z_2$. Полагая в (8) $m_1=0$ $(n_1=0)$, получаем

$$\varphi^{\pm}_{1,2}=\frac{C^{\pm}_{1,2}/\tilde{C}_3e^{2z_{1,2}}+C_3^{\pm}/\tilde{C}_3}{\tilde{C}_{1,2}/\tilde{C}_3e^{2z_{1,2}}+1}=e^{\pm(\alpha-\rho_{2,1})}\left[\pm sh(\rho_{1,2}-\alpha)+ch(\rho_{1,2}-\alpha)\,th\,\tilde{z}_{1,2}\right], \tag{9}$$

где $\tilde{z}_{1,2}=z_{1,2}+\frac{1}{2}\ln(\tilde{C}_{1,2}/\tilde{C}_3)$. С другой стороны, полагая $n_2=\varepsilon\tilde{n}_2$, $m_2=\varepsilon\tilde{m}_2$ и устремляя ε к нулю, получаем из (8):

$$\varphi^{\pm}_3=\frac{C_1^{\pm}/\tilde{C}_2e^{2z_3}+C_2^{\pm}/\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1/\tilde{C}_2e^{2z_3}+1}=ch(\rho_1-\rho_2)\pm sh(\rho_1-\rho_2)\,th\,\tilde{z}_3, \tag{10}$$

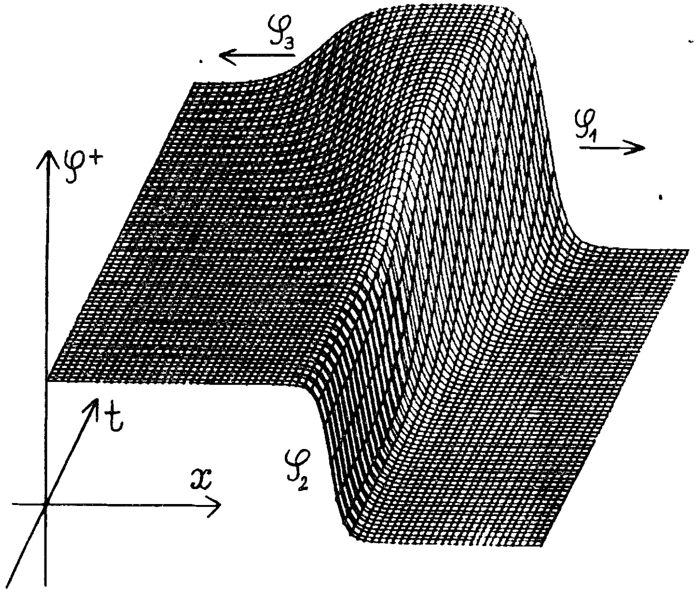
где $\tilde{z}_3=z_3+\frac{1}{2}\ln\tilde{C}_1/\tilde{C}_2$. Функции $\varphi^{\pm}_{1,2,3}$ несингулярны, если $\tilde{C}_{1,2}/\tilde{C}_3$ и $\tilde{C}_1/\tilde{C}_2>0$, чего можно всегда добиться надлежащим выбором параметров n_A и m_A . Решения $\varphi_{1,2}$ представляют собой досветовые солитоны (брадионы), движущиеся со скоростями $V_{1,2}=th\,\beta_{1,2}$, где $\beta_{1,2}=\alpha+\rho_{1,2}$. Решение же φ_3 есть сверхсветовой солитон (тахион*); как нетрудно подсчитать, его скорость равна $V_3=cth\,\beta_3$, где $\beta_3=\rho_1+\rho_2$. (При этом мы считаем быстроты β_1,β_2,β_3 вещественными).

---

* Характеристическая скорость $c=1$ необязательно есть скорость света; в зависимости от приложений она может иметь смысл, например, скорости звука в кристалле. Поэтому тахионы не всегда являются "нефизическими" решениями. Обзор различных аспектов теории тахионов см. в /II/; достаточно полная библиография содержится в книге /I2/.

Положим, для определенности, $V_1>V_2>0$, $V_3<0$ и покажем, что решение (8) описывает процесс распада брадиона φ_2 на брадион φ_1 и тахион φ_3 . Действительно, легко убедиться, что при $t\to-\infty$ (8) отлично от константы только в окрестности прямой $z_2=0$, т.е. мы имеем лишь солитон φ_2 . С другой стороны, при $t\to+\infty$ (8) отлично от постоянной только в окрестности прямых $z_1=0$ и $z_3=0$, и решение представляет собой суперпозицию далеко разведенных солитонов φ_1 и φ_3 .

Переход к новой системе отсчета, движущейся относительно исходной со скоростью $\tilde{V}=-th\,\tilde{\beta}$, осуществляется с помощью преобразований Лоренца, в терминах быстрот имеющих вид $\beta_{1,2,3}\to\beta'_{1,2,3}=\beta_{1,2,3}+\tilde{\beta}$. В частности, можно рассмотреть решение (8) в системе, движущейся с быстротой $\tilde{\beta}>0$, такой, что $\beta'_{1,2,3}>0$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным в предыдущем абзаце, легко убедиться в том, что в этом случае (8) описывает уже процесс <u>слияния</u> : $\varphi_2,\varphi_3\to\varphi_1$.



Распад брадиона φ_2 на брадион φ_1 и тахион φ_3 , описываемый формулой (8), при выборе $\beta_1=2{,}5$ $\beta_2=0$ $\beta_3=-0{,}5$.

Следует подчеркнуть, что механизм описанного выше нетривиального взаимодействия солитонов отличен от изучавшихся ранее механизмов, реализующихся в более сложных системах (три и более полей), интегрируемых на алгебрах ранга $\geqslant 2$ /9/. В нашем случае (ранг=I) рождение и поглощение солитонов становится возможным благодаря индефинитности метрики внутреннего пространства в (2). Относительно подобных простых, одно-двухполевых моделей уместно заметить, что до сих пор изучение нетривиальных взаимодействий проводилось (численно) только в рамках неинтегрируемых систем (см., например, /I0/).

Подсчитаем теперь энергии, импульсы и квадраты масс солитонов φ_1, φ_2 и φ_3, т.е. значения интегралов

$$E = \int \mathcal{H}\, dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\varphi_t^+ \varphi_t^- + \varphi_x^+ \varphi_x^-}{1-\varphi^+\varphi^-} + (1-\varphi^+\varphi^-) \right] dx ,$$

$$P = \int \mathcal{P}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\varphi_t^+ \varphi_x^- + \varphi_t^- \varphi_x^+}{1-\varphi^+\varphi^-}\, dx$$

и $M^2=E^2-P^2$ на решениях $\varphi^{\pm}_{1,2,3}$. Используя определения констант $C^{\pm}_{1,\dots,3}$, $\tilde{C}_{1,\dots,3}$, получаем

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= 2\,ch(\beta_{2,1}-\beta_3)\,ch\beta_{1,2} , \\ P_{1,2} &= 2\,ch(\beta_{2,1}-\beta_3)\,sh\beta_{1,2} , \\ M^2_{1,2} &= 4\,ch^2(\beta_{2,1}-\beta_3) ; \end{aligned} \qquad \text{(IIa)}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= 2\,|sh(\beta_1-\beta_2)\,sh\beta_3| , \\ P_3 &= 2\,\mathrm{Sgn}\,\beta_3 \cdot |sh(\beta_1-\beta_2)|\,ch\,\beta_3 , \\ M_3^2 &= -4\,sh^2(\beta_1-\beta_2) . \end{aligned} \qquad \text{(IIб)}$$

Для брадионов $\varphi_{1,2}$ выполняются соотношения $E=M\gamma$, $P=Mv\gamma$ (здесь $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$), и, следовательно, их можно интерпретировать как релятивистские частицы. Что же касается тахиона φ_3, то необходимо подчеркнуть факт неотрицательности его энергии, не зависящий

от выбора системы отсчета *. Далее, следующие из (II) законы сохранения $E_2=E_1+E_3$, $P_2=P_1+P_3$ при $V_1>V_2>0$, $V_3<0$ и $E_2+E_3=E_1$, $P_2+P_3=P_1$ при $V_1>V_2>0$, $V_3>0$ находятся в полном соответствии с описанной выше картиной взаимопревращения этих объектов. Физически наиболее интересный случай связан, по-видимому, с выбором $\beta_3=(\beta_1+\beta_2)/2$, когда мы имеем $M_1=M_2$, и поглощение (а при замене $t\to -t$ -излучение) тахиона брадионом происходит без изменения массы последнего. Отметим, наконец, что при формальной замене $\xi \to -\xi$, соответствующей изменению знака массового члена в (2), брадионы становятся тахионами и наоборот. В этом случае мы имеем дело с излучением и поглощением брадиона тахионом.

Таким образом, показана принципиальная возможность точного описания взаимодействия до- и сверхсветовых частиц в рамках нелинейной классической теории поля.

Мы благодарны проф.Я.А.Смородинскому и Я.П.Терлецкому за полезные замечания.

Литература

I. Lund F., Regge T.-Phys. Rev. D14, 1524, 1976.
2. Pohlmeyer K.-Commun. Math. Phys., 46, 207, 1976.
3. Neveu A., Papanicolaou N.-Commun. Math. Phys., 58, 31, 1978.
4. Lund F.-Phys. Rev. Lett. 38, 1175, 1977;
   Ann. Phys. , 115, 251, 1978.
5. Гетманов Б.С.-Письма в ЖЭТФ, 25, I32, I977.
6. Гетманов Б.С. В трудах Ш Международного Симпозиума по статистической механике. ОИЯИ, ДI7-84-407, Дубна, с.2I2 и с.2I7, I984.
7. Барашенков И.В., Гетманов Б.С. Там же, с.37;
   ОИЯИ, Р5-86-628, Дубна, I986; Commun. Math. Phys., в печати.
8. Ellis J., Gaillard M.K., Günaydin M., Zumino B.
   -Nucl. Phys. B224, 427, 1983.
   Маханьков В.Г., Пашаев О.К.-ТМФ, I982, 53, с.55.

* Неотрицательности энергии тахиона в релятивистской механике добиваются с помощью привлечения принципа реинтерпретации /I4,I3/. В нашем же случае, при описании взаимодействия на языке (классической) теории поля, энергия автоматически неотрицательна. Этот факт можно трактовать как математическое обоснование принципа реинтерпретации - во всяком случае, на уровне обсуждаемой модели. При этом формулы (IIб) совпадают с предложенными Терлецким /I3/.

9. Будагов А.С., Тахтаджян Л.А.-ДАН СССР, 235, 805, 1977;
Захаров В.Е., Михайлов А.В.-Письма в ЖЭТФ, 27, 47, 1978.

Mel'nikov V.K.-Phys.Lett.A, 118, 22, 1986

10. Кудрявцев А.Е.-Письма в ЖЭТФ, 22, 178, 1975;
Гетманов Б.С.-Письма в ЖЭТФ, 24, 323, 1976.
"Solitons and nonlinear wave equations" R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon, H.C.Morris. Academic Press, 1982

11. "Tachyons, monopoles and related topics".Proceedings on the First Session of the Interdisciplinary Seminars on "Tachyons and Related Topics", Erice, 1976. E.Recami ed., North-Holland, 1978.
Recami E. Found.Phys., 17, 239, 1987.

12. Философские проблемы гипотезы сверхсветовых скоростей (сб.статей). Наука, М., 1986.

13. Терлецкий Я.П. Парадоксы теории относительности. Наука, М., 1966.

14. O.M.P.Bilaniuk, V.K.Deshpande, E.C.G.Sudarshan,-Amer.Journ.Phys., 30, 718, 1962

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1987 года.

Барашенков И.В., Гетманов Б.С., Ковтун В.Е. Р2-87-490
Рождение тахионов в процессах распада солитонов: точные решения

В рамках новой интегрируемой модели релятивистской теории поля обнаружено глубоконеупругое взаимодействие солитонов. Модель представляет собой обобщение уравнения sine-Gordon на случай двух скалярных полей с индефинитной метрикой. Новые эффекты включают распады досветовых солитонов с излучением солитонов сверхсветовых.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Barashenkov I.V., Getmanov B.S., Kovtun V.E. P2-87-490
Creation of Tachyons in Soliton Decays: an Exact Solution

Deep-inelastic interaction of solitons is found within the frame of a new integrable relativistic model. The model is a two-field scalar generalization of the sine-Gordon equation furnished with indefinite metric. The new effects include decays of subluminary solitons with tachyonic solitons emission.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987