сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-386

Ю.Лёффельхольц

ЕВКЛИДОВА МЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Еще в 1927 году Иордан и Паули, применяя известный метод квантования механической системы независимых гармонических осцилляторов к электромагнитному полю, нашли инвариантные коммутационные соотношения [1]

$$[F_{ij}(x), F_{k\ell}(y)] = -i(g_{ik}\,\partial_j \partial_\ell - \dots)\, D(x-y)\,, \tag{1.1}$$

где $i,j,k,\ell = 0,1,2,3$ и $x,y \in M^4$. Здесь g_{ij} — метрика в пространстве-времени Минковского M^4. Сигнатура такая, что $g_{00} = -1$. Скорость света в вакууме c и постоянная Планка $\hbar$ равны единице. Поскольку выражение (1.1) содержит оператор проектирования, то здесь возникает задача определения фотонного пропагатора, и пока никому не удалось ее решить полностью. Причиной трудности является тот факт, что $F_{ij}(x)$ — координаты на фазовом пространстве Ω, а истинное электромагнитное поле описывается векторным потенциалом $A_i(x)$, $i = 0,1,2,3$. По иронии судьбы, однако, из всех рассматриваемых полей это поле наиболее трудное для квантования [2].

Действительно, если $A_i(x)$, $i = 0,1,2,3$ — локальные поля, то они должны быть определены в пространстве состояний с индефинитной матрикой, и невозможно представить тождества

$$F_{ij}(x) = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{1,2}$$

в виде операторного уравнения в "физическом" подпространстве $\mathcal{H}$ [3]. Здесь оказалось необходимым воспользоваться принципом калибровочной инвариантности на более фундаментальном уровне. Обобщая метод Дирака квантования механической системы со связями на случай полей Янга-Миллса, Фаддеев и Попов нашли правильное определение функционального интеграла для калибровочных полей [4]. Тем не менее, для абелевой электродинамики в отсутствие источников должна существовать так называемая максвелловская формулировка [5], выраженная при помощи калибровочно-инвариантных переменных $F_{ij}(x)$. В настоящей работе мы даем математически строгое решение этой задачи. Нашей исходной точкой будет служить определение гауссовой меры μ на Ω с корреляционной матрицей

$$\langle F_{ij}(x)\, F_{k\ell}(y) \rangle = (e_{ik}\,\partial_j \partial_\ell + \dots)\, G(x-y)\,, \tag{1.3}$$

где G — функция Грина для оператора Бельтрами-Лапласа, $\Delta = -e_{ij}\partial^i\partial^j$ и e_{ij} — метрика в $\mathcal{R}^4$. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство. Основной результат состоит в следующем. Для любого $\epsilon > 0$, в силу неравенства Чебышева,

$$\mu\{\omega \in \Omega : |\epsilon_{ijk\ell}\ \partial^j F_{k\ell}(x)| > \epsilon\} = 0, \tag{1.4}$$

т.е. мера μ имеет носитель на подмногообразии Ω°. Обозначим через $\mathcal{J}$ соответствующий евклидов инвариантный идеал в Σ. Выбирая направление времени $(1,0)$ в $\mathcal{R}^4$, найдем изоморфизм

$$\Sigma/\mathcal{J} \approx \sigma(\mathcal{Q} \cup \mathcal{B}^\circ), \tag{1,5}$$

где $\mathcal{Q}$, $\mathcal{B}^\circ$ — независимые σ-подалгебры, порождаемые случайными величинами $\rho = \partial^j E_j$ и B_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Здесь магнитное поле, удовлетворяющее $\epsilon_{0ijk}\ \partial^k B_{ij}(t, x) = 0$, является марковским процессом $t \in \mathcal{R} \to B_{ij}(t, x)$ на (Ω, Σ, μ). Таким образом получаем явный вид действия, в чатности, евклидов фотонный пропагатор

$$\mathcal{P} = \left(1 - \frac{\partial^2}{\beta^2 \partial t^2}\right)^{-1}, \tag{1.6}$$

где $\beta = \beta(x)$ — оператор поляризации. Заметим, что в физических единицах $0 \le \mathcal{P} \le hc[L^{-4}]$. Исследуя формулу Фейнмана — Каца, выводим закон Фарадея и канонические коммутационные соотношения, т.е. (1.1). К сожалению, здесь нет времени для обсуждения топологических свойств полной функции Грина (см. /6/). Вопрос о том, каким образом мера μ определяет функциональный интеграл для $A_i(x)$, $i = 0,1,2,3$, рассмотрен в отдельной работе /7/.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Пусть x^i, $i = 0,1,2,3$ — декартовы координаты точки $x = x^i e_i$ и e_{ij} — евклидова метрика относительно базиса $\{e_i : i = 0,1,2,3\}$. Выберем направление "времени" $e_0 = (1, 0)$. Будем обозначать $x = (t, x)$, где $x \in \mathcal{R}^3$. Пусть $\mathcal{S}$ — линейное пространство гладких вещественнозначных 2-форм

$$f = f_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j, \qquad f_{ij} \in \mathcal{S}_r(\mathcal{R}^4). \tag{2.1}$$

Пусть $\theta = dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ и $*$ — звездочный оператор Ходжа, заданный так, что выполняется тождество $dx^i \wedge *(dx^j) = e^{ij}\theta$. Определим скалярное произведение в $\mathcal{S}$ выражением

$$(u, v) = \int_{\mathcal{R}^4} u \wedge * v = \sum_{i<j} \int_{\mathcal{R}^4} u^{ij} v_{ij}\ \theta. \tag{2.2}$$

Оно расширяется на все гильбертово пространство элементов f, $f_{ij} \in L^2_r(\mathcal{R}^4)$. Пусть K — подпространство элементов z, для которых имеет место $dz = 0$, где $d = dt\partial_0 + d$ — оператор внешнего дифференцирования. На $\mathcal{R}^4$ нет гармонических 2-форм z, таких, что $(z,z) < \infty$. Вследствие этого K — замкнутое подпространство элементов вида $z = d\Theta$.

Лемма. Пусть $\Delta = d\delta + \delta d \ge 0$, где $\delta = *^{-1} d *$, и $G = \Delta^{-1}$ — функция Грина. Тогда $P^0 = d\delta D$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве $\bigoplus_{i<j} L^2_r(\mathcal{R}^4)$ на подпространство K. Его ядро имеет вид

$$P^0_{ijk\ell}(x, y) = (-e_{ik}\,\partial_j \partial_\ell + \ldots)\, G(x - y). \tag{2.3}$$

Доказательство: Пусть $f = z + \eta$, где $z = d\Theta$ — разложение Ходжа. Существует единственная 1-форма $\Theta = G(\delta z)$, для которой выполняется $\delta\hat{\Theta} = 0$. Используя $dd = 0$, получаем $z = dG(\delta f)$ (см. /8/). Выберем счетный базис $\{f(n) : n \in Z\}$ в $\mathcal{S}$, предположим, что $f(0) = 0$, $f(n) = d\Theta(n)$, если $n \ge 1$ и $f(n) = *d\Theta(-n)$, если $n \le -1$. Тогда 2-форма электромагнитного поля

$$F = dt \wedge E_j\, dx^j + B, \qquad x = (t, x) \in \mathcal{R}^4 \tag{2,4}$$

определяет координаты X^m, Y^n в пространстве $\Omega = \mathcal{S}'$ вещественных линейных функционалов на $\mathcal{S}$. Будем писать $F = (X(\omega), Y(\omega))$, $\omega \in \Omega$. В явном виде

$$X^m = (\Theta(m), \rho dt + (\partial^j B_{ij} - \dot{E}_i)\, dx^i), \qquad \rho = \partial^j E_j, \tag{2.5}$$

$$Y^n = \epsilon_{0ijk}\ (\Theta(n), (\partial^k B_{ij}\, dt + (\partial_i E_j - \partial_j E_i + \dot{B}_{ij}))), \tag{2.6}$$

где точка обозначает частную производную $\partial/\partial t$. Пусть $\Sigma = \sigma(\bigcup_{n \in Z} \Sigma(n))$, где σ — алгебра, порождаемая соответствующими цилиндрическими множествами в Ω. Для простоты можно предположить, что $f(n)$ ортонормированы, т.е. $(\Theta(m), d\delta\Theta(n)) = I^{mn}$, $m,n \ge 1$, где I^{mn} — символ Кронекера. Рассмотрим обобщенный гауссов процесс $f \in \mathcal{S} \to (f, F)$ на Ω со средним значением "0", и корреляционной функцией $(\cdot, P^0)$. Координаты X^m, Y^n — семейство случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), где μ — гауссова мера. Имеем $\langle X^m X^n \rangle = I^{mn}$, $\langle Y^m Y^n \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle X^m Y^n \rangle = 0$ для всех $m, m \ge 1$. Чтобы ответить на вопрос относительно вероятности данной конфигурации евклидова электромагнитного поля $F_{ij}(x)$, $x \in \mathcal{R}^4$, мы должны вычислить только меру $\mu(M)$ соответствующего множества $M \in \Sigma$. Если M — цилиндрическое множество в σ-подалгебре

$$\Gamma = \sigma\Big(\bigcup_{m\geq 1} \Sigma(m)\Big), \tag{2.7}$$

порождаемое всеми X^m, то вычислить меру просто, поскольку $\Sigma(m)$ стохастически независимы друг от друга. Квазимеры $\mu^{\#} = \mu / \overset{\#}{\bigcup\limits_{m=1}} \Sigma(m)$ факторизуются. Для выполнения условия локальности необходимо знать меру на всех $\Sigma(m)$. Существует единственное σ-аддитивное расширение μ на Σ. Соответствующая формальная плотность имеет вид

$$d\mu \approx e^{-X^2/2}\, dX \cdot I(Y)\, dY, \tag{2.8}$$

где I — функция Дирака. В электродинамике традиционно используют координаты $\vec{E}, \vec{B}$ или векторный потенциал $A_i(t, x)$, $i = 0,1,2,3$. Естественно поэтому возникает задача переписать выражение для плотности меры (2,8) в этих координатах. Это и будет целью настоящей работы.

3. ИЗОМОРФИЗМ ГАУССОВЫХ МЕР

Пусть $\Omega = \mathfrak{R}^2$, $(E(\omega), B(\omega))$ — координаты точки $\omega \in \Omega$, и Σ – σ — алгебра борелевских множеств. Если $M \in \Sigma$ — ограниченное множество, то мера Лебега $\lambda(M)$ существует. Умножая $d\lambda(E, B)$ на гауссово распределение, получаем вероятностную меру на

$$d\nu(E, B) = e^{-\frac{1}{2}(E^2 + B^2)}\,\frac{dE \cdot dB}{2\pi}, \quad (E, B) \in \mathfrak{R}^2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим

$$P^0(e, b) = \frac{\alpha e + \beta b}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha, \beta), \quad \beta > 0 \tag{3.2}$$

оператор проектирования в $\mathfrak{R}^2$ на вещественное подпространство K. P^0 диагонален в базисе $\{\gamma(\alpha, \beta),\ \gamma/(\beta, -\alpha)\}$ в $\mathfrak{R}^2$, где $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$. Пусть $c = \beta^{-1} \cdot \alpha$. Определим гауссов двумерный случайный процесс

$$f = (e, b) \in \mathfrak{R}^2 \to F = eE + bB \tag{3.3}$$

со средним значением $\langle F \rangle = 0$ и корреляционной матрицей P^0. Для переменных $X = \gamma(\alpha E + \beta B)$, $Y = \gamma(\alpha B - \beta E)$, которые тоже являются гауссовыми случайными величинами на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), найдем $\langle X^2 \rangle = 1$, $\langle Y^2 \rangle = 0$ и $\langle XY \rangle = 0$.

Лемма. Меры μ и ν взаимно сингулярны. Производная Радона-Никодима $d\mu/d\nu = (2\pi)^{1/2}\, I(Y)$, , где I — обобщенная функция Дирака. В явном виде

$$d\mu(E, B) = I(E - cB)\, dE \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(1 + C^2)B^2}\, dB}{(2\pi/(1 + C^2))^{1/2}}. \tag{3.4}$$

Доказательство: Пусть $F(s) = sX + (1 - s)Y$, $s \in (0,1)$. При помощи неравенства Чебышева

$$\mu\{\omega \in \Omega : |F(s)| \geq \epsilon\} \leq s^2 \cdot \epsilon^{-2}, \quad \epsilon > 0, \tag{3.5}$$

в пределе $s \to 0$ получаем замечательный результат: мера $\mu(M)$ цилиндрических множеств

$$M = \{\omega \in \Omega:\ Y(\omega) \in N\}, \quad N \cap (-\epsilon, \epsilon) = \emptyset \tag{3.6}$$

для любого $\epsilon > 0$ равна нулю. Такие множества порождают идеал $\mathfrak{J}$ в σ-алгебре Σ. Следовательно, меру μ можно "перенести" /9/ на фактор-алгебру $\Sigma/\mathfrak{J}$. Как это делается? Мера μ имеет носитель на подмногообразии

$$\Omega^0 = \{\omega \in \Omega:\ Y(\omega) = 0\}. \tag{3.7}$$

Сужение

$$d\mu^0(X) = e^{-X^2/2}\,\frac{dX}{(2\pi)^{1/2}}, \quad X \in \Omega^0, \tag{3.8}$$

корректно определяет меру μ на соответствующей σ-подалгебре $\Gamma \subseteq \Sigma$. Используя соотношение $\sigma(\mathfrak{J} \cup \Gamma) = \Sigma$, при условии $\mu(\mathfrak{J}) = 0$, найдем единственное расширение $d\mu = d\mu^0(X) \cdot I(Y)\, dY$ на Σ. Замена переменных $(X, Y) \to (E, B)$ дает (3.4). После интегрирования по переменной E остается сужение $\mu/\mathfrak{B}$ меры μ на σ-подалгебру $\mathfrak{B}$, порождаемую случайной величиной B. Пусть π-оператор ортогонального проектирования в $\Omega = \mathfrak{R}^2$ на линейное подмногообразие $\{\omega \in \Omega:\ E(\omega) = 0\}$. Тогда преобразование

$$M \in \Sigma \to M = \mathfrak{R} \times \Pi(M \cap \Omega^0) \tag{3.9}$$

является изоморфизмом вероятностных пространств (Ω, Σ, μ) и $(\Pi, \Omega, \mathfrak{B}, \mu/\mathfrak{B})$. Геометрия конструкции M^c представлена на рис. 1. Если $M = (E_1, E_2) \times (B_1, B_2)$ — цилиндрические множество в Σ, то легко видеть, что $M^c = \mathfrak{R} \times ((c^{-1}E_1, c^{-2}E_2) \cap (B_1, B_2))$. Как построить меру $\mu/\mathfrak{B}$?

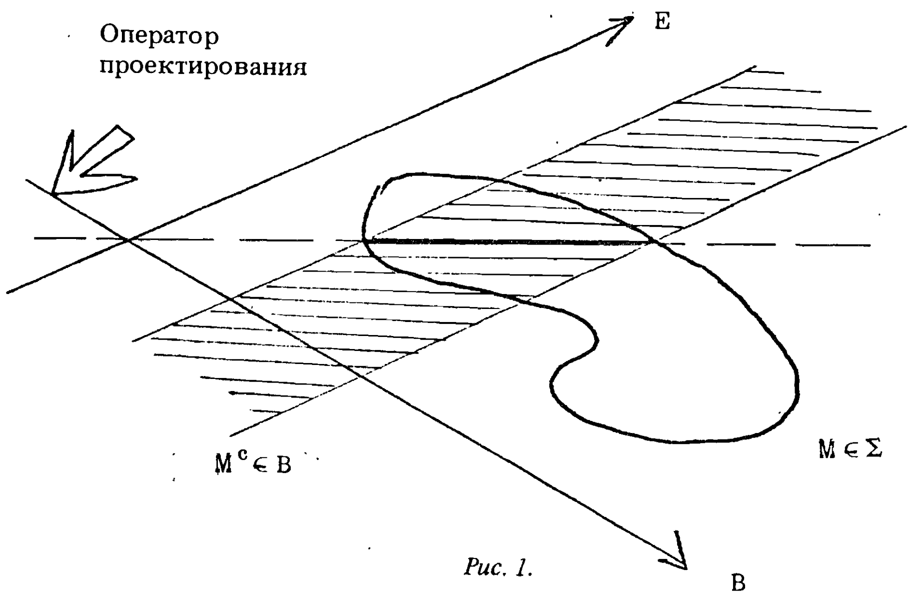

Рис. 1.

Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное подпространство в $\mathfrak{R}^2$ элементов вида $f = (0, b)$, с индуцированным скалярным произведением $(\cdot, P^0)$. $\mathfrak{L}$ — одномерное вещественное гильбертово пространство, изоморфное фактор-пространству $\mathfrak{R}^2/\ker P^0$. Из условия $P^0 P f = P^0 f$, для всех $f \in \mathfrak{R}^2$, найдем проектор $P: \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{L}$

$$P(e, b) = (0, c \cdot e + b), \quad c = \beta^{-1} \cdot a. \tag{3.10}$$

Подчеркнем, что P однозначно определен на K. Получаем $P(a, \beta) = (0, (1 + C^2)\beta)$. Окончательно $\langle B^2 \rangle = || P^0 P(0, 1) ||^2$, что согласуется с выражением (3.4).

4. ЕВКЛИДОВО ДЕЙСТВИЕ

Вернемся к евклидовой модели $E_{ij}(x)$, $x = (t, x) \in \mathfrak{R}^4$. Чтобы применить описанную выше конструкцию, мы должны подробно рассмотреть структуру электромагнитного поля. Для любого элемента $f \in \mathfrak{S}$ найдем

$$f = dt \wedge (e_j - \partial_j \phi) dx^j + b, \tag{4.1}$$

где ϕ, e и $b = b_{ij}(t, x)\, dx^i \wedge dx^j$ — формы степени 0,1,2. Если $\partial^j e_j(t, x) = 0$, то разложение однозначно. Заметим, что форма $dt \wedge d\phi$ точна, т.е

$$(dt \wedge d\phi, P^0(dt \wedge e + b)) = 0. \tag{4.2}$$

Вследствие этого гауссова мера μ факторизуется на $\sigma(\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{B}^0)$, где $\mathfrak{Q}, \mathfrak{B}^0$ обозначают σ-подалгебры в Σ, порождаемые случайными величинами $(d(\phi dt), F)$ и $(b_{ij}\, dx^i \wedge dx^j, F)$, где $db = 0$. Это означает, что нет корреляции между появлением электрического заряда и магнитного тока. Физический смысл остальных переменных легко видеть из соотношения (2.6). Пусть $h_{(t_1, t_2)}$ — характеристическая функция временного слоя $(t_1, t_2) \times \mathfrak{R}^3$ в $\mathfrak{R}^4$ и $u_{ij} \in \mathfrak{S}_r(\mathfrak{R}^3)$. Тогда $(*\Theta, dF) = 0$, где $\Theta = \epsilon_{0ijk}\, h_{(t_1, t_2)}(t)\, u_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$, запишется

$$\int_{\mathfrak{R}^3} d^3x\, u^{ij}(x) \left(\int_{t_1}^{t_2} dt\, (\partial_i E_j - \partial_j E_i) + \sum_{t \in \partial(t_1, t_2)} B_{ij}(t, x) \right) = 0. \tag{4.3}$$

Действительно, если $|\ell(t)| \le 1$, где ℓ — гладкая функция, равная нулю вне интервала (t_1, t_2), то оба слагаемые $(*d\Theta, F)$ являются гауссовыми случайными величинами на (Ω, Σ, μ). Используя оценку

$$\langle (\ell dt \wedge \delta u, F)^2 \rangle = || P^0(\ell\, dt \wedge a) ||^2 < \epsilon \cdot || a ||^2, \quad \epsilon = (t_2 - t_1) > 0, \tag{4.4}$$

где $a = \delta u$, без труда перейдем к пределу $\ell \to h_{(t_1, t_2)}$. Закон Фарадея в нашей формулировке модели обусловлен существованием идеала $\mathfrak{J} = \sigma(\bigcup_{k=1,2,3} \mathfrak{J}_k)$ в Σ. Подобное слагаемое $\mathfrak{J}_0$ евклидово-инвариантного идеала $\mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{J}_0 \cup \mathfrak{J})$ дает $\epsilon_{0ijk}\, \partial^k B_{ij}(t, x) = 0$. $\mathfrak{J}$ порождается множествами $M^n = \{ \omega \in \Omega: Y \in N \}, n = 1, 2, \ldots$, где $N \quad (-\epsilon, \epsilon) = \emptyset$. Легко видеть, что, например,

$$M^1 \cup M^2 \subseteq \{ \omega \in \Omega: \max(|Y^1|, |Y^2|) \ge \delta \}, \tag{4.5}$$

где $\delta = \min(\epsilon^1, \epsilon^2)$. Следовательно, $\Omega \notin \mathfrak{J}$, и поскольку $\ker P^0$ — замкнутое подпространство в S, то $\mathfrak{J}$ — собственный замкнутый идеал в σ-алгебре Σ. Наш основной результат относительно структуры меры μ заключается в том, что по аналогии с двумерной моделью, описанной в разделе 3, существует изоморфизм σ-алгебр с мерой.

Теорема 1.

$$\Sigma / \mathfrak{J} \approx \sigma(\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{B}^0). \tag{4.6}$$

Доказательство: Убеждаемся, что из каждого класса эквивалентности $[f]$, где $f = dt \wedge (e_j - \partial_j \phi)\, dx^j + b \in \{S, (\cdot, P^0)\}$, единственным образом можно взять элемент $z = Pf$, $dz = 0$. Действительно, пусть $z = d(a_0 dt + a_j dx^j)$. Сразу найдем $a_0 = \phi$. Затем $z = da$ определяем из условия $\delta(f - z) = 0$, т.е. в явном виде $d*(b - z) - e = 0$. Получаем

$$Pf = d(\phi dt) + (Cb + \beta^{-1}\dot{e}),\tag{4.7}$$

где $\beta = d^*$, $C = d\delta(\Delta^{-1})$ и $\Delta \geq 0$ — оператор Бельтрами — Лапласа в $\mathfrak{R}^3$. Нетрудно обнаружить аналогию с (3.10). Обозначим R — "электромагнитную" часть проекционного оператора P.

Лемма. Пусть $\mathfrak{L}$ — гильбертово пространство элементов вида $z = da$ с индуцированным скалярным произведением $(\cdot, P^0)$. Система функций

$$z = i_s Cu, \quad u_{ij} \in \mathbb{S}_r(\mathfrak{R}^3),$$

где $i_s(t)$, $s \in \mathfrak{R}$ — временной сдвиг функции Дирака является полной.

Доказательство:

$$\langle (i_s u, F)^2 \rangle = \frac{1}{2} \| \beta^{1/2} (Cu) \|^2,\tag{4.9}$$

т.е. $u = u_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j \to i_s Cu$, для любого фиксированного $s \in \mathfrak{R}^3$, непрерывное вложение пространства $\underset{i<j}{\oplus} \mathbb{S}_r(\mathfrak{R}^3)$ в $\mathfrak{L}$ и образ, плотный в $\mathfrak{L}_s$ (см. /10, 11/).).

Теорема 2.
Семейство

$$t \in \mathfrak{R} \to (i_t u_1 F) = \int_{\mathfrak{R}^3} d^3x\, u^{ij}(x)\, B_{ij}(t, x),\tag{4.10}$$

где $u_{ij} \in \mathbb{S}_r(\mathfrak{R}^3)$ есть стационарный марковский процесс на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Трансферматрица полностью определяется мерой $\mu/\mathfrak{B}^0$. Евклидов фотонный пропагатор — это функция Грина $\mathcal{P}$ для положительного оператора

$$D = 1 - \frac{\partial^2}{\beta^2 \partial t^2}\Big|_{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{L}.\tag{4.11}$$

Доказательство: Скалярное произведение $(\cdot, RP^0R\,\cdot)$ определяет самосопряженный оператор $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$ на $\mathfrak{L}$. Вследствие этого имеет место тождество $dD\delta = \Delta/\mathfrak{D}$, на некотором плотном $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{L}$. Заметим, что D — локальный дифференциальный оператор второго порядка переменной евклидова времени $t \in \mathfrak{R}$.

Рассмотрим фурье-образ $f = f_m(k)$, где $k = (k^0, k) \in \mathfrak{B}^4$ и $m = 1,2,3$, функции $\epsilon_{0ijm} z_{ij}$, $z \in \mathfrak{L}$. При помощи тождества $\epsilon_{0ijm}\, \epsilon_{0i\ell n} |k|^{-2} k^j k^\ell = C$ для матричных элементов проекционного оператора $C = d\delta(\Delta^{-1})$ можно переписать

$$(z, RP^0Rz) = \int_{\mathfrak{R}^4} \frac{dk^0 d^3k}{|k^0|^2 + |k|^2} |k|^2 C^{mn} f_m(k)\, f_n(k).\tag{4.12}$$

Если z - нормированная функция в $\mathfrak{L}$, тогда соответствующее f должно удовлетворять условию трехмерной поперечности $k^m f_m(k^0, k) = 0$. Вследствие этого задача на собственное значение оператора β сейчас запишется

$$i\epsilon_{0\ell mn} k^m f_n = \pm |k| f_\ell,$$

т.е. β имеет обратный оператор. Мы его будем обозначать β^{-1} (см. /12/).

Пусть $\Sigma(t_1, t_2)$ — подалгебра в Σ, порождаемая случайными величинами (f, F), где $f_{ij} \in S_1((t_1, t_2) \times \mathfrak{R}^3)$ для всех индексов $i,j = 0,1,2,3$. Тогда, обозначая $\epsilon = (t_2 - t_1) > 0$, получаем на первый взгляд парадоксальный результат

$$\lim_{\epsilon \to +0} \Sigma(t_1, t_2) \cap \Omega^0 = \emptyset.\tag{4.13}$$

Действительно, ввиду $\langle (d(\phi dt)^2_, F) \rangle = (\phi, \Delta\phi)$ и (4.3), (4.4) легко видеть, что евклидово электрическое поле нельзя локализовать на гиперплоскостях $\{x = (t, x) \in \mathfrak{R}^4 : t = s\}$, т.е. $\sigma(\underset{s \in \mathfrak{R}}{\cup} \Sigma_s) = \mathfrak{B}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.
Пусть

$$S(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \iint_{(t_1, t_2) \times \mathfrak{R}^3} dt\, d^3x (E^2 + B^2),\tag{4.14}$$

где $E = -d\Phi + \beta^{-1}\dot{B}$ и $dB = 0$. Формальное тождество

$$d\mu / \sigma(\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{B}^0) \approx \exp(-S)\, d\Phi dB$$

определяется точно при помощи изоморфизма (4.5). Следовательно, мера евклидово-инвариантна.

5. ЗАКОН ФАРАДЕЯ

Как было показано выше, $\mu/\mathfrak{B}$ имеет структуру меры Винера, т.е. полностью определяется совместными распределениями семейств случайных величин

$$\{B(s_n, u(n)) : n = 1, 2, 3, \dots, N\},\tag{5.1}$$

где взамен (4.10) мы будем использовать краткую запись $t \in \mathcal{R} \to B(t,u)$. Если $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_N$, вследствие марковского свойства для соответствующих временно упорядоченных моментов, при помощи трансферматрицы получаем формулу Фейнмана — Каца /13/. Пусть $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\Sigma_0,\mu)$ — "физическое" гильбертово пространство и $\{T_s : s \in \mathcal{R}\}$ — группа унитарных операторов сдвига $x = (t, x) \in \mathcal{R}^4 \to (t+s, x)$ в $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Для любого $s \ge 0$ имеет место

$$<B(0,u)\,B(0,v)> = (1,\ B(0,u)\ T_s\ B(0,v)\ 1) = (i_0 u, d\delta(\Delta^{-1})i_s v) =$$

где $w = +\Delta^{1/2}$ и

$$= \frac{1}{2}(Cu,\ wC(e^{-sw}v)),$$

$$\Psi \in \mathcal{H} \to E(T_s \Psi | \Sigma\ ),\quad s \ge 0, \tag{5.3}$$

трансферматрица. Здесь $E(v|\Sigma_0)$ — условное математическое ожидание случайной величины v.

Лемма. Пусть $P_0 : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_0$ — оператор ортогонального проектирования. Тогда семейство сжатия $\{P_0 T_s, s \ge 0\}$ определяет полугруппу в вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_0$, которое изоморфно

$$\{\bigoplus_{i<j} S_r(\mathcal{R}^3),\ \frac{1}{2}(\cdot, CwC\cdot)\}. \tag{5.4}$$

Доказательство: Легко видеть, что $\pi\Psi = \Psi$ для всех $\Psi \in \mathcal{H}$, где π — унитарный симметричный оператор отражения $x = (t,x) \in \mathcal{R}^4 \to (-t, x)$ в $L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Действительно, функция Дирака $i_s(t)$, если $s \in \mathcal{R}$, является инвариантной относительно отражения переменной $t \in \mathcal{R} \to -t$. Исследуя билинейную эрмитовскую форму $\frac{1}{2}\cdot(\cdot, CwC\cdot)$, получаем явный вид меры

$$d\mu|\Sigma_0 \approx |V_0(B)|^2 dB, \tag{5.5}$$

где V_0 — вакуум в представлении Шредингера. Поскольку трансферматрица $\exp(-H)$, где $H \ge 0$ — гамильтонов оператор, сохраняет положительность, фазовый множитель единственным образом можно выбрать так, чтобы имело место почти всюду $V_0(B) > 0$. Очевидно, H является вторичным квантованием оператора $w = +\Delta^{1/2}$ в $\mathcal{L}_0$. Заметим, что для малых $\epsilon > 0$

$$<B(0,u)\,B(0,v)> \approx \frac{1}{2}(\delta u,\ w^{-1}(1-\epsilon w)\,\delta v), \tag{5.6}$$

т.е. оценка (4.4) оптимальна. Пусть h — ступенчатая функция Хевисайда. Получаем тождество

$$h_{(t_1,t_2)} = (T_\epsilon - 1)\,T_{t_1} h,\quad \epsilon = (t_2 - t_1) \ge 0, \tag{5.7}$$

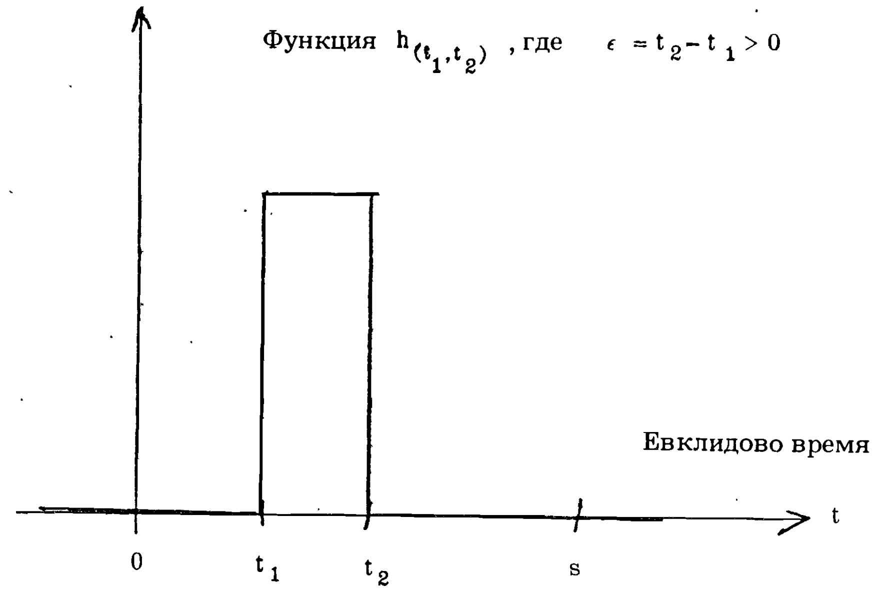

Рис. 2.

Теорема 4.

Для любого $s \ge 0$ и многочленов U, V переменных $B(0,\cdot)$ существует предел

$$\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon^{-1} <U(h_{(0,\epsilon)} dt \wedge \delta u, F)\,V_s> = (1, U[H, B(0,u)]\,e^{-sH}\ V1), \tag{5.8}$$

где V_s сдвиг V. Следовательно, сингулярная случайная величина $(i_0 dt \wedge \delta u, F)$, $\mu_{ij} \in S_r(\mathcal{R}^3)$ служит определением неограниченного симметричного оператора в $\mathcal{H}$ поперечного электрического поля $E(0,\delta u)$.

Доказательство: Объясним идею на примере квантовомеханической модели с гамильтоновым оператором $H = \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 x^2 - 1)$, $\beta = 1$. Рассмотрим случайный гауссов процесс $t \in \mathcal{R} \to (v(t), q(t))$ со средним значением нуль и

$$<((e,b),F)^2> = \left\|\left(1 - \frac{d^2}{dt^2}\right)^{-1/2}\left(b - \frac{de}{dt}\right)\right\|^2, \tag{5.9}$$

где $(e,b) \in S_r(\mathcal{R}) \oplus S_r(\mathcal{R})$. Пусть (Ω,Σ,μ) — вероятностное пространство для F. Полагая $(e,b) = (h_{(t_1,t_2)}, \frac{d}{dt} h_{(t_1,t_2)})$, легко видеть, что почти всюду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, v(t) = q(t_2) - q(t_1), \tag{5.10}$$

т.е. мера μ имеет носитель на линейном подмногообразии Ω^0 в Ω. По аналогии с (3.4) сужение $\mu/\mathcal{Q}$ на σ-подалгебру $\mathcal{Q}$, порождаемую $q(t)$, $t \in \mathcal{R}$, окажется известной винеровской мерой. Формально ее плотность

$$d\mu/\mathcal{Q} \approx e^{-\frac{1}{2}(q,(I - \frac{d^2}{dt^2})q)} dq(\cdot) \tag{5.11}$$

получается проинтегрированной по скоростям $v(t)$, $t \in \mathcal{R}$. Пусть U, V будут многочленами по координате $z\,x = q(0)$ осциллятора в нулевом моменте времени. Они являются неограниченными симметрическими операторами в "физическом" гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma_0, \frac{e^{-x^2}dx}{\sqrt{\pi}})$. Если $t_1, t_2 \in (0, s)$, то ввиду формулы Фейнмана — Каца

$$\sum_{t \in \partial(t_1, t_2)} \langle U(q(0))\, q(t)\, V(q(s)) \rangle = (U e^{-t_1 H}(e^{-\epsilon H} x - x e^{-\epsilon H}) e^{-(s-t_1)H} V) \approx$$

$$\approx -\epsilon\, (U, e^{-t_1 H} [H, x]\, e^{-(s-t_1)H} V) \tag{5.12}$$

(см. рис. 2). Умножая обе стороны тождества на $i\epsilon$, в пределе $\epsilon \to +0$ получаем точное уравнение Гейзенберга $p = i[H, x]$. Плотное множество в $\mathcal{H}$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\Psi \in \mathcal{H} : \|(I + H^k)\Psi\| < \infty\} \tag{5.13}$$

является областью определения симметричного оператора p. В нашей модели евклидовы электромагнитные поля $F_{ij}(x)$, $x = (t, x) \in \mathcal{R}^4$, мы найдем следующим образом частный результат: пусть $\Psi = B(0, u) I$, где $u_{ij} \in S_r(\mathcal{R}^3)$, гладкое 1-фотонное состояние в $\mathcal{H}$. Тогда действие гамильтонова оператора

$$H\Psi = B(P, w \cdot k), \quad w = +\Delta^{1/2},$$

эквивалентно "превращению" Ψ в состояние $-i \cdot E(0, \delta u) I$. Здесь мы использовали (5.8) и $HI = 0$. Очевидно, если Θ — гиперплоскость в $\mathcal{R}^3$, то случайная величина (Ω, Σ, μ)

$$B(s, \Theta) = (i_s u(\Theta), F) = \int_\Theta B_{ij}(s, x)\, dx^i \wedge dx^j \tag{5.15}$$

будет сингулярной, т.е. $\langle B(0, \Theta)^2 \rangle = \infty$. Тем не менее, если Θ_1, Θ_2 — такая пара, что граничные петли $\ell_n = \partial\Theta_n$, $n = 1,2$ не имеют совместной точки, то предел корреляции

$$\lim_{s \to +0} \langle B(0, \Theta_1)\, B(s, \Theta_2) \rangle = \iint_{\ell_1 \times \ell_2} \frac{e_{ij}\, dx^i dy^j}{(2\pi)^2 |y - y|^2} \tag{5.16}$$

существует. Более того,

$$i[H, B(0, \Theta)] = E(0, \partial\Theta). \tag{5.17}$$

6. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Пусть $K_{(t_1, t_2)}$ — пополнение линейного полупространства 2-форм $f = f_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$, где

$$f_{ij} \in S_r((t_1, t_2) \times \mathcal{R}^3), \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \tag{6.1}$$

в $\{S, (\cdot, P^0 \cdot)\}$. Можно рассматривать $K_{(t_1, t_2)}$ как замкнутое подпространство в K. Это значит — для любого $f \in K_{(t_1, t_2)}$ в соответствующем классе эквивалентности $[f]$ существует единственный элемент $f^0 = P^0 f$ такой, что выполняются условия $df^0 = 0$ и $\operatorname{supp} f_{ij} \subseteq [t_1, t_2] \times \mathcal{R}^3$, $i, j = 0,1,2,3$. Легко видеть, что проекционный оператор $P: K \to \mathcal{L} \oplus \{d(\phi dt)\}$ "усиливает" локализацию относительно переменной евклидова времени $t \in \mathcal{R}$. Имеем $Pf = f$, для $f = d(\phi\, dt)$. Для того, чтобы $f \in K_{(t_1, t_2)} \ominus \{d(\phi dt)\}$, необходимо и достаточно

$$z = Rf =$$

$$= \ell \otimes Cu, \quad \operatorname{supp} \ell \subset [t_1, t_2]. \tag{6.2}$$

Действительно, $f^0 = da \in K \ominus \{d(\phi dt)\}$, тогда и только тогда, когда $a = a_0 dt + a_j dx^j$ удовлетворяют $a_0 = 0$ и $\delta a = 0$. Используя еще раз тождество в S

$$*d\Theta = \ell dt\ \ \delta u + \dot{\ell} \otimes u \in \ker P^0, \tag{6.3}$$

где $\Theta = \epsilon_{0ijk}\, \ell(t)\, u_{ij}(x)\, dx^k$, получаем искомое разложение

$$f^0 = dt \wedge \dot{a} + da =$$

$$= \left(1 - \frac{\partial^2}{\beta^2 \partial t^2}\right) da + {}^*d(\beta^{-1}\dot{a}) . \qquad (6.4)$$

Результат

$$z = R(da) =$$

$$= D(da) \qquad (6.5)$$

согласуется с (4.7) и отношением $P^0 | \mathfrak{L} = D^{-1}$. Сейчас мы готовы понимать марковское свойство относительно плоскости $\{x = (t, x) \in \mathfrak{R}^4 : t = 0\}$ на уровне евклидова 1-частичного гильбертова пространства K. Используя (6.5) и $(\phi, \Delta\pi\phi) = 0$, если $\phi \in S_r(\mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^3)$, его можно записать так:

Лемма. Пусть $\mathfrak{L}_+$ — пространство в $\mathfrak{L}$ элементов вида $z = \ell \otimes Cu$, где $\operatorname{supp} \ell \subset \mathfrak{R}_+$. По аналогии определим $\mathfrak{L}_-$. Тогда имеет место

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \cup \mathfrak{L}_- . \qquad (6.6)$$

Доказательство: Очевидно, $\mathfrak{L}_+ \quad \mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L}_0$. Используем метод Дирихле. Рассмотрим эллиптическое уравнение $z = D\Phi$, где $\Phi = da$. Пусть $z \in \mathfrak{L} \ominus \mathfrak{L}_+$, т.е. для всех $u_{ij} \in S_r(\mathfrak{R}^3)$ и любого $s \geq 0$ проекция

$$(i_s Cu, P^0 D\Phi) = (\delta u, a(s, \cdot)) \qquad (6.7)$$

равна нулю. Это значит, что потенциал Φ имеет носитель в полупространстве $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^3$, и, следовательно, $z = D\Phi \in \mathfrak{L}$, поскольку D — локальный дифференциальный оператор переменной $t \in \mathfrak{R}$. Для соответствующих проекционных операторов $P_\pm$ в $\mathfrak{L}$ следует соотношение $(1 - P_+) \subseteq P_-$, т.е. P_+, P_- коммутируют. Отсюда получаем $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \oplus (\mathfrak{L} \ominus \mathfrak{L}_0)$. Более того, найдем для $f = f_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$ в S

$$(f, d\delta(\Delta^{-1})\Pi f) \geq 0, \qquad f_{ij} \in S_r(\mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^3). \qquad (6.8)$$

Это условие положительности Остервальдера — Шрадера [14]. Формальное действие оператора П обращения времени на 2-форму вида $f = dt \wedge e_j(t, x)\, dx^j \in S$

$$\Pi f = -dt \wedge e_j(-t, x)\, dx^j . \qquad (6.9)$$

Полагая $f = h dt \wedge \delta u$, где h — функция Хевисайда, получаем $Rf = i_0 Cu \in \mathfrak{L}_0$ и в силу (6.3) $\Pi f = f$ физическое объяснение этого парадокса следующее: используя (5.8), заменяя $s \to \tau - i\epsilon$, состояние $\Psi = B(0,u)\, 1$ можно переписать так:

$$\Psi = E((h\,dt \wedge \delta u,\ F)/\Sigma_0) = \int_0^\infty ds\, e^{-sH}(i_0 dt \wedge \delta u,\ F)\, 1 =$$
$$= (\epsilon + iH)^{-1} E(0, \delta u)\, 1, \quad \epsilon > 0, \qquad (6.10)$$

т.е.

$$\left(\int_{-\infty}^0 d\tau\, e^{\tau\epsilon} (e^{i\tau H} E(0, \delta u) e^{-i\tau H}) - B(0, u)\right) 1 = 0. \qquad (6.11)$$

Обобщая это тождество на все физическое гильбертово пространство, мы получаем представление $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Gamma_0, \mu)$, где $\Gamma_0\sigma$ — подалгебра в $\Sigma_+/\mathcal{J}$ является прообразом $\Sigma_0 \subseteq \sigma(\mathcal{Q} \cup \mathcal{B}^0)$ относительно фундаментального изоморфизма (4.6).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наконец, мы будем выводить канонические коммутационные соотношения для полей E, B. Достаточно рассмотреть вакуумные средние. При помощи (5.6) получаем

$$(1,\ B(0, u)\, B(0, v)\, 1) = \frac{1}{2}(u,\ d\delta v) \qquad (7.1)$$

и

$$(1, [E(0, \hat{c}), B(0, v)]\, 1) = -i(c, \delta v), \qquad (7.2)$$

где $\hat{c} = \delta d(\Delta^{-1})c$, соответствующее операторному тождеству $[p, x] = -i \cdot 1$ в модели гармонического осциллятора. Подставляя $u = u(\Theta_1)$ и $v = u(\Theta_2)$, ввиду (5.16), (5.17) найдем сингулярное выражение

$$(1, [E(0, \ell_1), B(0, \Theta_2)]\, 1) = -i \cdot I(\ell_1, \ell_2), \qquad (7.3)$$

где $\ell_n = \partial\Theta_n$, $n = 1,2$ — граничные петли гиперповерхностей в трехразмерном пространстве $\mathfrak{R}^3$. Для любого $\epsilon = (t_2 - t_1) > 0$ определим случайную величину

$$F(\epsilon) = (d(h_{(t_1, t_2)} \otimes c),\ F) = \sum_{s \in \partial(t_1, t_2)} (i_s dt\ c, F) + \int_{t_1}^{t_2} ds\, B(s, dc), \qquad (7.4)$$

где $c = c_j(x)\, dx^j$ — гладкая 1-форма на $\mathfrak{R}^3$. В частности, если интервалом времени выберем $(-\epsilon, \epsilon)$, то легко видеть, что выражение

$$<F(\epsilon)B(0,v)> = (d(h_{(-\epsilon,\epsilon)}\otimes c),\ P^0(i_0\otimes v)) = h_{(-\epsilon,\epsilon)}(0)\cdot(dc, v) \quad (7.5)$$

независимо от параметра $\epsilon > 0$. В пределе $\epsilon \to +0$ второе слагаемое разложения (7.4) исчезает. Используя (5.8), можно показать, что $F(\epsilon)\times B(0,v) \to -i[E(0,\hat{c}),\ B(0,v)]$, в смысле формулы Фейнмана — Каца. Пусть $c = {}^*u(\Theta)$, , где $*$ обозначен звездочкой оператор Ходжа в $\mathfrak{R}^3$. Поскольку $\delta c \neq 0$, то сингулярная случайная величина

$$E(0,c) = \epsilon_{0ijk} \int_{\Theta_1} E_k(0,x)\, dx^i \wedge dx^j \quad (7.6)$$

имеет проекцию на сектор $\mathfrak{Q}$ зарядов, и мы получаем "топологические" коммутационные соотношения [16]. Таким образом, мы вернулись к нашей исходной точке (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jordan W., Pauli W. – Z. für Phys., 1928, 47, p.151.*
2. *Bjorken J.D., Drell S.D. Relativistic quantum fields. Mc Graw-Hill. (Русский перевод М.: Наука, 1978, т.2, с.75).*
3. *Wightman A.S., Strocchi F. – J. Mat. Phys., 1974, 15, p.2198.*
4. *Фаддеев Л.Д. – ТМФ, 1969, 1, с.1.*
5. *Gross L. – J. Funct. Anal., 1985, 63, p.1.*
6. *Löffelholz J. Currents on the torus. Proceed. Int. Conf. on Math. Phys., Varna (Bulgaria), 1982.*
7. *Löffelholz J. Probability theory and gauge invariance. Preptint KMU Leipzig, 1987.*
8. *Flanders H. Differential forms with appl. to the physical sciences, A.P., New York/London, 1983.*
9. *Simon B.. The $P(\phi)_2$ Eucl. (Quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974. (Русский перевод: М.: Мир, 1976.*
10. *Richtmyer R.D. Principles of Advanced Math. Physics, Springer N.Y. Heidelberg/Berlin, 1978. (Русский перевод: М.: Мир, 1982, т.1, с.145.).*
11. *Simon B. – Helv. Phys. Acta, 1974, 46, p.686.*
12. *Gurra F., Loffredo M.I. – Lett. Nuovo Cimento, 1980, 27, p.41.*
13. *Nelson E. – J. Funct. Anal., 1973, 12, p.97.*
14. *Osterwalder K., Schrader R. – Comm. Math. Phys., 1973, 31, p.83.*
15. *Зиновьев Ю.М. – ТМФ, 1981, 49, с.156; 1982, 50, с.207.*
16. *Widom A. – J. Low. Temp. Phys., 1979, 37, p.449.*

Рукопись поступила в издательский отдел
4 июня 1987 года.

Лёффельхольц Ю. **P2-87-386**

Евклидова мера для электромагнитного поля

Дан евклидов подход к квантованию электромагнитного поля $F_{ij}(x)$, $x = (t, \underline{x}) \in \mathfrak{R}^4$, которое рассматривается как семейство координат на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Основной результат — это явная конструкция изоморфизма $\Sigma/\mathfrak{J} \approx \sigma(\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{B}^0)$, где $\mathfrak{J}$ — инвариантный идеал, соответствующий закону Фарадея, $\mathfrak{Q}, \mathfrak{B}^0$ — независимые σ-подалгебры. В частности, сужение $\mu/\mathfrak{B}^0$ — винеровская мера марковского случайного процесса $t \in \mathfrak{R} \to B_{ij}(t, \underline{x})$, из которого при помощи формулы Фейнмана — Каца можно вывести фотонный пропагатор.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Löffelholz J. **P2-87-386**

Euclidean Measure for the Electromagnetic Field

We give a rigorous Euclidean approach to the quantization of the electromagnetic field $F_{ij}(x)$, $x = (t, \underline{x}) \in \mathfrak{R}^4$, which we consider as family of coordinates an some probability space (Ω, Σ, μ). Our main result is the construction of an isomorphism $\Sigma/\mathfrak{J} \approx \sigma(\mathfrak{Q} \cup \mathfrak{B}^0)$, where the ideal $\mathfrak{J}$ corresponds to Faraday's law and $\mathfrak{Q}, \mathfrak{B}^0$ are σ-subalgebras. In particular, the restriction $\mu/\mathfrak{B}^0$ appears to be the part space measure for a Markov process $t \in \mathfrak{R} \to B_{ij}(t, \underline{x})$. Using a Feynman-Kac formula we derive the photon propagator.

The investigation has been parformed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987