сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-87-391

Н.С.Шавохина

ЧЕТВЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

1987

В данной работе мы развиваем модель взаимодействия частиц, основанную на понятиях длины линии и площади поверхности для двух частиц [1-9], а также на понятиях длины линии и площади поверхностей двух и трех измерений для трех частиц [10,11]. Мы будем исследовать систему из четырех частиц, четверное взаимодействие между которыми передает само пространство-время. Чтобы рассмотреть такое взаимодействие, необходимо наряду с мерой площадей одного, двух и трех измерений задать меру самого пространства-времени. Одномерная поверхность здесь определяется как мировая линия. Такую модель, основанную на понятии меры пространства-времени и всех его подмногообразий, будем называть ареальной моделью, а объекты, которые она описывает, - ареальными объектами. Название происходит от латинского слова "area" - площадь. Ареальные объекты существуют в ареальных пространствах, известных в геометрии [12-14]. Максимальная кратность взаимодействия частиц в ареальной модели равна размерности пространства-времени. Поэтому четверное взаимодействие между частицами является максимально возможным в физических мирах. Ниже мы начинаем исследование ареальной модели взаимодействия четырех частиц в релятивистской механике, т.е. в плоском пространстве-времени Пуанкаре - Минковского.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мир Пуанкаре - Минковского представляет собой простое ориентируемое многообразие $\mathfrak{M}$, на котором задана фундаментальная форма

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = (dx^1)^2 - \frac{1}{c^2}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2], \qquad /1/$$

где постоянная c равна скорости света в пустоте, через $\eta_{\alpha\beta}$ = $= \mathrm{diag}(q, -\frac{1}{c^2}, -\frac{1}{c^2}, -\frac{1}{c^2})$ обозначен метрический тензор плоского пространства в декартовых координатах $x^\alpha, \alpha \in \{1,2,3,4\}$. Приведем известные формулы /см., например, [15]/ преобразования тензорных величин при переходе от карты $K(x)$ к карте $\tilde{K}(\tilde{x})$

$$\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4). \qquad /2/$$

Векторные f^α и ковекторные величины g^α имеют следующие законы преобразования:

$$\tilde f^\alpha = f^\mu \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\mu}, \qquad \tilde g_\alpha = g_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde x^\alpha}. \qquad /3/$$

Законы преобразования величин с несколькими векторными /верхними/ и ковекторными /нижними/ индексами вытекают из /3/. Так, например, имеем

$$\tilde\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\nu\mu} \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde x^\beta}{\partial x^\mu}, \qquad \tilde R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^\mu_{\nu\sigma\tau} \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\delta}. \qquad /4/$$

Выражение, содержащее одинаковые верхний и нижний индексы, представляет собой сумму. Так,

$$\tilde f^\alpha = f^\mu \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^\nu} = f^1 \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^1} + f^2 \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^2} + f^3 \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^3} + f^4 \frac{\partial \tilde x^\alpha}{\partial x^4}.$$

Опускание и поднимание индексов в пространстве с метрикой /10/ осуществляется с помощью метрического тензора $\eta_{\alpha\beta}$ и обратного к нему $\eta^{\alpha\beta}$. Так,

$$f_\alpha = \eta_{\alpha\beta} f^\beta, \qquad T^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} T_{\mu\nu}.$$

Совокупность $\{x^\alpha\} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ задает на $\mathfrak{M}$ мировую точку x, что будем записывать в виде $x = \{x^\alpha\}$.

Линии в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1). \qquad /5/$$

Касательный вектор в каждой точке этой линии будем обозначать

$$a_1 = \{a_1^\alpha\} = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}. \qquad /6/$$

Двумерные поверхности в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2). \qquad /7/$$

Пару независимых в каждой точке касательных к этой поверхности векторов будем обозначать

$$a_1 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}, \qquad a_2 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^2}\right\}. \qquad /8/$$

Трехмерные поверхности в $\mathfrak{M}$ задаются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, u^3). \qquad /9/$$

Тройку независимых в каждой точке касательных к поверхности /9/ векторов будем обозначать

$$a_1 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^1}\right\}, \qquad a_2 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^2}\right\}, \qquad a_3 = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^3}\right\}. \qquad /10/$$

Наконец, запись

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, u^3, u^4) \qquad /11/$$

означает, что $\mathfrak{M}$ отнесено к новой карте $K(u)$, если якобиан $\dfrac{\mathfrak{D}(x^1, x^2, x^3, x^4)}{\mathfrak{D}(u^1, u^2, u^3, u^4)} > 0$. В этом случае четыре вектора

$$a_i = \{a_i^\alpha\} = \left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right\}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \qquad /12/$$

линейно независимы в каждой точке $\mathfrak{M}$. Меры длины, площади, объема и гиперобъема /мера пространства-времени четырех измерений/ для /5/, /7/, /9/ и /12/ соответственно обозначим

$$w_1(x, d_1x), \quad w_2(x, d_1x, d_2x),$$

$$w_3(x, d_1x, d_2x, d_3x), \quad w_4(x, d_1x, d_2x, d_3x, d_4x). \qquad /13/$$

Здесь совокупности векторов смещений - для /5/ $d_1x = \{d_1x^\alpha\}$; для /6/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2$, для /9/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2,3$, для /11/ $d_ix = \{d_ix^\alpha\}$, $i = 1,2,3,4$ являются независимыми.

На всех многообразиях /5/ - /12/, вложенных в $\mathfrak{M}$ с метрикой /1/, возникает индуцированная метрика

$$ds_p^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} du^i du^k,$$

где $i, k \in \{1, \ldots, p\}$, а в свою очередь $p \in \{1,2,3,4\}$.

Величина

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} = (a_i a_k) = g_{ik} \qquad /14/$$

называется метрическим тензором многообразия размерности p , вложенного в $\mathfrak{M}$. Выражение

$$\eta_{\alpha\beta}\, a_i^{\alpha}\, a_k^{\beta} = (a_i a_k). \qquad /15/$$

определяет скалярное произведение в $\mathfrak{M}$.

В плоском пространстве-времени выражения /13/ с учетом /14/ равны

$$w_1 = \sqrt{e_1 g_{11}}\, du^1 = \sqrt{e_1 (a_1 a_1)}\, du^1 = L_1(x, a_1)\, du^1, \qquad /16/$$

$$w_2 = \sqrt{e_2\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2 = L_2(x, a_1, a_2)\, du^1 du^2 = \sqrt{e_2 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) \end{vmatrix}}\; du^1 du^2, \qquad /17/$$

$$w_3 = \sqrt{e_3\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2 du^3 = L_3(x, a_1, a_2, a_3)\, du^1 du^2 du^3 = \sqrt{e_3 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) & (a_2 a_3) \\ (a_3 a_1) & (a_3 a_2) & (a_3 a_3) \end{vmatrix}}\; du^1 du^2 du^3, \qquad /18/$$

$$w_4 = \sqrt{e_4\, |g_{ik}|}\, du^1 du^2, du^3 du^4 = L_4(x, a_1, a_2, a_3, a_4)\, du^1 du^2 du^3 du^4 = \sqrt{e_4 \begin{vmatrix} (a_1 a_1) & (a_1 a_2) & (a_1 a_3) & (a_1 a_4) \\ (a_2 a_1) & (a_2 a_2) & (a_2 a_3) & (a_2 a_4) \\ (a_3 a_1) & (a_3 a_2) & (a_3 a_3) & (a_3 a_4) \\ (a_4 a_1) & (a_4 a_2) & (a_4 a_3) & (a_4 a_4) \end{vmatrix}}\; du^1 du^2 du^3 du^4. \qquad /19/$$

Числа e_1 , e_2, e_3, e_4 зависят от сигнатуры метрических тензоров $\eta_{\alpha\beta}$ и g_{ik} . Для пространства с метрикой /1/ $e_4 = -1$. Для времениподобных линий /11, 16/ и двумерных и трехмерных поверхностей /5/, /7/, /9/ в /1/ $e_1 = 1$, $e_2 = -1$, $e_3 = 1$. Для пространственноподобных /11, 16/ - $e_1 = -1$, $e_2 = 1$, $e_3 = -1$.

Времениподобными поверхностями двух и трех измерений мы называем такие, у которых касательное пространство в каждой точке является пространством Пуанкаре - Минковского двух и трех измерений соответственно. Пространственноподобными поверхностями двух и трех измерений называем такие, у которых касательное пространство является евклидовым.

2. ГИПЕРПРИЗМА СОБЫТИЙ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

Гиперпризма событий четырех частиц есть область определения действия для системы из четырех частиц с четверным, тройными и парными взаимодействиями между ними. Будем обозначать ее Ω .

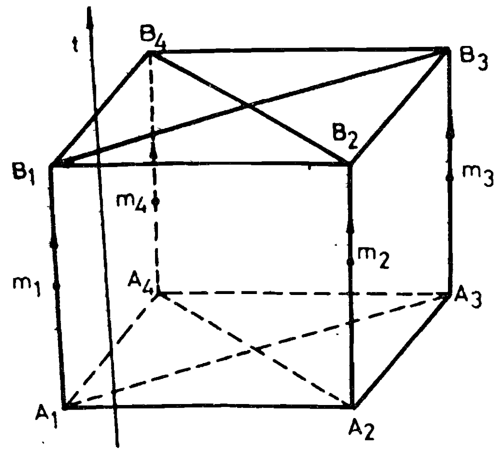
Гиперпризма событий Ω есть совокупность открытой области пространства-времени ω_4 и всех ее времениподобных трехмерных и двумерных граней и ребер между двумя мгновениями времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Гиперповерхность $t = const$ будем называть мгновенным пространством и обозначать $\pi(t)$. Пересечение Ω и $\pi(t)$ обозначим

$$T = \Omega \cap \pi(t). \qquad /19/$$

Четверное взаимодействие частиц передает ω_4 . Тройные взаимодействия частиц передают трехмерные боковые грани Ω, совокупность внутренних точек которых обозначим ω_3. Двойные взаимодействия частиц передают двумерные боковые грани Ω , совокупность внутренних точек которых обозначим ω_2. Мировые траектории частиц служат ребрами Ω . Их совокупность обозначим ω_1. Итак, имеем

$$\Omega = \omega_4 \cup \omega_3 \cup \omega_2 \cup \omega_1 , \qquad /20/$$

где ω_4 , ω_3 , ω_2 и ω_1 являются времениподобными многообразиями с общей ориентацией времени.



На рисунке изображена гиперпризма событий Ω между мгновенными пространствами $\pi(t_1)$ и $\pi(t_2)$. Для призмы Ω /на рисунке/ T из /19/ является евклидовым тетраэдром. Тетраэдры

$$T_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 , \qquad T_2 = B_1 B_2 B_3 B_4 \qquad /22/$$

- нижняя и верхняя по времени грани Ω .

Граница области ω_4 отделяет ее от внешней части пространства-времени. Обозначим ее $\partial\omega_4$. Граница любой области на ориентированном многообразии имеет индуцированную ориентацию /17,18/. Ориентацию $\partial\omega_4$ задает внешняя нормаль к ней. Имеем

$$\partial\omega_4 = -T_2 + T_1 + \omega_3 . \qquad /22/$$

Здесь и далее знак плюс перед слагаемым означает, что оно входит в сумму со своей ориентацией, а минус - с противоположной. Далее имеем /см. рисунок/

$$\omega_3 = \Pi_{132} + \Pi_{234} + \Pi_{314} + \Pi_{412} , \qquad /23/$$

где через Π_{ijk} обозначена призма событий i-й и k-й частиц /10-11/. Напомним, что призма событий - это область трехмерной времениподобной поверхности /9/, ограниченная двумерными гранями и ребрами. Двумерные грани передают парные взаимодействия частиц, а ребрами служат траектории частиц. Призма событий Π_{ijk} ориентирована. Четная перестановка индексов не меняет ориентации Π_{ijk}, нечетная - меняет.

Граница призмы Π_{ijk} равна

$$\partial\Pi_{ijk} = \Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{ki} - \Delta B_i B_j B_k + \Delta A_i A_j A_k , \qquad /24/$$

где через Λ_{ij} обозначена внутренняя часть ленты событий i-й и j-й точек /1-2/, а треугольники $\Delta B_i B_j B_k$ и $\Delta A_i A_j A_k$ являются гранями тетраэдров T_2 и T_1. Лента событий частиц представляет собой область двумерной времениподобной поверхности, передающую парные взаимодействия частиц и ограниченную траекториями частиц. При перестановке индексов меняется ориентация ленты событий. Призмы Π_{ijk} и $\Pi_{ij\ell}$ имеют общей границей ленту Λ_{ij}. Далее /см. рисунок/ имеем

$$\omega_2 = \Lambda_{12} + \Lambda_{23} + \Lambda_{34} + \Lambda_{41} + \Lambda_{24} + \Lambda_{31} . \qquad /25/$$

Граница ленты событий Λ_{ij} равна

$$\partial\Lambda_{ij} = -\Gamma_i + \Gamma_j - (B_i B_j) + (A_i A_j), \qquad /26/$$

где через Γ_i обозначена траектория i-й частицы с массой m_i, а открытые отрезки $(B_i B_j)$ и $(A_i A_j)$ являются ребрами тетраэдров T_2 и T_1. Заметим, что Γ_i в Ω служит общей границей трех лент Λ_{ij}, Λ_{ik} и $\Lambda_{\ell i}$. Для ω_1 имеем /см. рисунок/

$$\omega_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 , \qquad /27/$$

где все ребра Γ_i ориентированы в положительном направлении времени. Наконец, границей Γ_i по определению являются точки B_i и A_i, то есть

$$\partial\Gamma_i = -B_i + A_i , \qquad /28/$$

а для $\partial\omega_1$ имеем

$$\partial\omega_1 = -B_1 - B_2 - B_3 - B_4 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 . \qquad /29/$$

Формулы /5/ для траектории Γ_i запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_i u^1) . \qquad /30/$$

Формулы /7/ для Λ_{ij} запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_{ij}u^1, {}_{ij}u^2). \qquad /31/$$

Формулы /9/ для Π_{ijk} запишутся в виде

$$x^\alpha = x^\alpha({}_{ijk}u^1, {}_{ijk}u^2, {}_{ijk}u^3). \qquad /32/$$

Тот факт, что Γ_i является границей Λ_{ik}, запишется в виде

$${}_{ik}u^1 = {}_{ik}u^1({}_i u^1), \quad {}_{ik}u^2 = {}_{ik}u^2({}_i u^2). \qquad /33/$$

Тот факт, что Λ_{ij} является границей Π_{ijk}, запишется в виде

$${}_{ijk}u^q = {}_{ijk}u^q({}_{ij}u^1, {}_{ij}u^2), \quad q = 1, 2, 3. \qquad /34/$$

Тот факт, что Π_{ijk} является границей ω_4, запишется в виде

$$u^q = u^q({}_{ijk}u^1, {}_{ijk}u^2, {}_{ijk}u^3), \quad q = 1,2,3,4. \qquad /35/$$

Таким образом, все параметры u^q на вложенных в $\mathfrak{M}$ многообразиях получили несколько дополнительных нижних индексов, которые указывают, на какой боковой грани Ω рассматривается параметр, а число нижних индексов указывает на размерность этой грани.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ

Действие для системы из четырех частиц с парными, тройными и четверным взаимодействиями между ними определено на Ω и имеет вид

$$S = m\int_{\omega_1} w_1 + G_2\int_{\omega_2} w_2 + G_3\int_{\omega_3} w_3 + G_4\int_{\omega_4} w_4, \qquad /36/$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 даны в /13/ и /16/ - /19/, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 - в /20/, а через m, G_2, G_3, G_4 обозначены постоянные однократного, двукратного /парного/, трехкратного /тройного/, и четырехкратного /четверного/ взаимодействий. По определению постоянная однократного взаимодействия равна массе частицы. Запишем действие /36/ с учетом /23/, /25/ и /27/. Имеем

$$S = \sum_{i=1}^{4} m_i\int_{\Gamma_i} L_1(x,a_1)du^1 + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij}\int_{\Lambda_{ij}} L_2(x,a_1,a_2)du^1du^2 +$$

$$+\sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk}\int_{\Pi_{ijk}} L_3(x,a_1,a_2,a_3)du^1du^2du^3 + G_4\int_{\omega_4} du^1du^2du^3du^4 \times$$

$$\times L_4(x,a_1,a_2,a_3,a_4), \qquad /37/$$

где L_1, L_2, L_3, L_4 определены в /16/-/19/. Отметим, что в общем случае постоянная m для каждой траектории Γ_i имеет свое значение m_i, постоянная G_2 для каждой ленты Λ_{ij} имеет свое значение G_{ij}, постоянная G_3 для каждой призмы Π_{ijk} имеет свое значение G_{ijk}.

Обозначим

$$I_p = \int_{\omega_p} L_p(x, a_1,\dots, a_p)du^1\dots du^p. \qquad /38/$$

Для вариации δI_p имеем

$$\delta I_p = \int_{\omega_p}\left[\frac{\partial L_p}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha}\delta\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right]du^1\dots du^p =$$

$$= \int_{\omega_p}\left\{-[L_p]_\alpha\delta x^\alpha + \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a_i^\alpha}\delta x^\alpha\right)\right\}du^1\dots du^p, \qquad /39/$$

где величину

$$[L_p]_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha} - \frac{\partial L_p}{\partial x^\alpha}, \quad p\in\{1,2,3,4\}, \qquad /40/$$

будем называть ковектором Эйлера. Нетрудно видеть, что при замене /2/ он преобразуется по ковекторному закону /3/.

Далее по теореме Стокса /17–19/ имеем

$$\int_{\omega_p}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L_p}{\partial a_i^\alpha}\delta x^\alpha\right)du^1\dots du^p =$$

$$= \int_{\partial\omega_p}\delta x^\alpha\begin{vmatrix}\frac{\partial L_p}{\partial a_1^\alpha} & \dots & \frac{\partial L_p}{\partial a_p^\alpha}\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^p}{\partial v^1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^{p-1}} & \dots & \frac{\partial u^p}{\partial v^{p-1}}\end{vmatrix} dv^1\dots dv^{p-1}, \qquad /41/$$

где через $u^1,\dots,u^p$ обозначены независимые параметры на ω_p, а через $v^1,\dots,v^{p-1}$ - независимые параметры на $(p-1)$-мерной границе $\partial\omega_p$. Граница $\partial\omega_p$ здесь запишется в виде

$$u^i = u^i(v^1,\dots,v^{p-1}), \quad i\in\{1,\dots,p\}. \qquad /42/$$

Через ${}_p\mathcal{F}_\alpha$ обозначим величину

$${}_p\mathcal{F}_\alpha = \begin{vmatrix}\frac{\partial L_p}{\partial a_1^\alpha} & \dots & \frac{\partial L_p}{\partial a_p^\alpha}\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^p}{\partial v^1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^{p-1}} & \dots & \frac{\partial u^p}{\partial v^{p-1}}\end{vmatrix}, \qquad /43/$$

которую будем называть ковектором сил давления. Действительно, при замене /2/ величина ${}_p\mathcal{F}_\alpha$ преобразуется по ковекторному закону /3/.

Уравнения движения системы из четырех частиц с четверным взаимодействием между ними получаются из условия обращения в нуль вариации действия на Ω. В краткой форме уравнения движения запишутся в виде

$$1/\ G_4[L_4]_\alpha = 0, \qquad 2/\ -G_3[L_3]_\alpha = G_4\,{}_4\mathcal{F}_\alpha,$$

$$3/\ -G_2[L_2]_\alpha = G_3\,{}_3\mathcal{F}_\alpha, \qquad 4/\ -m[L_1]_\alpha = G_2\,{}_2\mathcal{F}_\alpha. \qquad /44/$$

Эти уравнения справедливы в n-мерном пространстве-времени $/n \geq 4/$. Уравнение 1/ является уравнением минимальной поверхности, а уравнения 2/ - 4/ являются граничными условиями. Таким образом, математическим аппаратом для описания системы четырех частиц с четверным взаимодействием между ними является краевая задача для минимальной поверхности четырех измерений в n-мерном ареальном пространстве.

В пространстве-времени четырех измерений $/n = 4/$ уравнения 1/ обращаются в тождества. То есть с внутерней точки зрения само пространство-время является минимальным. Уравнениями движения служат граничные условия 2/, 3/, 4/.

Уравнения движения 1/ - 4/ являются зависимыми. Они связаны соотношениями

1/ $G_4 [L_4]_\alpha \ a^\alpha_i = 0, \ i \in \{1,2,3,4\}, \ \alpha \subset \{1,\dots,n\};$

2/ $G_3 [L_3]_\alpha \ a^\alpha_j = 0, \ j \in \{1,2,3\};$ /45/

3/ $G_2 [L_2]_\alpha \ a^\alpha_k = 0, \ k \in \{1,2\}; \quad 4)\ m[L_1]_\alpha \ a^\alpha_1 = 0,$

которые мы здесь приведем без доказательства и которые для ${}_p\mathcal{F}^\alpha$ из /43/ и L_4, L_3, L_2, L_1 из /16/ - /19/ можно проверить прямыми вычислениями.

С учетом формул /23/ - /35/ уравнения /44/ примут вид

1) $[L_4]_\alpha = 0,$

2) $$G_{ijk}[{}_{ijk}L_3]_\alpha = -G_4 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_2} & \dfrac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_3} & \dfrac{\partial L_4}{\partial a^\alpha_4} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^1} & \dfrac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^2} & \dfrac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^2} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial_{ijk} u^3} & \dfrac{\partial u^2}{\partial_{ijk} u^3} & \dfrac{\partial u^3}{\partial_{ijk} u^3} & \dfrac{\partial u^4}{\partial_{ijk} u^3} \end{vmatrix},$$

$(ijk) \in \{(132),(234),(314),(412)\}$

3) $G_{ij}[{}_{ij}L_2]_\alpha =$

$(ij) \in \{(12),(23),(34),(41),(24),(31)\},$

$k \neq \ell \neq i \neq j$

$$= -G_{ijk} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_2} & \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_3} \\ \dfrac{\partial_{ijk} u^1}{\partial_{ij} u^1} & \dfrac{\partial_{ijk} u^2}{\partial_{ij} u^1} & \dfrac{\partial_{ijk} u^3}{\partial_{ij} u^1} \\ \dfrac{\partial_{ijk} u^1}{\partial_{ij} u^2} & \dfrac{\partial_{ijk} u^2}{\partial_{ij} u^2} & \dfrac{\partial_{ijk} u^3}{\partial_{ij} u^2} \end{vmatrix} + G_{ji\ell} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_2} & \dfrac{\partial L_3}{\partial a^\alpha_3} \\ \dfrac{\partial_{ji\ell} u^1}{\partial_{ij} u^1} & \dfrac{\partial_{ji\ell} u^2}{\partial_{ij} u^1} & \dfrac{\partial_{ji\ell} u^3}{\partial_{ij} u^1} \\ \dfrac{\partial_{ji\ell} u^1}{\partial_{ij} u^2} & \dfrac{\partial_{ji\ell} u^2}{\partial_{ij} u^2} & \dfrac{\partial_{ji\ell} u^3}{\partial_{ij} u^2} \end{vmatrix}$$

$$4)\ m_i[{}_iL_1]_\alpha = G_{ik} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \dfrac{\partial_{ik} u^1}{\partial_i u^1} & \dfrac{\partial_{ik} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix} - G_{\ell i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \dfrac{\partial_{\ell i} u^1}{\partial_i u^1} & \dfrac{\partial_{\ell i} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix} + \qquad /46/$$

$i \in \{1,2,3,4\}.$

$i \neq j \neq k \neq \ell$

$$+ G_{ij} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_1} & \dfrac{\partial L_2}{\partial a^\alpha_2} \\ \dfrac{\partial_{ij} u^1}{\partial_i u^1} & \dfrac{\partial_{ij} u^2}{\partial_i u^1} \end{vmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что в четырехмерном мире $[L_4] \equiv 0$.

4. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Действие системы из четырех частиц с четверным взаимодействием между ними /36/ или /37/ инвариантно относительно группы Лоренца - Пуанкаре. Согласно первой теореме Нетер исследуемая система четырех частиц как целое имеет четыревектор энергии-импульса и бивектор момента, которые одинаковы для всех сечений $t = \mathrm{const}$ гиперпризмы событий Ω /см. рисунок/.

Действительно, уравнения движения /44/, /46/ получены из условия $\delta S = 0$ на Ω. Поэтому если уравнения движения выполняются, то вариация действия равна

$$\delta S = \delta x^\alpha m_1 \mathcal{F}_\alpha \Big|_{\partial\omega_1} + G_2 \int\limits_{\partial\omega_4 - \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - \Gamma_4} \delta x^\alpha {}_2\mathcal{F}_\alpha \, du^1 + \qquad /47/$$

$$+ G_3 \iint\limits_{\partial\omega_3} \delta x^\alpha {}_3\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{\partial\omega_4-\omega_3} \delta x^\alpha {}_4\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 du^3,$$

где ${}_p\mathcal{F}_\alpha$ определены в /42/, /43/, ω_p и $\partial\omega_p$ в /22/ - /29/, а δx^α - произвольное смещение координат.

Если теперь δx^α в /47/ будем брать из преобразований Пуанкаре вида

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + a^\alpha, \quad \delta x^\alpha = a^\alpha, \qquad /48/$$

где a^α - произвольный постоянный вектор, то инвариантность действия относительно группы Лоренца - Пуанкаре будет означать, что

$$\mathcal{P}_\alpha(T_1) = \sum_{i=1}^{4} {}_i p_\alpha(A_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(A_iA_j)} {}_2\mathcal{F}_\alpha du^1 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Lambda A_iA_jA_k} {}_3\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{A_1A_2A_3A_4} {}_4\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 du^3 =$$

$$= \mathcal{P}_\alpha(T_2) \sum_{i=1}^{4} {}_i p_\alpha(B_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(B_iB_j)} {}_2\mathcal{F}_\alpha du^1 + \qquad /49/$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Lambda B_iB_jB_k} {}_3\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{B_1B_2B_3B_4} {}_4\mathcal{F}_\alpha du^1 du^2 du^3,$$

то есть, что ковектор $\mathcal{P}_\alpha(T)$ не зависит от выбора мгновенного сечения T призмы Ω. Здесь

$${}_i p_\alpha = m_i {}_1\mathcal{F}_\alpha = m_i \frac{\partial x^\beta}{\partial_i u^1} \eta_{\alpha\beta} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial_i u^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial_i u^1}\right)^{-1/2}.$$

Вектор

$$\mathcal{P}_\alpha \eta^{\alpha\beta} = \mathcal{P}^\beta \qquad /50/$$

будем называть вектором энергии-импульса системы из четырех частиц с четверным, тройными и парными взаимодействиями между ними. Величину

$$M^2 = \eta_{\alpha\beta} \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}^\beta \qquad /51/$$

будем называть массой составной частицы.

Если δx^α в /47/ будем брать из преобразований Лоренца вида

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \theta^\alpha_\mu x^\mu, \quad \delta x^\alpha = \theta^\alpha_\mu x^\mu, \qquad /52/$$

где произвольный бивектор $\theta^{\alpha\beta} = -\theta^{\beta\alpha}$, $\theta^{\alpha\beta} = \theta^\alpha_\mu \eta^{\mu\beta}$ не зависит от $\{x^\alpha\}$, то из инвариантности действия относительно группы Лоренца - Пуанкаре следует закон сохранения бивектора момента $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}(T)$. Для $\mathfrak{M}^{\alpha\beta}$ имеем

$$\mathfrak{M}^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{4} [x^\alpha {}_i p^\beta](A_i) + \sum_{(ij)}^{C_4^2} G_{ij} \int\limits_{(A_iA_j)} [x^\alpha {}_2\mathcal{F}^\beta] du^1 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_4^3} G_{ijk} \iint\limits_{\Delta A_iA_jA_k} [x^\alpha_3 \mathcal{F}^\beta] du^1 du^2 + G_4 \iiint\limits_{A_1A_2A_3A_4} [x^\alpha {}_4\mathcal{F}^\beta] du^1 du^2 du^3, \qquad /53/$$

где ${}_i p^\alpha = \eta^{\alpha\beta} {}_i p_\beta$ есть импульс частицы с массой m_i, $[x^\alpha {}_i p^\beta] \equiv {}_i M^{\alpha\beta} = x^\alpha {}_i p^\beta - x^\beta {}_i p^\alpha$ есть момент импульса этой же частицы, ${}_p\mathcal{F}^\alpha = \eta^{\alpha\beta} {}_p\mathcal{F}_\beta$, $p = 2,3,4$.

5. ИЕРАРХИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В четырехмерном пространстве-времени не существует пятерного /пятикратного/ взаимодействия частиц. Поэтому действие /36/ или /37/ имеет достаточную общность, чтобы построить ареальные модели взаимодействия любого числа релятивистских частиц в четырехмерном пространстве-времени с любыми допустимыми в этой модели взаимодействиями. Так, например, действие для пяти частиц с четверными, тройными и парными взаимодействиями между ними в указанной модели примет вид

$$S = \sum_{i=1}^{5} m_i \int\limits_{\Gamma_i} L_1 du^1 + \sum_{(ij)}^{C_5^2} G_{ij} \iint\limits_{\Lambda_{ij}} L_2 du^1 du^2 +$$

$$+ \sum_{(ijk)}^{C_5^3} G_{ijk} \iiint\limits_{\Pi_{ijk}} L_3 du^1 du^2 du^3 + \sum_{(ijk\ell)}^{C_5^4} G_{ijk\ell} \iiiint\limits_{\omega_{ijk\ell}} L_4 du^1 du^2 du^3 du^4. \qquad /54/$$

Из условия $\delta S = 0$ на гиперпризме событий для пяти точек получатся уравнения движения такого сложного ареального объекта, а из условия $\delta S = 0$ на сумме верхней и нижней граней гиперпризмы событий при преобразованиях группы Пуанкаре - Лоренца /48/, /52/ получатся законы сохранения вектора энергии-импульса и бивектора момента указанной системы из пяти частиц.

С другой стороны, из действия /36/, обнуляя последовательно сверху вниз постоянные взаимодействия, т.е. положив 1/ $G_4 = 0$, 2/ $G_4 = G_3 = 0$, 3/ $G_4 = G_3 = G_2 = 0$, получим действия для систем из четырех частиц 1/ с тройными и парными взаимодействиями между ними 2/ с парными взаимодействиями 3/ для четырех свободных частиц.

Из действия /37/ при условии

$$G_4 = G_{124} = G_{134} = G_{234} = G_{14} = G_{24} = G_{34} = m_4 = 0, \qquad /55/$$

получается ранее исследованная ареальная модель [10,11] трех частиц с тройными и парными взаимодействиями между ними.

Из действия /37/ при условиях /55/ и условиях

$$G_{123} = G_{13} = G_{23} = m_3 = 0, \qquad /56/$$

следует рассмотренная в работах [1-9] релятивистская задача двух тел с ареальным взаимодействием.

Наконец, если к условиям /55/ и /56/ добавить условия

$$G_{12} = m_2 = 0,$$

то из /37/ получим известное действие для одной свободной частицы.

Теперь рассмотрим восходящую последовательность обращения в нуль постоянных взаимодействия. Если в /37/ положить

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0, \quad G_{ij} = G_2, \qquad /57/$$

то получим ареальные модели пространственно-ограниченных объектов, в которые изначально не заложено понятие массы. Будем называть их ареальными "пузырями" по аналогии с дубненскими, или боголюбовскими, мешками [19].

Если положить

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_{ijk} = G_3, \qquad /58/$$

то получим отличные от /56/ пузыри. Уравнения движения, сохраняющиеся величины и масса пузырей получаются из формул /46/, /49/, /50/, /53/ при условиях /57/ и /58/.

Заметим, что двумерные пузыри или безмассовые мембраны можно рассмотреть уже на основе ареальной модели трех тел, развитой в работах [10,11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.42, №1, с.59-70.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. - ТМФ, 1980, т.43, №3, с.356-366.
3. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-76, Дубна, 1980.
4. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-80-419, Дубна, 1980; Известия ВУЗов, Физика, №7, 1981, с.91-93.
5. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-82-157, Дубна, 1982; Известия ВУЗов, Физика, №7, 1982.
6. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-82-222, Дубна, 1982; ДАН СССР, 1983, т.265, №4, с.852-856.
7. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-52, Дубна, 1983; Известия ВУЗов, Физика, №12, 1983, с.46-51.
8. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-83-231, Дубна, 1983. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №15, М.: Энергоатомиздат, 1985, с.141-149.
9. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-85-183, Дубна, 1985. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №17, - М.: Энергоатомиздат, 1986.
10. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-84-167, Дубна, 1984. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. №16, - М.: Энергоатомиздат, 1985, с.189-196.
11. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-86-636, Дубна, 1986.
12. Вагнер В.В. - Матем.сб., 1946, т.19 /61/, с.341-404.
13. Близникас В.И. - Итоги науки и техники. Алгебра, геометрия, топология, 1967. М.: ВИНИТИ, 1969, с.73-126.
14. Кабанов Н.И. - Итоги науки и техники. Алгебра, геометрия, топология. 1968, М.: ВИНИТИ, 1970, с.1-65.
15. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948.
16. Берке У. Пространство-время, геометрия, космология. - М.: Мир, 1985.
17. Зейферт Г., Трельфалль Н. Топология. М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
18. Уинти Х. Геометрическая теория интегрирования. М.:ИЛ, 1960.
19. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
20. Боголюбов П.Н. - ЭЧАЯ, 1972, т.3, №1, с.144-174.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 июня 1987 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р.00 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна,1984./2 тома/	7 р.75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984. /2 тома/	13 р.50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна,1986. /2 тома/	7 р.35 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Шавохина Н.С. Р2-87-391

Четверное взаимодействие частиц в релятивистской механике

Сформулирована релятивистская задача четырех частиц с четверным взаимодействием между ними. Это новый тип взаимодействия в механике. Предлагаемая модель взаимодействия четырех частиц получилась в результате развития ранее исследованных автором моделей взаимодействия двух и трех частиц. Она опирается только на метрические понятия пространства-времени, такие как длина линии, площади поверхностей двух и трех измерений и мера самого пространства-времени. Рассмотрен общий вид действия такой системы. Из принципа наименьшего действия выведены уравнения движения. Получены сохраняющиеся величины. Показано, что предлагаемая модель описывает новые типы пространственно-ограниченных релятивистских объектов.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Shavokhina N.S. P2-87-391

The Quadruple Interaction of Particles in Relativistic Mechanics

A four-particle problem is formulated with a quadruple interaction between the relativistic particles. This is a new type of interaction in mechanics. The proposed model of four-particle interaction is a generalization of the models earlier studied by the author of the interaction of two and three particles, and it is based only on metric concepts of space-time such as the length of a line, areas of surfaces of two and three dimensions, and the measure of space-time itself. The general form of action of the system is considered; equations of motion are derived from the principle of least action, and constants of motion are found. The model is shown to describe new types of spatially limited relativistic objects.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987