объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р2-87-376

В.И.Бородулин*, А.П.Исаев

# ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФЕРМИОННОЙ СТРУНЫ В СУПЕРПОЛЕВОМ ГАМИЛЬТОНОВОМ ПОДХОДЕ

Направлено в журнал "Zeitschrift für Physik C"

*Институт физики высоких энергий, Серпухов

1987

## Введение

В последнее время модели релятивистских струн вызывают огромный интерес в качестве динамических основ для построения единых теорий поля. В 1984 году были открыты теории в десятимерном пространстве-времени, возникающие как низкоэнергетический предел суперструнных моделей /I,2/ и обладающие замечательным свойством - отсутствием расходимостей и квантовых аномалий /I-3/. Размерность пространства-времени при этом определялась тем фактором, что суперструнные модели корректно квантуются только при $D = 10$. Для построения реальной теории необходимо компактифицировать 6 "лишних" измерений из 10 и при этом не нарушать основного свойства - отсутствия аномалий и расходимостей. Несмотря на большое число работ, посвященных решению этой задачи, до сих пор нет единого мнения о том, какова структура шестимерного компактифицированного пространства. В связи с этим нам кажется, что и сейчас остаются актуальными попытки построения корректных квантовых теорий сразу в четырехмерном пространстве-времени.

В настоящей работе мы исследуем возможность применения методов квантования бозонной струны, предложенных в работе /4/, к теории замкнутой фермионной струны (ФС). Основным пунктом при этом является построение бесконечного набора интегралов движения и исследования вспомогательной спектральной задачи для ФС. Полученные в нашей работе результаты открывают путь к так называемому квазиклассическому квантованию ФС, которое в настоящий момент исследуется и будет опубликовано в ближайшее время.

Следует отметить, что построенные интегралы движения и развитые при этом методы имеют и самостоятельный интерес: например, для построения вершинных операторов /5/, изучения бесконечномерной алгебры законов сохранения /6/, а также для исследования двумерных конформных теорий /7/, в том числе для исследования теорий релятивистских струн на групповых многообразиях /5,8/.

Мы исследуем ФС в гамильтоновом подходе, причем не фиксируем изначально множители Лагранжиана, а считаем их на всех этапах рассмотрения произвольными функциями. Это позволяет нам строить законы сохранения, которые автоматически являются калибровочно-инвариантными. Всё рассмотрение проводится на суперполевом языке, с помощью которого удается записать гамильтоновы уравнения в компактной форме. Отметим, что эта техника может быть получена также исходя из суперполевой лагранжевой формулировки ФС /9/.

Работа организована следующим образом. В первой части обсуждается гамильтонова формулировка ФС и ее связь с лагранжевой формулировкой. Во втором разделе вводится суперполевой гамильтонов формализм для ФС и решена задача Коши для гамильтоновых уравнений движения. Третий раздел работы посвящен исследованию интегрируемости ФС. В этой части изучается вспомогательная спектральная задача и строится бесконечный набор интегралов движения для ФС. В четвертом пункте показано, каким образом можно строить вершинные операторы, описывающие взаимодействие ФС с безмассовыми полями. В заключении кратко изложены полученные результаты.

В работе использовались следующие обозначения: $\dot{\varphi}(\sigma,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\sigma,\tau)$, $\varphi'(\sigma,\tau)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\sigma,\tau)$ , $\delta(\sigma-\sigma')=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in(\sigma-\sigma'))$.

## I. Гамильтонова формулировка фермионной струны

Состояние замкнутой фермионной струны (ФС) в гамильтоновом подходе задается следующим набором полей /10/ (гамильтоновых переменных): $x_\mu(\sigma,\tau)=x_\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ - вектор- функция, определяющая мировую поверхность струны, вложенную в $D$ -мерное пространство-время с метрикой $\eta_{\mu\nu}(-,+,+,\dots,+)$ ; $p_\mu(\sigma,\tau)=p_\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ - плотность энергии-импульса струны в точке $\sigma$ в момент "времени" $\tau$ ; $\psi_L^\mu(\sigma,\tau)=\psi_L^\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ и $\psi_R^\mu(\sigma,\tau)=\psi_R^\mu(\sigma+2\pi,\tau)$ - антикоммутирующие поля, определяющие фермионные степени свободы на струне; $\sigma\in[0,2\pi]$ -параметр на струне, $\tau$ -параметр эволюции.

Гамильтонова структура ФС задается следующими каноническими суперскобками Пуассона /10/:

$$\{x_\mu(\sigma,\tau),p_\nu(\sigma',\tau)\}=\eta_{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma'), \tag{Ia}$$

$$\{\psi_L^\mu(\sigma,\tau),\psi_L^\nu(\sigma',\tau)\}=\{\psi_R^\mu(\sigma,\tau),\psi_R^\nu(\sigma',\tau)\}=-i\eta^{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma'), \tag{Iв}$$

(остальные суперскобки равны нулю).

Хорошо известно, что модель ФС является вырожденной гамильтоновой системой. Это значит, что гамильтоновы переменные, определяющие состояние ФС, не являются независимыми и связаны некоторыми соотношениями (связями), которые в наших обозначениях имеют вид

$$F_R(\sigma,\tau)=a_\mu(\sigma,\tau)\psi_R^\mu(\sigma,\tau)=0,\ F_L(\sigma,\tau)=b_\mu(\sigma,\tau)\psi_L^\mu(\sigma,\tau)=0, \tag{2}$$
$$T_R(\sigma,\tau)=\frac{1}{4}a^2+\frac{i}{2}\psi_R^\mu\psi'_{R\mu}=0,\ T_L(\sigma,\tau)=-\frac{1}{4}b^2+\frac{i}{2}\psi_L^\mu\psi'_{L\mu}=0.$$

Здесь мы положили $a_\mu=p_\mu+x'_\mu$, $b_\mu=p_\mu-x'_\mu$. Легко проверить, что



функции связей $F_R$, $F_L$, $T_R$ и $T_L$ относительно суперскобок (I) образуют супералгебру. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\{F_\alpha(\sigma,\tau),F_\beta(\sigma',\tau)\}=-2i\,c_\alpha\,\delta(\sigma-\sigma')\,T_\alpha(\sigma,\tau)\,\delta_{\alpha\beta},$$
$$\{F_\alpha(\sigma,\tau),T_\beta(\sigma',\tau)\}=-\frac{1}{2}\left(F'_\alpha(\sigma,\tau)\delta(\sigma-\sigma')+3F_\alpha(\sigma',\tau)\delta'(\sigma'-\sigma)\right)\delta_{\alpha\beta}, \tag{3}$$
$$\{T_\alpha(\sigma,\tau),T_\beta(\sigma',\tau)\}=\left[T'_\alpha(\sigma,\tau)\delta(\sigma-\sigma')+2T_\alpha(\sigma,\tau)\delta'(\sigma-\sigma')\right]\delta_{\alpha\beta},$$

где индекс $\alpha,\beta$ пробегает два значения $(L,R)$ ; $c_L=-2$, $c_R=2$. Таким образом, связи (2) являются связями первого рода /11/ и в силу тождественного равенства нулю канонического гамильтониана ФС полностью определяют вырожденный гамильтониан этой системы /10/

$$\mathcal{H}(\tau)=\int d\sigma\Big\{f_L(\sigma,\tau)\Big[\frac{1}{4}a^2+\frac{i}{2}\psi_R^\mu\psi'_{R\mu}\Big]+f_R(\sigma,\tau)\Big[-\frac{1}{4}b^2+\frac{i}{2}\psi_L^\mu\psi'_{L\mu}\Big]-$$
$$-i\eta_L(\sigma,\tau)a_\mu\psi_R^\mu-i\eta_R(\sigma,\tau)b_\mu\psi_L^\mu\Big\}=\int d\sigma\,\mathcal{H}(\sigma,\tau). \tag{4}$$

Здесь чётные функции $f_L(\sigma,\tau)=f_L(\sigma+2\pi,\tau)$, $f_R(\sigma,\tau)=f_R(\sigma+2\pi,\tau)$ и нечётные функции $\eta_L(\sigma,\tau)=\eta_L(\sigma+2\pi,\tau)$ , $\eta_R(\sigma,\tau)=\eta_R(\sigma+2\pi,\tau)$ являются множителями Лагранжа. Гамильтониан (4) задает динамику ФС согласно правилу $\dot{S}=\{S,\mathcal{H}\}$ ( $S$ - произвольная динамическая переменная), из которого вытекают следующие канонические уравнения динамики ФС:

$$\dot{x}_\mu(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}(f_La_\mu-f_Rb_\mu)-i\eta_L\psi_{R\mu}-i\eta_R\psi_{L\mu}, \tag{5a}$$
$$\dot{p}_\mu(\sigma,\tau)=\frac{1}{2}(f_La_\mu+f_Rb_\mu)'-i(\eta_L\psi_{R\mu}-\eta_R\psi_{L\mu})', \tag{5в}$$
$$\dot{\psi}_R^\mu=\frac{1}{2}\left(f_L(\psi_R^\mu)'+(f_L\psi_R^\mu)'\right)+\eta_La^\mu, \tag{5c}$$
$$\dot{\psi}_L^\mu=\frac{1}{2}\left(f_R(\psi_L^\mu)'+(f_R\psi_L^\mu)'\right)+\eta_Rb^\mu. \tag{5 }$$

Эти же уравнения можно легко получить исходя из действия ФС, записанного в гамильтоновых переменных

$$A=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{2\pi}d\sigma\left(\dot{x}_\mu(\sigma,\tau)p^\mu(\sigma,\tau)+\frac{i}{2}(\psi_{R\mu}\dot{\psi}_R^\mu+\psi_{L\mu}\dot{\psi}_L^\mu)-\mathcal{H}(\sigma,\tau)\right). \tag{6}$$

В заключение этого пункта работы обсудим геометрический смысл множителей Лагранжа $f_L$, $f_R$, $\eta_L$, $\eta_R$. Для этого преобразуем действие (6), сделав замену импульсной переменной $p_\mu(\sigma,\tau)=\tilde{p}_\mu(\sigma,\tau)+p_\mu^{cl}(\sigma,\tau)$, где $\tilde{p}_\mu(\sigma,\tau)$ -новая импульсная переменная, а $p_\mu^{cl}(\sigma,\tau)$ - решение уравнения (5а): $p_\mu^{cl}(\sigma,\tau)=\frac{2}{f_L-f_R}\left(\dot{x}_\mu-\frac{1}{2}(f_L+f_R)x'_\mu+i\eta_L\psi_{R\mu}+i\eta_R\psi_{L\mu}\right)$. В результате получаем

$$A=\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau\int_0^{2\pi}d\sigma\sqrt{-g}\Big(-m-\frac{1}{2}g^{AB}\partial_A x_\mu\partial_B x^\mu-\frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma^a e_a{}^A\partial_A\psi^\mu+$$
$$+\frac{i}{2}\bar{\chi}_b\gamma^a\gamma^b\psi_\mu e_a{}^A\partial_A x^\mu+\frac{1}{16}\bar{\psi}\psi\bar{\chi}_a\gamma^b\gamma^a\chi_b\Big), \tag{7}$$

где мы ввели обозначения ( $m$ - произвольная константа)

$$m\sqrt{-g}=\frac{(f_L-f_R)}{4}\tilde{p}^2,\; g^{AB}=\frac{2}{\sqrt{-g}(f_L-f_R)}\begin{pmatrix}-1 & \frac{f_L+f_R}{2}\\ \frac{f_L+f_R}{2} & -f_Lf_R\end{pmatrix}=-e_0{}^Ae_0{}^B+e_1{}^Ae_1{}^B, \tag{8а}$$

$$e_a{}^A=-\frac{1}{\Pi}\begin{pmatrix}-1 & \frac{f_L+f_R}{2}\\ 0 & \frac{f_L-f_R}{2}\end{pmatrix},\;\chi_0=H\begin{pmatrix}\eta_L\\ -\eta_R\end{pmatrix},\;\chi_1=H\begin{pmatrix}\eta_L\\ \eta_R\end{pmatrix}, \tag{8в}$$

$\psi^\mu=N\begin{pmatrix}\psi_L^\mu\\ \psi_R^\mu\end{pmatrix}$ -майорановский спинор в вещественном представлении $\left(\gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \gamma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$, а нормировочные функции $N$, $H$ и $\Pi$ определяются из равенств $\sqrt{-g}N^2=\Pi;\ H^2\Pi(f_L-f_R)=2;\ (f_L-f_R)\sqrt{-g}=2\Pi^2$. Действие (7) является хорошо известным Лагранжевым действием для ФС /I2/. Формулы (8), выражающие метрику $g^{AB}$ через чётные множители Лагранжа $f_L$ и $f_R$, а поле гравитино $\chi_a$ через нечётные множители Лагранжа $\eta_L$ и $\eta_R$, дают искомую геометрическую интерпретацию множителей Лагранжа.

## 2. Суперполевая формулировка ФС в гамильтоновом подходе. Решение задачи Коши

Известно /9/, что динамика ФС в лагранжевых переменных (эволюция этих переменных вытекает из действия (7)) наиболее естественно формулируется на языке суперполей в (2+2)-мерном суперпространстве (2 бозонные координаты $\sigma$, $\tau$ и 2 фермионные координаты $\theta_L$ и $\theta_R$). В предыдущем пункте работы была продемонстрирована связь лагранжевого и гамильтонового подхода к теории ФС. Естественно задаться вопросом: существует ли адекватная суперполевая формулировка гамильтоновой теории ФС? Как будет показано в этом пункте работы, такая формулировка существует, причем в нашем подходе она возникает как следствие записи системы уравнений (5) в компактном виде. Суперполевая формулировка ФС в гамильтоновом подходе позволяет элегантным образом формулировать результаты и в квантовой теории ФС.

Прежде чем переписать систему уравнений (5) в компактной форме,



используя суперполевой подход, введем суперфункцию $X_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\theta_L,\theta_R,\tau)$, заданную на (2+2)-мерном суперпространстве $(\sigma_L,\sigma_R,\theta_L,\theta_R)$ и содержащую всю информацию о состоянии ФС,

$$X_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\theta_L,\theta_R,\tau)=\frac{1}{2}\Big(x_\mu(\sigma_L,\tau)+x_\mu(\sigma_R,\tau)+\int_{\sigma_R}^{\sigma_L}d\sigma\,p_\mu(\sigma,\tau)\Big)-$$
$$-\frac{i}{2}\theta_L\psi_{R\mu}(\sigma_L,\tau)+\frac{i}{2}\theta_R\psi_{L\mu}(\sigma_R,\tau)+i\theta_L\theta_R F_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\tau). \tag{9}$$

Здесь для общности мы ввели билокальное поле $F_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\tau)$, которое в дальнейшем будем полагать равным нулю, так как будем требовать, чтобы суперфункция (8) представлялась в виде суммы двух супераналитических функций $X_\mu=\bar{X}_\mu(\sigma_L,\theta_L)+\bar{\bar{X}}_\mu(\sigma_R,\theta_R)$.

Теперь легко проверить, что компактное уравнение

$$\dot{X}_\mu=\Big\{f_L(\sigma_L,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_L}+\frac{1}{2}f'_L(\sigma_L,\tau)\theta_L\frac{\partial}{\partial\theta_L}+i\eta_L(\sigma_L,\tau)\Big[-2i\frac{\partial}{\partial\theta_L}+\theta_L\frac{\partial}{\partial\sigma_L}\Big]\Big\}X_\mu+$$
$$+\Big\{f_R(\sigma_R,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_R}+\frac{1}{2}f'_R(\sigma_R,\tau)\theta_R\frac{\partial}{\partial\theta_R}+i\eta_R(\sigma_R,\tau)\Big[2i\frac{\partial}{\partial\theta_R}+\theta_R\frac{\partial}{\partial\sigma_R}\Big]\Big\}X_\mu. \tag{I0}$$

в компонентной записи воспроизводит систему уравнений (5). Для возникших в уравнении (I0) дифференциальных операторов введем следующие обозначения:

$$\hat{T}_\alpha(f)=f(\sigma_\alpha,\tau)\frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}+\frac{1}{2}f'(\sigma_\alpha,\tau)\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha},\quad \hat{F}_\alpha(\eta)=i\eta(\sigma_\alpha,\tau)\Big[c_\alpha i\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}+\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}\Big],$$

где $\alpha\in[L,R]$, $c_L=-2$, $c_R=2$.

Дифференциальные операторы $\hat{T}_\alpha(f)$ и $\hat{F}_\alpha(\eta)$ являются генераторами суперконформной группы Ли и образуют супералгебру

$$[\hat{T}_\alpha(f),\hat{T}_\alpha(g)]=\hat{T}_\alpha(fg'-f'g),\ [F_\alpha(\eta_1),F_\alpha(\eta_2)]=-2ic_\alpha T_\alpha(\eta_1\eta_2),$$
$$[\hat{T}_\alpha(f),\hat{F}_\alpha(\eta)]=\hat{F}_\alpha(f\eta'-\tfrac{1}{2}f'\eta). \tag{II}$$

В дальнейшем мы будем также пользоваться следующей удобной формой записи произвольного элемента суперконформной алгебры:

$$\hat{T}_\alpha(f_\alpha)+\hat{F}_\alpha(\eta_\alpha)=\frac{i}{c_\alpha}\big(\mathcal{F}_\alpha\hat{D}_\alpha^2+\hat{D}_\alpha\mathcal{F}_\alpha\hat{D}_\alpha\big)=\frac{2i}{c_\alpha}\big(\mathcal{F}_\alpha^{1/2}\hat{D}_\alpha\mathcal{F}_\alpha^{1/2}\hat{D}_\alpha\big).$$

Здесь введены обозначения: $\mathcal{F}_\alpha=\frac{1}{2}f_\alpha-i\theta_\alpha\eta_\alpha$ - супермножители Лагранжа, $\hat{D}_\alpha=\big(-ic_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}+\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}\big)$ - ковариантные производные, $\hat{D}_\alpha^2=-ic_\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma_\alpha}$.

Коммутационные соотношения (II) в новых обозначениях имеют вид

$$[\mathcal{F}\hat{D}^2+\hat{D}\mathcal{F}\hat{D},\ G\hat{D}^2+\hat{D}G\hat{D}]=\mathcal{H}\hat{D}^2+\hat{D}\mathcal{H}\hat{D},$$

где

$$\mathcal{H} = 2(\mathcal{F}\hat{D}^2(G) - G\hat{D}^2(\mathcal{F})) + \hat{D}(\mathcal{F})\hat{D}(G).$$

Произвольный элемент группы суперконформных преобразований в рассматриваемом представлении записывается в виде $U = \exp\{\hat{T}_\alpha(f) + \hat{F}_\alpha(\eta)\}$. Супергруппа таких преобразований является подгруппой группы общих координатных суперпреобразований $\theta \mapsto \Theta(\sigma,\theta)$, $\sigma \mapsto \Sigma(\sigma,\theta)$, так как в случае суперконформных преобразований $\Theta(\sigma,\theta) = U\cdot\theta$, $\Sigma(\sigma,\theta) = U\cdot\sigma$ суперфункции $\Theta(\sigma,\theta)$ и $\Sigma(\sigma,\theta)$ не произвольные, а удовлетворяют соотношениям /5,13/:

$$\hat{D}_\alpha \Sigma = \frac{i}{c_\alpha}(\hat{D}_\alpha\Theta)\Theta, \quad \Theta = (\hat{D}_\alpha\Sigma)(\Sigma')^{-1/2}. \tag{12}$$

Отметим, что из первого соотношения (12) следует второе и наоборот. Из этих соотношений также следует, что при суперконформных преобразованиях сохраняет свою форму ковариантная производная

$$\hat{D}_\alpha \mapsto \left(-ic_\alpha\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha} + \Theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\Sigma_\alpha}\right) = -\frac{ic_\alpha}{(\hat{D}_\alpha\Theta_\alpha)}\hat{D}_\alpha.$$

Часто именно это свойство кладётся в основу определения суперконформных преобразований (см., например, /14/).

Прежде чем перейти к решению задачи Коши для уравнения (10), заметим, что это уравнение сводится к двум уравнениям, определяющим динамику только либо по левым, либо по правым переменным. Для этого подействуем на уравнение (10) ковариантными производными $\hat{D}_L$ и $\hat{D}_R$, тогда получаем

$$\dot{\Phi}^\mu_\alpha = \frac{i}{c_\alpha}(\hat{D}_\alpha\mathcal{F}_\alpha\hat{D}_\alpha + \hat{D}^2_\alpha\mathcal{F}_\alpha)\Phi^\mu_\alpha, \tag{13}$$

где

$$\Phi^\mu_L = \psi^\mu_R + \frac{1}{2}\theta_L a^\mu, \quad \Phi^\mu_R = \psi^\mu_L - \frac{1}{2}\theta_R b^\mu, \quad \Phi^\mu_\alpha = \hat{D}_\alpha X^\mu. \tag{14}$$

В терминах ковариантных производных $\hat{D}_\alpha$ и суперполей $\Phi^\mu_\alpha$ можно в компактном виде записать связи (2)

$$\Phi^\mu_R\hat{D}_R\Phi_{R\mu} = i(F_L + 2\theta_R T_L), \quad \Phi^\mu_L\hat{D}_L\Phi_{L\mu} = i(F_R + 2\theta_L T_R)$$

и суперскобки (1)

$$\{\Phi^\mu_\alpha(\sigma,\theta), \Phi^\nu_\alpha(\sigma',\theta')\} = \frac{1}{c_\alpha}\hat{D}_\alpha[(\theta-\theta')\delta(\sigma-\sigma')]\rho^{\mu\nu}. \tag{15}$$

В заключение этого пункта работы приведём общее решение задачи Коши для уравнения (10). Это решение имеет вид



$$X_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\theta_L,\theta_R,\tau_f) = \hat{U}_L(\tau_f,\tau_i)\hat{U}_R(\tau_f,\tau_i)X_\mu(\sigma_L,\sigma_R,\theta_L,\theta_R,\tau_i) =$$

$$= X_\mu(\Sigma_L(\sigma_L,\theta_L,\tau_f),\Sigma_R(\sigma_R,\theta_R,\tau_f),\Theta_L(\sigma_L,\theta_L,\tau_f),\Theta_R(\sigma_R,\theta_R,\tau_f),\tau_i) \tag{16}$$

где

$$\hat{U}_\alpha(\tau_f,\tau_i) = T\exp\left\{\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau(\hat{T}_\alpha(f_\alpha) + \hat{F}_\alpha(\eta_\alpha))\right\}, \quad \Sigma_\alpha = U_\alpha\sigma_\alpha, \quad \Theta_\alpha = U_\alpha\theta_\alpha.$$

В том, что (16) действительно решение уравнения (10), можно убедиться непосредственно, воспользовавшись равенствами $\frac{\partial}{\partial\tau}U_\alpha = \{\hat{T}_\alpha(f_\alpha(\sigma,\tau_f)) + \hat{F}_\alpha(\eta_\alpha(\sigma,\tau_f))\}U_\alpha$.

Решение задачи Коши (16), записанное в компактном виде, воспроизводит решение задачи Коши для системы уравнений (5), полученное другим способом в работе /15/.

### 3. Вспомогательная спектральная задача в теории ФС. Бесконечный набор интегралов движения

В предыдущем пункте работы, используя построенное суперполевое описание ФС в гамильтоновом подходе, нам удалось легко решить задачу Коши для системы уравнений (5). В этом разделе мы получим ещё один результат (неочевидный в компонентной записи), который также демонстрирует преимущества (предложенной нами) суперполевой формулировки ФС. Этот результат касается возможности построения бесконечного набора калибровочно инвариантных интегралов движения ФС. Такая возможность следует из того факта, что уравнения динамики ФС (5), записанные в терминах суперполей в виде (14), можно представить в виде условия совместимости двух вспомогательных линейных уравнений (в виде представления Лакса). Действительно, уравнения (14) эквивалентны равенствам

$$[L,M] = \left[\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha, \frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda Y_\alpha\right] = 0, \tag{17}$$

где $\lambda$ – спектральный параметр. $\Phi_\alpha = \Phi^\mu_\alpha\xi_\mu$, $\xi_\mu$ – образующие некоторой матричной некоммутирующей алгебры, реализующие векторное представление группы вращений $D$-мерного пространства-времени, суперполе $Y_\alpha$ имеет вид

$$Y_\alpha = \frac{i}{c_\alpha}\{(\hat{D}_\alpha\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\alpha\hat{D}_\alpha)\Phi_\alpha - 2\lambda\mathcal{F}_\alpha\Phi^2_\alpha\}.$$

Хорошо известно, что представление (I7) оказалось весьма полезным для интегрирования нелинейных систем. Здесь же, на первый взгляд, кажется странным переписывание линейного уравнения (I3) в виде условия (I7). Однако напомним, что из-за наличия связей (2) мы имеем дело с существенно нелинейной системой. За возможность представления динамических уравнений ФС в линейном виде (I3) мы заплатили введением произвольных функций - множителей Лагранжа. Замечательным фактом является то, что удалось всю зависимость от множителей Лагранжа $\mathcal{F}_\alpha$ поместить в $M$ -оператор, а $L$ - оператор сделать вообще не зависящими от $\mathcal{F}_\alpha$. Поэтому вспомогательная спектральная задача

$$L\Psi = \left[\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha\right]\Psi(\sigma_\alpha,\theta_\alpha,\lambda) = 0, \tag{I8}$$

которая диктуется $L$ - оператором так же не зависит от $\mathcal{F}_\alpha$, или, другими словами, не зависит от выбора калибровки. Отсюда сразу же следует, что интегралы движения, построенные на основе уравнений (I7),(I8), будут автоматически калибровочно-инвариантными. Перейдем теперь к построению явного вида этих интегралов движения.

Для решений уравнения (I8) можно построить оператор трансляций $T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)$, такой, что

$$\Psi(\sigma',\theta',\lambda) = T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)\,\Psi(\sigma,\theta,\lambda). \tag{I9}$$

Вблизи точки $\lambda=0$ функция $T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)$ является целой и может быть разложена в ряд

$$T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda) = 1 + \lambda\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1) + \lambda^2\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1\theta_1)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma_2 d\theta_2)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_2,\theta_2) +$$
$$+\lambda^3\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma_2 d\theta_2)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_2\theta_2)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_2,\theta_2}(d\sigma_3 d\theta_3)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_3\theta_3) + \lambda^4\ldots = \mathrm{Pexp}\left\{\lambda\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1\theta_1)\right\}. \tag{20}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\left(A(\sigma_1)+\theta_1\bar{A}(\sigma_1)\right) = \int\limits_{\sigma}^{\sigma'}d\sigma_1\,\bar{A}(\sigma_1) + \frac{i}{c_\alpha}\left(\theta' A(\sigma') - \theta A(\sigma)\right).$$

Из определения (I9) следует, что оператор трансляций на период $T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)$ коммутирует с $L$ - оператором $\left[\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha, T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)\right] = 0$. Отсюда и из соотношения (I7) вытекает, что величина $T_\alpha(\lambda) = \mathrm{Tr}\{T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\alpha;\lambda)\}$ не зависит от $\sigma$ и $\theta$ и на уравнениях движения сохраняется во "времени" $\tau$. Таким образом, $T_\alpha(\lambda) = \sum\limits_n \lambda^n I_n$ является производящей функцией законов сохранения



$I_n$. Если в качестве образующих $\xi^\mu$ взять генераторы произвольной алгебры Ли, то можно доказать, пользуясь техникой работы /I6/, что $\{T_\alpha(\lambda), T_\alpha(\mu)\} = 0$ для любых $\lambda$ и $\mu$. Таким образом, функция $T_\alpha(\lambda)$ генерирует законы сохранения $I_n$ в инволюции. Отметим, что эти интегралы движения являются чётными функциями. Проблема построения с помощью вспомогательной спектральной задачи (I8) нечетных интегралов движения на сегодняшний день не решена.

Нелокальные законы сохранения строятся с помощью разложения (20) и имеют вид

$$I^\alpha_{-1} = \mathrm{Tr}\left\{\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma+2\pi,\theta}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\right\},\quad I^\alpha_{-2} = \mathrm{Tr}\left\{\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma+2\pi,\theta}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_1\theta_1}(d\sigma_2 d\theta_2)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_2,\theta_2)\right\},$$

$$I^\alpha_{-3} = \mathrm{Tr}\left\{\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma+2\pi,\theta}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma_2 d\theta_2)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_2,\theta_2)\int\limits_{\sigma,\theta}^{\sigma_2\theta_2}(d\sigma_3 d\theta_3)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_3,\theta_3)\right\},\ldots$$

величина $I^\alpha_{-1}$ имеет смысл полного импульса ФС, а $I^L_{-3}$ - $I^R_{-3}$ - вектора Паули - Любанского. Локальные законы сохранения можно получить, если искать разложение функционала $T_\alpha(\lambda)$ при $\lambda\mapsto\infty$. Оказывается, что такое разложение существенно зависит от конкретного выбора алгебры образующих. В простейшем случае трехмерного евклидова пространства-времени, когда в качестве алгебры $\{\xi_\mu\}$ можно взять алгебру $SU(2)$, вспомогательная спектральная задача (I8) исследовалась в работе /I7/.

Отметим, что, как показано в работе /4/, к этой же задаче сводится и случай четырехмерного пространства- времени. Приведем здесь два первых локальных интеграла движения из бесконечного набора $\{I_n\}$, которые получаются с помощью хорошо известных методов /I8/:

$$I_0 = -\frac{i}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\sqrt{q^2_\alpha}\,\frac{(\varkappa_\alpha q_\alpha)}{K_\alpha},$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\sigma\sqrt{q^2_\alpha}\left(1+\frac{ic_\alpha}{2}\,\frac{\varepsilon^{ijk}\varkappa_{\alpha i}q_{\alpha j}q'_{\alpha k}}{K^2_\alpha} + \frac{1}{2q^2_\alpha}\,\frac{(q_\alpha\varkappa'_\alpha)^2 - q^2_\alpha\varkappa'^2_\alpha}{K^2_\alpha}\right),\ldots \tag{2I}$$

где $\varkappa_{\alpha i} = \varepsilon_{ijk}\varphi_{\alpha j}\varphi_{\alpha k}$, $K_\alpha = q^2_\alpha - ic_\alpha(\varphi_\alpha\varphi'_\alpha)$, а $\varphi_{\alpha i}$ и $q_{\alpha i}$ определяются по формулам $\Phi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha i} - \frac{1}{c_\alpha}\theta_\alpha q_\alpha$ и формулам (I4). Следует отметить, что бесконечный набор законов сохранения для ФС можно получить из законов сохранения для бозонной струны /4/ подстановкой

$$a_j \mapsto a_j - i\lambda\varepsilon_{jkn}\psi_{Rk}\psi_{Rn},\quad b_j \mapsto b_j - i\lambda\varepsilon_{jkn}\psi_{Lk}\psi_{Ln}.$$

Собирая вновь члены при одинаковых степенях $\lambda$, мы получим искомый набор интегралов движения для ФС.

Используя явный вид $I_n$, можно написать уравнения (уравнения Новикова /18/), которые осуществляют редукцию рассматриваемой системы с бесконечным числом степеней свободы к суперсимметричным системам с конечным числом $N$ степеней свободы (конечномодовым системам). В нашем случае эти уравнения записываются в виде

$$\{ I, q_{\alpha i}(\sigma)\} = \{ I, \psi_{\alpha i}(\sigma)\} = 0 ,$$

где $I = \sum_{n=0}^{N} c_n I_n$ ; $c_n$ - произвольные константы. Представляется естественным изучить сначала самую простую конфигурацию ФС /19/, которой является суперсимметричная версия одномодовой конфигурации бозонной струны /20/. Мы думаем, что приведенные результаты делают возможным решение этой задачи.

## 4. Вершинные операторы в теории фермионной струны

В этом разделе мы построим с помощью метода коллективных координат (МКК) полный набор законов сохранения как для замкнутой, так и для открытой фермионной струны. Последовательное изложение МКК и ссылки на более ранние работы (а также попытки применения МКК к теориям струн) содержатся в статьях /21/.

Обсудим сначала случай открытой ФС. Состояние открытой ФС задается набором гамильтоновых переменных $x_\mu(\sigma,\tau)$, $p_\mu(\sigma,\tau)$, $\psi_\alpha(\sigma,\tau)$, где $\sigma \in [0,\pi]$. При этом чётные переменные удовлетворяют граничным условиям /10/

$$x'_\mu(0,\tau) = x'_\mu(\pi,\tau) = 0, \quad p'_\mu(0,\tau) = p'_\mu(\pi,\tau) = 0, \tag{23а}$$

в то время как на нечетные переменные для случая ФС с полуцелым спином накладываются условия

$$\psi_L(0,\tau) = \psi_R(0,\tau), \quad \psi_L(\pi,\tau) = \psi_R(\pi,\tau) . \tag{23в}$$

Более удобно работать с переменными, заданными на интервале $[-\pi,\pi]$. Поэтому продолжим $x_\mu(\sigma)$, $p_\mu(\sigma)$ как чётные периодические функции на интервал $-\pi<\sigma<\pi$, а антикоммутирующие переменные продолжим как периодические функции, связанные условием

$$\psi_L(\sigma,\tau) = \psi_R(-\sigma,\tau) . \tag{24}$$

Такую открытую струну естественно рассматривать как сложенную вдвое замкнутую струну. Требуя, чтобы условия (23), (24) сохранялись во времени, мы получаем ограничения на множители Лагранжа:



$$f_L(\sigma) = -f_R(-\sigma), \quad f_\alpha(0,\tau) = f_\alpha(\pi,\tau) = 0,$$
$$\eta_L(\sigma,\tau) = \eta_R(-\sigma,\tau) .$$

Как и ранее, удобно ввести суперфункцию $Q_\mu(\sigma,\theta,\tau)$, содержащую всю информацию о системе

$$Q_\mu(\sigma,\theta,\tau) = x_\mu(\sigma,\tau) + \int_0^\sigma d\bar\sigma\, p_\mu(\bar\sigma,\tau) - i\theta_L \psi_R(\sigma,\tau)$$

и удовлетворяющую уравнению типа (10). Под действием группы суперконформных преобразований $Q_\mu(\sigma,\theta)$ заметает некоторую орбиту в фазовом пространстве системы

$$Q_\mu(\sigma,\theta) \mapsto Q_\mu(\Sigma(\sigma,\theta), \Theta(\sigma,\theta)),$$

где $\Sigma(\sigma,\theta)$ и $\Theta(\sigma,\theta)$ удовлетворяют уравнениям (13). Следовательно, фазовое пространство системы представимо в виде набора калибровочных орбит этой системы. Поэтому удобно разделять переменные, определяющие состояния ФС, на два типа: первые из них перечисляют калибровочные орбиты, вторые описывают движение вдоль неё. Наша задача состоит в нахождении переменных первого типа, которые являются калибровочно-инвариантными по построению.

В рамках МКК /21/ различные орбиты параметризуются точками пересечения с некоторой фиксированной поверхностью (поверхностью калибровки). Определим её, например, условием

$$k^\mu Q_\mu(\sigma,\theta) = \sigma , \tag{25}$$

где $k_\mu$ - произвольный $D$ -вектор, такой, что $(k_\mu P^\mu) = \pi$; $P^\mu$ - полный $D$ -импульс струны. Прямым вычислением можно убедиться, что суперфункционалы

$$\overline{Q}_\mu(\sigma,\theta) = Q_\mu(\Sigma(\sigma,\theta), \Theta(\sigma,\theta)), \tag{26}$$

где $(\Sigma^{-1}(\Sigma,\Theta) = \sigma,\ \Theta^{-1}(\Sigma,\Theta) = \theta),$

$$\Sigma^{-1}(\sigma,\theta) = k^\mu Q_\mu(\sigma,\theta) ,$$
$$\Theta^{-1}(\sigma,\theta) = (\hat{D}_L \Sigma^{-1}(\sigma,\theta))\left((\Sigma^{-1})'\right)^{-1/2} ,$$

удовлетворяют уравнению (25) и являются калибровочно-инвариантными величинами.

Рассмотрим супер-фурье-разложение величины $\overline{Q}_\mu(\sigma,\theta)$ :

$$A_\mu(n,\nu) = A_\mu^n - 2\nu\alpha_\mu^n = \int_{-\pi,\theta}^{\pi,\theta}(d\sigma d\theta)_L(\hat{D}_L\overline{Q}_\mu(\sigma,\theta))\exp(in\sigma+\nu\theta) =$$
$$= \int_{-\pi,\theta'}^{\pi,\theta'}(d\sigma d\theta)_L(\hat{D}_L Q_\mu(\sigma,\theta))\exp(in\Sigma^{-1}(\sigma,\theta)+\nu\Theta^{-1}(\sigma,\theta)), \tag{27}$$

где $\nu$ есть нечетный элемент алгебры Грассмана. Используя уравнения (26), (27), после интегрирования по $\theta$ получаем величины:

$$A_\mu^n = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \left( a_\mu + 2i \frac{\partial}{\partial\sigma} \left( \frac{(k\psi_R)\psi_{R\mu}}{(ka)^{1/2}} \right) \right) \exp(in(kQ)),$$

$$\alpha_\mu^n = \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \left( (ka)^{1/2} \left( 1 - i \frac{(k\psi_R)(k\psi_R')}{(ka)^2} \right) \psi_{R\mu} - \frac{(k\psi_R)}{(ka)^{1/2}} a_\mu \right) \exp(in(kQ)),$$

которые образуют полный набор инвариантов для открытой ФС. Эти функционалы являются классическими аналогами операторов физических частиц, введенных впервые в дуальных моделях /22/.

Мандельстам /22/ заметил связь операторов физических частиц и вершинных операторов. Представление (27) таким образом позволяет выразить вершинные операторы ФС, описывающие испускание безмассовых частиц ($k_\mu k^\mu = 0$) в терминах суперполей

$$V_\mu(\sigma,\theta,\nu) = \hat{D}_L Q_\mu(\sigma,\theta) \exp\left(i \Sigma^{-1}(\sigma,\theta) + \nu\, \Theta^{-1}(\sigma,\theta)\right).$$

Пользуясь этим представлением, можно воспроизвести дуальные амплитуды рассеяния ФС, компактно записанные в виде интегралов по суперпространству /23/.

В случае замкнутой струны величины $A_\mu^n$, $\alpha_\mu^n$ инвариантны только по отношению к преобразованиям, оставляющим точку $\sigma = 0$ неподвижной. Чтобы однозначно зафиксировать координаты, перечисляющие калибровочные орбиты, мы должны использовать дополнительное условие, например

$$\arg(A^1) = 0, \qquad (28)$$

где $A^1 = (A_\mu^1 P^\mu)$. После этого нетрудно найти функционалы /24/, инвариантные по отношению к общему калибровочному преобразованию и удовлетворяющие условиям (25), (28):

$$\tilde{A}_\mu^n = A_\mu^n (A^1)^{-n} (A^1 A^{-1})^{n/2},$$
$$\tilde{\alpha}_\mu^n = \alpha_\mu^n (A^1)^{-n} (A^1 A^{-1})^{n/2}. \qquad (29)$$

Подчеркнем, что в случае замкнутой ФС существует второй набор функционалов, обладающих тем же свойством, что и (29). Он строится аналогично из переменных $b_\mu$, $\psi_{L\mu}$.



## Заключение

Основными результатами работы являются постановка вспомогательной спектральной задачи и построение бесконечного набора законов сохранения в рамках суперполевого гамильтонова подхода. Полученные интегралы движения можно записать в терминах суперполей в изящной компактной форме. Мы считаем, что это поможет исследовать простейшие конечномодовые конфигурации ФС.

В заключение нам хотелось бы выразить благодарность Г.П. Пронько и А.Т. Филиппову за полезные обсуждения результатов работы.

Литература:


1. Green M.B., Schwarz J.H.- Phys. Lett., 1984, 149B, 117; 1985, 151B, 21.
2. Witten E. - Phys. Lett., 1984, 149B, 351.
3. Alvarez- Gaume L., Witten E.- Nucl. Phys., 1983, B234, 269.
4. Пронько Г.П. - ТМФ, 1983, т. 57, 203.
5. Исаев А.П. - Модель фермионной струны в пространствах группы Ли. Препринт ОИЯИ, Р2-85-942 1985; ТМФ, 1987, т.71, №3, 395.
6. Pohlmeyer K.- Phys. Lett., 1982, 119B, 100;
   Pohlmeyer K., Rehren K.-H.- Commun. Math. Phys., 1986, v. 105,593.
7. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. - Nucl. Phys., 1984, v. B241, 333;
   Friedan D., Qiu Z., Shenker S.- Phys. Rev. Lett., 1984, v. 52,1575.
8. Gepner D., Witten E.- Nucl. Phys., 1986, v. B278, 493.
9. Howe P.S. - Phys. Lett., 1977, v. 70B, 453.
10. Marshall C., Ramond P.- Nucl. Phys., 1975, v. B85, 375;
    Collins P., Tucker R.W. - Nucl. Phys., 1977, v. B121, 307.
11. Дирак П.А.М. - Лекции по квантовой механике. М.: Изд-во Мир, 1968.
12. Deser S.- Phys. Lett., 1976, v. 65B, 369;
    Brink L. - Phys. Lett., 1976, v.65B, 471.
13. Ivanov E.A., Krivonos S.O.- Lett Math. Phys., 1983, v. 7, 523.
14. Friedan D.- Notes on String theory and two dimensional conformal Field Theory. Envico Fermi Inctitute preprint EFI 85-99 (1986).
15. Borodulin V.I., Pronko G.P., Razumov A.V.- Collectuve coordinats for a string with Fermionic Degrees of Freedom. Serpuhov preprint, IHEP- 180 (1981).
16. Цыпляев С.А. - ТМФ, 1981, т. 48, 24.
17. Исаев А.П. - Вспомогательная спектральная задача в теориях фермионных струн. Препринт ОИЯИ, Р2-86-16, 1986.

18. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.И. - Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
19. Плющай М.С., Пронько Г.П., Разумов А.В. - ТМФ, 1983, т. 57, 323.
20. Пронько Г.П., Разумов А.В. - ТМФ, 1983, т. 56, 192.
21. Разумов А.В., Таранов А.Ю. - ТМФ, 1982, т. 52, 34; Pron'ko G.P., Razumov A.V., Soloviev L.D. - Some new results in classical theory of relativistic string. Preprint IHEP 82-106, Serpuhov, 1982.
22. Schwarz J.H. - Nucl. Phys., 1972, v. B46, 61; Mandelstam S.- Phys. Rep., 1974, v. 13c, 260.
23. Fairlie D., Martin D.- Nuovo Cimento, 1973, v. 18A, 373.
24. Borodulin V.I., Isaev A.P. - Phys. Lett., 1982, v. 117B, 69.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июня 1987 года.



Бородулин В.И., Исаев А.П. P2-87-376

Об интегрируемости фермионной струны
в суперполевом гамильтоновом подходе

Исследуется модель замкнутой фермионной струны в суперполевом гамильтоновом подходе, в рамках которого найдено общее решение гамильтоновых уравнений движения. Сформулирована вспомогательная спектральная задача и получен бесконечный набор законов сохранения. Представлен конструктивный метод построения классических аналогов вершинных операторов, описывающих взаимодействие фермионной струны с безмассовыми полями.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Borodulin V.I., Isaev A.P. P2-87-376

Integrability of Fermionic String
in Superfield Hamiltonian Approach

We introduce the Hamiltonian superfield formalism of fermionic string (FS) theory and use it for finding a general solution to the Hamilton equations of motion. An auxiliary spectral problem for FS-theory is investigated and an infinite set of conservation laws is constructed. Also, we present a method of constructing classical analogues of vertex operators describing the FS-massless field coupling.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987