объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-363

В.В.Нестеренко, Нгуен Суан Хан

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В МОДЕЛИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С ЖЕСТКОСТЬЮ

Направлено в "International Journal of Modern Physics A".

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в литературе рассматривается модифицированная модель релятивистской струны - так называемая струна с жесткостью [1-10]. Действие этой модели содержит дополнительный по сравнению со струной Намбу - Гото член, пропорциональный внешней кривизне мировой поверхности струны. Физически роль этой добавки проявляется в том, что вклад в наблюдаемые величины таких мировых поверхностей струны, которые сильно "измяты", подавляется [1,6,9]. В евклидовом варианте эта модель рассматривалась ранее в статистической физике при исследовании биологических мембран и микроэмульсий [7-9]. В работах [2-4] исследовались решения классических уравнений движения в модели релятивистской струны с жесткостью, их стабильность и свойства соответствующих траекторий Редже. Был рассчитан статический межкварковый потенциал в этой модели [5]. Следует отметить, что слагаемые, зависящие от внешней кривизны мировой поверхности струны, могут возникнуть в эффективном действии суперструны после функционального интегрирования по фермионным переменным [10].

Цель данной работы - построение гамильтонова формализма в модели струны с жесткостью. Это может служить основой для последующего канонического квантования данной модели. Именно такое квантование является здесь предпочтительным, так как в этой модели, как и во всякой полевой теории с высшими производными, имеет место известная трудность, порождаемая дополнительными "духовными" состояниями с отрицательной нормой [11]. Как следствие этого здесь возможно нарушение унитарности.

План изложения следующий. Во втором разделе с помощью метода Остроградского [12] получены уравнения движения в гамильтоновой форме для невырожденной полевой теории. В третьем разделе вводятся скобки Пуассона и обсуждаются удобные способы их вычисления. В четвертом разделе построен гамильтонов формализм для модели релятивистской струны с жесткостью. Методом Дирака найден полный набор связей, построен канонический гамильтониан. Доказано, что все связи в теории являются связями первого рода. При этом существенно используются результаты, полученные в [14] по общей теории сингулярных лагранжианов с высшими производными. В заключении кратко обсуждаются те вопросы в данной задаче, которые требуют дальнейшего исследования. В приложении доказаны тождества Нетер в теории струны с жесткостью, обсуждается связь между параметрическим тензором энергии-импульса и плотностью канонического гамильтониана в теории с сингулярным лагранжианом второго порядка. В самом общем виде показано обращение этого тензора в ноль в силу параметризационной инвариантности действия. В работе [3] путем громоздких вычислений это было продемонстрировано в теории струны с жесткостью в специальной ортогональной параметризации мировой поверхности струны.

2. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ В НЕОСОБЕННОЙ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этом разделе, используя метод Остроградского [12], покажем, как осуществляется переход от уравнений движений Эйлера - Лагранжа к уравнениям в гамильтоновой форме в случае невырожденных полевых лагранжианов со вторыми производными /т.е. в случае неособенной полевой теории/.

Предположим, что лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от полевых функций $x_\mu(\tau,\sigma)$ и от их первых и вторых производных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_\mu, x_{\mu,i}, x_{\mu,ij}), \qquad /2.1/$$

где $x_\mu = x_\mu(\tau,\sigma)$ - полевая функция, заданная в 2-мерном пространстве $u^0 = \tau$, $u^1 = \sigma$, $-\infty < \tau < +\infty$, $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$, $\mu = 0,1,2,\dots D-1$. Введем следующие обозначения для частных производных:

$$x_{\mu,i} = \frac{\partial x_\mu}{\partial u^i}, \quad x_{\mu,ij} = \frac{\partial x_\mu}{\partial u^i \partial u^j}, \quad i,j = 0,1,$$

$$\dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}, \quad x'_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}.$$

В пространстве функции $x_\mu(u)$ используется метрика с сигнатурой $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,\dots)$. Такие обозначения удобны для рассмотрения струнной модели.

По лагранжиану $\mathcal{L}$ строится функционал действия

$$S = \int_\Omega d^2u\, \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\, \mathcal{L}. \qquad /2.2/$$

Уравнения движения следуют из принципа наименьшего действия

$$\delta S = 0 \qquad /2.3/$$

при условии

$$\delta x^\mu(\tau_i,\sigma) = \delta \dot{x}^\mu(\tau_i,\sigma) = 0, \quad i = 1,2, \quad \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2. \qquad /2.4/$$

Кроме этого должны выполняться и определенные граничные условия при $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Мы рассмотрим вначале так называемые свободные граничные условия, которые характеризуются тем, что вариации $\delta x^\mu(\tau,\sigma_i)$, $\delta \dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i)$ и $\delta x'^\mu(\tau,\sigma_i)$, $i = 1,2$ остаются произвольными. Из /2.3/ следуют уравнения Эйлера - Лагранжа

$$L_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu{}_{,i}}\right) + \frac{\partial}{\partial u^i \partial u^j}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu{}_{,ij}}\right) = 0, \qquad /2.5/$$

$$\mu = 0,1,\dots,D-1.$$

Так как величины $x^\mu{}_{,ij}$ симметричны по индексам i,j, то мы предполагаем, как обычно, что во всех формулах производные по $x^\mu{}_{,ij}$ при $i \ne j$ умножаются на 1/2, а при $i = j$ на 1 [15]. Уравнения /2.5/ можно переписать так:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'^\mu}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''^\mu}\right)\right] = 0, \quad \mu = 0,1,\dots D-1, \qquad /2.6/$$

Эта уравнения должны быть дополнены следующими свободными граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''^\mu}\right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'^\mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x''^\mu} = 0, \qquad /2.6a/$$

$$\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \quad \mu = 0,1,\dots D-1.$$

При переходе к гамильтонову описанию обобщенными координатами будем считать переменные

$$q_{1\mu} = x_\mu, \quad q_{2\mu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} = \dot{x}_\mu. \qquad /2.7/$$

Сопряженные им импульсы задаются формулами [12]

$$p_{1\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1^{\mu}} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \ddot{q}_1^{\mu}}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1'^{\mu}}\right), \qquad /2.8/$$

$$p_{2\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \ddot{q}_1^{\mu}}. \qquad /2.9/$$

Плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ определяется так:

$$\mathcal{H} = -p_1\dot{x} - p_2\ddot{x} - \mathfrak{L} = -p_1 q_2 - p_2\dot{q}_2 - \mathfrak{L}. \qquad /2.10/$$

Существенно, что $\mathcal{H}$ является функцией только канонических переменных

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_{1\mu}, q'_{1\mu}, q''_{1\mu}, q_{2\mu}, q'_{2\mu}, p_{1\mu}, p_{2\mu}). \qquad /2.11/$$

В этом можно убедиться, вычисляя дифференциал в формуле /2.10/.

Рассмотрим неособенную полевую теорию, для которой матрица, составленная из вторых производных лагранжиана по $\ddot{x}_\mu$,

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \ddot{x}^{\mu}\partial \ddot{x}^{\nu}}, \qquad /2.12/$$

- невырожденная $\det\|\Lambda\| \neq 0$. В этом случае введенные согласно /2.7/-/2.9/ переменные q_1, q_2, p_1, p_2 являются независимыми. Вычисляя дифференциалы формул /2.10/-/2.11/ и сравнивая соответствующие коэффициенты, получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{1\mu}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{1\mu}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_{1\mu}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q'_{1\mu}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q''_{1\mu}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q''_{1\mu}}, \qquad /2.13/$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{2\mu}} = -\left(p_{1\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{2\mu}}\right), \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_{2\mu}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q'_{2\mu}}, \qquad /2.14/$$

$$\dot{q}_{1\mu} = q_{2\mu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1^{\mu}}, \qquad /2.15/$$

$$\dot{q}_{2\mu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2^{\mu}}. \qquad /2.16/$$

С помощью определений /2.8/, /2.9/, соотношений /2.13/-/2.16/ и уравнений Эйлера - Лагранжа /2.6/ находим следующие уравнения

$$\dot{p}_{1\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1'^{\mu}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1''^{\mu}}\right), \qquad /2.17/$$

$$\dot{p}_{2\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2'^{\mu}}\right). \qquad /2.18/$$

Уравнения /2.15/-/2.18/ представляют собой гамильтоновы уравнения движения в фазовом пространстве. Используя определение вариационных производных

$$\frac{\delta H}{\delta q_{1\mu}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{1\mu}} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_{1\mu}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q''_{1\mu}}\right), \qquad /2.19/$$

$$\frac{\delta H}{\delta q_{2\mu}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{2\mu}} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'_{2\mu}}\right), \qquad /2.20/$$

$$\frac{\delta H}{\delta p_{1\mu}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{1\mu}}, \qquad /2.21/$$

$$\frac{\delta H}{\delta p_{1\mu}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{2\mu}}, \qquad /2.22/$$

гамильтоновы уравнения /2.15/-/2.18/ можно переписать

$$\dot{q}_{1\mu} = -\frac{\delta H}{\delta p_1^{\mu}}, \quad \dot{q}_{2\mu} = -\frac{\delta H}{\delta p_2^{\mu}}, \qquad /2.23/$$

$$\dot{p}_{1\mu} = \frac{\delta H}{\delta q_1^{\mu}}, \quad \dot{p}_{2\mu} = \frac{\delta H}{\delta q_2^{\mu}}.$$

Свободные граничные условия в лагранжевом формализме /2.6а/ с помощью /2.13/, /2.14/ записываются как

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1'^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1''^{\mu}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2'^{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1''^{\mu}} = 0, \quad \sigma = \sigma_1, \sigma_2, \quad \mu = 0, 1, \ldots, D-1. \qquad /2.24/$$

Если выполнены граничные условия /2.24/, то вариацию гамильтониана $H = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \mathcal{H}$ можно представить в следующем виде:

$$\delta H = \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{H} d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \{ \frac{\delta H}{\delta q_{1\mu}} \delta q_{1\mu} + \frac{\delta H}{\delta q_{2\mu}} \delta q_{2\mu} + \frac{\delta H}{\delta p_{1\mu}} \delta p_{1\mu} + \frac{\delta H}{\delta p_{2\mu}} \delta p_{2\mu} \} d\sigma .$$

Помимо свободных граничных условий /2.6а/,/2.24/ можно рассматривать периодические граничные условия. В этом случае полевые переменные $x^{\mu}(\tau,\sigma)$ и их производные считаются периодическими функциями по переменной σ с периодом $\sigma_2 - \sigma_1$.

Следует отметить, что плотность гамильтониана /2.11/, рассматриваемая как функция $x_{\mu}, \partial x_{\mu}$ и $\partial^2 x_{\mu}$ согласно /2.8/, /2.9/ с точностью до производной по σ совпадает с плотностью энергии, построенной с помощью канонического тензора энергии-импульса /см. приложение/.

3. СКОБКИ ПУАССОНА

Фазовое пространство в рассматриваемом случае задается координатами $z_a(\sigma) = \{ q_{i\mu}(\sigma),\ p_{i\mu}(\sigma),\ \ i = 1,2,\ \mu = 0,1,\dots D-1,\ \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2 \}$, $a = 1, 2, \dots, 4D$. Как и в случае любой непрерывной системы, индекс σ, $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$ играет роль номера координат вместе с индексом a. На фазовом пространстве будем рассматривать функционалы

$$F[z] = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \mathcal{F}(\sigma), \qquad /3.1/$$

плотность которых $\mathcal{F}(\sigma)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{F}(z(\sigma), z'(\sigma), z''(\sigma)). \qquad /3.2/$$

Скобки Пуассона зададим формулой [16]

$$\{F, G\} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\delta F}{\delta p_{i\mu}(\sigma)} \frac{\delta G}{\delta q_i^{\mu}(\sigma)} - \frac{\delta F}{\delta q_{i\mu}(\sigma)} \frac{\delta G}{\delta p_i^{\mu}(\sigma)} \right) d\sigma. \qquad /3.3/$$

Вариационные производные в /3.3/ определяются обычным образом:

$$\delta F[z] = F[z + \delta z] - F[z] = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\delta F}{\delta z(\sigma)} \delta z(\sigma). \qquad /3.4/$$

Формула /3.3/ является прямым обобщением на непрерывный случай скобок Пуассона из гамильтоновой теории с конечным числом степеней свободы.

Будем считать, что все переменные $z(\sigma)$ удовлетворяют условию периодичности

$$z(\sigma_1) = z(\sigma_2). \qquad /3.5/$$

Этому же условию должны удовлетворять и их вариации

$$\delta z(\sigma_1) = \delta z(\sigma_2). \qquad /3.6/$$

Используя граничные условия /3.5/, /3.6/, легко показать, что формула /3.4/ эквивалентна следующим определениям вариационных производных от "точечных функционалов", т.е. функций

$$\frac{\delta z(\sigma)}{\delta z(\sigma')} = \delta(\sigma - \sigma'), \quad \frac{\delta z'(\sigma)}{\delta z(\sigma')} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \frac{\delta z''(\sigma)}{\delta z(\sigma')} = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \delta(\sigma - \sigma'), \qquad /3.7/$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}(\sigma)}{\delta z(\sigma')} = \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z(\sigma)} \frac{\delta z(\sigma)}{\delta z(\sigma')} + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z'(\sigma)} \frac{\delta z'(\sigma)}{\delta z(\sigma')} + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z''(\sigma)} \frac{\delta z''(\sigma)}{\delta z(\sigma')} = \qquad /3.8/$$

$$= \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z(\sigma)} \delta(\sigma - \sigma') + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z'(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma)}{\partial z''(\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \delta(\sigma - \sigma').$$

В теории струны с жесткостью нам потребуется вычисление скобок Пуассона между связями следующего вида:

$$\phi(\sigma) = \phi(q(\sigma), q'(\sigma), q''(\sigma), p(\sigma)). \qquad /3.9/$$

С помощью формул /3.3/ и /3.8/ получаем

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma')\} = \left[\frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial p(\sigma)} \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial q(\sigma')} - \frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial q(\sigma)} \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial p(\sigma')} \right] \delta(\sigma - \sigma') +$$

$$+ \left[\frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial p(\sigma)} \cdot \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial q'(\sigma')} + \frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial q'(\sigma)} \cdot \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial p(\sigma')} \right] \delta'(\sigma - \sigma') + \qquad /3.10/$$

$$+ \left[\frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial p(\sigma)} \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial q''(\sigma')} - \frac{\partial \phi_1(\sigma)}{\partial q''(\sigma)} \frac{\partial \phi_2(\sigma')}{\partial p(\sigma')} \right] \delta''(\sigma - \sigma').$$

Штрих у δ-функции с аргументом $\sigma - \sigma'$ означает дифференцирование по σ. Здесь мы воспользовались следующими свойствами δ-функции:

$$\delta(\sigma-\sigma') = \delta(\sigma'-\sigma), \quad \frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma'-\sigma) = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma'\partial\sigma'}\delta(\sigma'-\sigma) = \frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma'). \qquad /3.11/$$

С помощью скобок Пуассона гамильтоновы уравнения /2.23/ можно записать так:

$$\dot q_{i\mu}(\sigma) = \{q_{i\mu}(\sigma), H\}, \quad \dot p_{i\mu}(\sigma) = \{p_{i\mu}(\sigma), H\},$$
$$i = 1,2, \ \mu = 0,1,\dots, D-1, \quad \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2 . \qquad /3.12/$$

Из /3.3/ и /3.7/ получаем следующие значения для скобок Пуассона канонических переменных:

$$\{q_{\mu i}(\sigma), p_{\nu j}(\sigma')\} = -\delta_{ij}\, g_{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$\{q_{\mu i}(\sigma), q_{\nu j}(\sigma')\} = \{p_{\mu i}(\sigma), p_{\nu j}(\sigma')\} = 0, \qquad /3.13/$$

$$i,j = 1,2, \quad \mu,\nu = 0,1,\dots, D-1. \qquad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,\dots).$$

4. ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С "ЖЕСТКОСТЬЮ"

Действие в этой модели имеет вид [1]

$$S = \int d^2u\, \mathcal{L}(x_{\mu,i}, x_{\mu,ij}) = -\gamma \int d^2u \sqrt{-g} + a \int d^2u \sqrt{-g}\, \Box x^\mu \Box x_\mu ,$$

где $x^\mu(\tau,\sigma)$, $\mu = 0,1,\dots, D-1$ – координаты струны, /4.1/

$g = \det\|g_{ij}\| < 0$, $g_{ij} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial u^i}\dfrac{\partial x_\mu}{\partial u_j}$ – метрический тензор на мировой поверхности струны, $i,j = 0,1$, $u^0 = \tau$, $u^1 = \sigma$, $\Box$ – оператор Лапласа – Бельтрами для метрики g_{ij}, γ – константа с размерностью квадрата массы, a – безразмерная константа, характеризующая "жесткость" мировой поверхности струны. Первый член в /4.1/ представляет собой действие Намбу – Гото, второй член пропорционален внешней кривизне мировой поверхности струны, которая определяется вторыми производными координат струны [13].

Как и в теории струны Намбу – Гото [17], предполагается, что $g_{00} = \dot x^2 > 0$, $g_{11} = x'^2 < 0$ и $g < 0$. Мы используем следующую метрику в пространстве Минковского: $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,\dots)$.

Уравнения движения, следующие из действия /4.1/, имеют вид

$$(-\gamma + a\Box)\Box x^\mu(\tau,\sigma) = 0, \quad \mu = 0,1,\dots, D-1. \qquad /4.2/$$

где

$$\Box x^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)x^\mu =$$
$$= g^{ij}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ij}\right)\frac{\partial x^\mu}{\partial u^j} = \qquad /4.3/$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{(\dot x x')x'^\mu - x'^2\dot x^\mu}{\sqrt{-g}}\right] + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{(\dot x x')\dot x^\mu - x'^2 x'^\mu}{\sqrt{-g}}\right]\right\}.$$

В отличие от струны Намбу – Гото, уравнения /4.2/ нельзя линеаризовать никаким выбором координат на мировой поверхности струны. Для простоты мы будем рассматривать замкнутую струну, когда ее координаты подчинены условиям периодичности

$$x^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu(\tau,\sigma+\pi), \quad \mu = 0,1,\dots, D-1. \qquad /4.4/$$

Матрица Λ, определенная в /2.12/, в данном случае задается формулой

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{2a x'^2}{(\sqrt{-g})^3}\left[(x'_\mu x'_\nu - x^2\eta_{\mu\nu}) + \frac{\ell_\mu \ell_\nu}{g}\right], \qquad /4.5/$$

где $\ell_\mu = (\dot x x')x'_\mu - x'^2\dot x_\mu$. Так как $\ell_\mu \dot x^\mu = -g$, $\ell_\mu x'^\mu = 0$, то легко убедиться, что матрица Λ имеет два собственных вектора с нулевым собственным значением $\dot x^\mu$ и x'^μ. Ранг этой матрицы равен $D-2$, следовательно, в теории должны быть две первичные связи [14].

Используя определение /2.9/, получаем

$$p_{2\mu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot x^\mu} = \frac{2a}{\sqrt{-g}}x'^2\,\Box x_\mu, \qquad g = (q'_1 q_2)^2 - q'^2_1 q^2_2 . \qquad /4.6/$$

Учитывая два тождества*

$$\Box x_\mu \dot x^\mu = \Box x_\mu x'^\mu = 0 \qquad /4.7/$$

---

*Эти тождества являются следствием второй теоремы Нетер в теории струны Намбу – Гото [17] /см. приложение/.

и /4.6/, находим первичные связи

$$\phi_1(\sigma) = p_2(\sigma)\,\dot{x}(\sigma) = p_2(\sigma)\,q_2(\sigma) = 0, \qquad /4.8/$$

$$\phi_2(\sigma) = p_2(\sigma)\,x'(\sigma) = p_2(\sigma)\,q_1'(\sigma) = 0, \quad \sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2 . \qquad /4.9/$$

Чтобы представить гамильтониан в виде функции канонических переменных, получим полезное соотношение, позволяющее исключить $\ddot{x}_\mu$ из $\mathcal{H}$. Возведение определения /4.6/ в квадрат дает

$$p_2^2 = -\frac{4a^2}{g}x'^4 \Box x^\mu \Box x_\mu =$$

$$= -\frac{4a^2}{g}x'^4 \Box x^\mu \Big[g^{ij}\frac{\partial^2 x_\mu}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ij}\right)\frac{\partial x_\mu}{\partial u^j}\Big]. \qquad /4.10/$$

Применяя опять тождества /4.7/, находим

$$p_2\ddot{x} = \frac{g\sqrt{-g}}{2a x'^4}p_2^2 - \frac{\dot{x}^2}{x'^2}(p_2 x'') + \frac{2(\dot{x}x')}{x'^2}(p_2\dot{x}'). \qquad /4.11/$$

Аналогичным путем приходим к равенству

$$\mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}p_2\ddot{x} = -\frac{\dot{x}^2}{2x'^2}(p_2 x'') + \frac{(\dot{x}x')}{x'^2}(p_2\dot{x}'), \qquad /4.12/$$

где $\mathcal{L}_2$ означает лагранжеву плотность для второго слагаемого в /4.1/. Подставляя /4.11/ в /2.10/ и учитывая /4.12/, получаем окончательное выражение для плотности гамильтониана:

$$\mathcal{H} = -p_1 q_2 + \gamma\sqrt{-g} + \frac{\sqrt{-g}\,(-g)}{4a\,q_1'^4}p^2 +$$

$$+ \frac{q_2^2}{q_1'^4}(p_2 q_1'') - \frac{2(q_2 q_1')}{q_1'^2}(p_2 q_2'). \qquad /4.13/$$

Помимо первичных связей /4.8/, /4.9/ в теории имеют место вторичные связи между каноническими переменными q_1, q_2, p_1, p_2.

Вторичные связи будем искать методом Дирака. Потребуем, чтобы первичные связи сохранялись на траекториях в фазовом пространстве, генерируемых полным гамильтонианом

$$H_T = H + \sum_{a=1}^{2}\int_0^\pi d\sigma\,\lambda_a(\tau,\sigma)\,\phi_a(\sigma). \qquad /4.14/$$

Это приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{d\phi_a(\sigma)}{d\tau} = \{\phi_a(\sigma),\ H_T\} \overset{\phi_b}{\approx} 0, \quad a,b = 1,2. \qquad /4.15/$$

Скобки Пуассона $\{\ldots,\ldots\}$ были определены нами ранее /см. раздел 3/. Знак $\overset{\phi_b}{\approx}$ в формуле /4.15/ означает слабое равенство. Вначале вычисляются скобки Пуассона, а потом учитываются уравнения связей $\phi_b(\sigma) = 0$, $b = 1,2$.

С помощью формулы /3.10/ легко убедиться в том, что первичные связи /4.8/, /4.9/ находятся между собой в инволюции

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_1(\sigma')\} = [\,q_2(\sigma)p_2(\sigma') - p_2(\sigma)q_2(\sigma')]\,\delta(\sigma-\sigma') = 0,$$

$$\{\phi_1(\sigma),\ \phi_2(\sigma')\} = -p_2(\sigma)\,q_1'(\sigma')\,\delta(\sigma-\sigma') \overset{\phi_2}{\approx} 0, \qquad /4.16/$$

$$\{\phi_2(\sigma),\ \phi_2(\sigma')\} = 0.$$

Требование сохранения первичных связей в процессе эволюции приводит к вторичным связям [14]:

$$\frac{d\phi_a(\sigma)}{d\tau} = \{\phi_a(\sigma),\ H_T\} = 0, \quad a = 1,2. \qquad /4.17/$$

Учитывая /4.16/, получаем

$$\frac{d\phi_1(\sigma)}{d\tau} \approx \{\phi_1(\sigma), H\} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_2} ds\,\{\phi_1(\sigma),\ \mathcal{H}(s)\} \approx \mathcal{H}(\sigma) = \phi_3(\sigma) = 0, \qquad /4.18/$$

$$\frac{d\phi_2(\sigma)}{d\tau} \approx \{\phi_2(\sigma), H\} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\,\{\phi_2(\sigma),\ \mathcal{H}(s)\} \approx$$

$$\approx -p_1 q_1' - p_2 q_2' - \phi_1'(\sigma) + \frac{2q_2 q_1'}{q_1'^2}\phi_2'(\sigma) \approx -p_1 q_1' - p_2 q_2' = \qquad /4.19/$$

$$= \phi_4(\sigma) = 0.$$

Производные $\phi_1'(\sigma)$ и $\phi_2'(\sigma)$ в /4.19/ очевидно можно положить равными нулю в слабом смысле. Таким образом, мы получили две вторичных связи $\phi_3(\sigma) = 0$ и $\phi_4(\sigma) = 0$ и не зафиксировали множители Лагранжа в полном гамильтониане. Этого и следовало ожидать, так как первичные связи $\phi_1(\sigma)$ и $\phi_2(\sigma)$ находятся между собой в инволюции. Согласно общей теории сингулярных лагранжианов с высшими производными [14] гамильтоновым связям $\phi_3 = 0$ и $\phi_4 = 0$ нет соответствующих лагранжевых связей. Это означает, что при подстановке в ϕ_3 и ϕ_4 определений /2.8/, /2.9/ мы получим тождественно ноль. Для ϕ_3 это следует из обращения энергии в рассматриваемой теории в ноль в силу второй теоремы Нетер /см.приложение/.

Из общих соображений можно сделать вывод о том, что других гамильтоновых связей в теории струны с жесткостью больше нет. Если бы такие гамильтоновы связи были, то им обязательно должны были бы соответствовать лагранжевы связи, представляющие собой уравнения движения, не содержащие четвертых производных по τ от координат струны. Но таких уравнений в системе /2.5/ нет. Действительно, лагранжевы связи получаются проецированием уравнений Эйлера /2.5/ на нулевые векторы матрицы Λ, определенной в /4.5/. Но в силу второй теоремы Нетер эти проекции тождественно обращаются в ноль /см. формулы /П.7//.

Легко проверить, что связи $\phi_1(\sigma)$ и $\phi_2(\sigma)$ - первого рода

$$\{\phi_1(\sigma), \phi_3(\sigma')\} = \delta(\sigma-\sigma')\,\phi_3(\sigma) \approx 0, \quad \{\phi_1(\sigma), \phi_4(\sigma')\} = \delta(\sigma-\sigma')\,\phi_2'(\sigma) \approx 0,$$

$$\{\phi_2(\sigma), \phi_3(\sigma')\} = \delta(\sigma-\sigma')\,\phi_4(\sigma) \approx 0, \quad \{\phi_2(\sigma), \phi_4(\sigma')\} = 0. \qquad /4.20/$$

Отсюда сразу же следует, что и все связи $\phi_i(\sigma) = 0$, $i = 1, \ldots, 4$ являются связями первого рода. Действительно, если бы это было не так, то это означало бы, что производные

$d\phi_a(\sigma)/d\tau, a = 3, 4$ не обращаются в слабом смысле в ноль. Но это противоречит отсутствию лагранжевых связей в данной теории. Приведенные рассуждения позволяют избежать громоздких вычислений при определении скобок Пуассона $\{\phi_a(\sigma), \phi_b(\sigma')\}$, $a, b = 3, 4$ [8].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для канонического квантования данной теории необходимо подобрать 4 калибровочных условия. В качестве двух из них можно взять условия ортонормальной калибровки

$$\chi_1(\sigma) = q_2^2 + q_1'^2 = \dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \chi_2(\sigma) = q_2 q_1' = \dot{x}x' = 0.$$

В теории сингулярных лагранжианов второго порядка эти условия являются очевидно гамильтоновыми. К сожалению, чисто геометрические соображения не подсказывают, как наиболее удобно следует выбрать еще два калибровочных условия.

Число физических степеней свободы на каждую точку σ в теории струны с жесткостью равно $(4D-8)/2 = 2(D-2)$. Это в два раза больше по сравнению с моделью Намбу - Гото [17]. Среди дополнительных степеней свободы есть такие, которые приводят к новым по сравнению с теорией Намбу - Гото духовым состояниям. Представляет несомненный интерес выяснить, как это обстоятельство проявляется в формализме канонического квантования. Вероятно, проявлением этого на классическом уровне является неустойчивость классических статических решений в теории струны с жесткостью, обнаруженная в работе [4].

Авторы выражают благодарность Б.М.Барбашову, В.Н.Первушину за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Динамические системы, описываемые сингулярными лагранжианами, обычно обладают симметриями калибровочного типа. Их уравнения движения и функционал действия инвариантны по отношению к преобразованиям, содержащим произвольные функции времени. В действительности в интересных с физической точки зрения случаях именно эта инвариантность приводит к сингулярности соответствующего лагранжиана. Следствия, вытекающие из инвариантности действия по отношению к преобразованиям, содержащим произвольные функции координат и времени, дает вторая теорема Нетер [18].

Согласно этой теореме левые части уравнений Эйлера - Лагранжа в случае такой инвариантности действия удовлетворяют тождествам, число которых равно числу произвольных функций, входящих в закон преобразования полевых функций и независимых переменных /координат/. В применении к струне с жесткостью это означает, что проекция уравнений /4.2/ на $\dot{x}^\mu$ и x'^μ тождественно равна нулю. Кроме того, из инвариантности действия /4.1/ при преобразованиях τ, σ следует тождественное /без учета уравнений движения /4.2// обращение в ноль канонического тензора энергии импульса Θ_{ij}, $i, j = 0, 1$ в данной модели. Проверка этих утверждений прямым расчетом представляет довольно трудоемкую процедуру. Например, в работе [3] было показано равенство Θ_{ij} нулю только при использовании условия $\dot{x}^\mu x'_\mu = 0$. Значительно проще получить эти результаты в общем случае.

Пусть действие /2.2/ с лагранжианом /2.1/ инвариантно при преобразованиях u^0, u^1 с произвольными функциями f_0 и f_1 для произвольной области интегрирования Ω.

Рассмотрим бесконечно малые изменения координат

$$\tilde{u}_i = u_i + \epsilon_i(u),$$

где $\epsilon_i(u)$ - произвольные функции. Вариация действия, равная нулю, имеет вид

$$\delta S = \int d^2u\,[\delta\mathcal{L} + \partial_i(\mathcal{L}\,\epsilon_i)]. \qquad /П.1/$$

Здесь $\delta\mathcal{L}$ - вариация формы лагранжиана

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{\mu,i}}\partial_i(\delta x_\mu) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{\mu,ij}}\partial_i\partial_j(\delta x_\mu). \qquad /П.2/$$

Полевые функции $x^\mu(u^0,u^1)$ будем считать скалярами при преобразованиях u^0, u^1. Поэтому их вариация определяется формулой

$$\delta x_\mu = -x_{\mu,i}\,\epsilon_i. \qquad /П.3/$$

Теперь формулу /П.1/ можно преобразовать к следующему виду:

$$\delta S = \int_\Omega d^2u\{\partial_i([\mathcal{L}\delta_{ik} + p_{1\mu i}\,x^\mu{}_{,k} + p_{2\mu ij}\,x^\mu{}_{,jk}]\epsilon_k) - L^\mu x_{\mu,j}\epsilon_j\} = 0, \qquad /П.4/$$

где

$$p_{1\mu}{}^{i} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu{}_{,i}} + \partial_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu{}_{,ij}}\right), \qquad /П.5/$$

$$p_{2\mu}{}^{ij} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu{}_{,ij}}, \qquad /П.6/$$

а через L_μ обозначены левые части уравнений Эйлера - Лагранжа /2.5/.

Вначале рассмотрим такие вариации ϵ_j независимых переменных u^i, которые исчезают на границе области интегрирования. Тогда очевидно, что слагаемое в квадратных скобках в формуле /П.4/ не дает вклада в δS, и, как следствие этого, получаем два тождества

$$L_\mu\dot{x}^\mu = L_\mu x'^\mu \equiv 0. \qquad /П.7/$$

Таким образом, проекции левых частей уравнений Эйлера - Лагранжа на $\dot{x}^\mu$ и x'^μ тождественно равны нулю. Этот результат очевидно применим и к действию струны Намбу - Гото /формула

/4.2/ с $a = 0$/. В этом случае из /П.7/ непосредственно следуют тождества /4.7/.

В формуле /П.4/ в круглых скобках стоит тензор энергии-импульса по отношению к сдвигам в пространстве u^0, u^1

$$\Theta_{ik} = -p_{1\mu}{}^{i}x^\mu{}_{,k} - p_{2\mu}{}^{ij}x^\mu{}_{,jk} - \mathcal{L}\delta_{ik} \qquad /П.8/$$

Учтем в /П.4/ тождества /П.7/ и в качестве произвольных функций $\epsilon_j(u)$ возьмем константы. В результате получим

$$\delta S = -\epsilon_k\int_\Omega d^2u\,\partial_i\Theta_{ik} = 0. \qquad /П.9/$$

В силу произвольности области интегрирования из /П.9/ следует

$$\partial_i\Theta_{ik} = 0. \qquad /П.10/$$

Подстановка в /П.4/ формул /П.7/ и /П.10/ дает

$$\delta S = -\int d^2u\,\Theta_{ik}\partial_i\epsilon_k = 0. \qquad /П.11/$$

Так как $\partial_i\epsilon_k(u)$ - произвольные функции, то

$$\Theta_{ik} \equiv 0, \quad i,k = 0,1. \qquad /П.12/$$

Этот результат получен нами в самом общем виде без использования конкретного вида лагранжевой плотности и специальных координат u^0, u^1.

Сравним компоненту Θ_{00} в /П.8/ с плотностью гамильтониана /2.10/. Из определений /2.8/, /2.9/ и /П.5/, /П.6/ следует

$$p_{1\mu}{}^{0} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ddot{x}^\mu}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu}\right) = p_{1\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu}\right),$$

$$p_{2\mu}^{00} = p_{2\mu}, \quad p_{2\mu}^{01} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu}. \qquad /П.13/$$

Подставим /П.13/ в /П.8/

$$\Theta_{00} = \mathcal{H} + \frac{1}{2}\dot{x}^\mu\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu}\right) + \frac{1}{2}\dot{x}'^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu} = \mathcal{H} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\dot{x}^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}'^\mu}\right). \qquad /П.14/$$

Очевидно, что и при построении энергии и в гамильтоновых уравнениях можно использовать как Θ_{00}, так и $\mathcal{H}$.

$$E = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\,\Theta_{00} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma\,\mathcal{H}. \qquad /П.15/$$

Дополнительное слагаемое в /П.14/ не дает вклада в интеграл /П.15/ как при периодических граничных условиях, так и при свободных граничных условиях /2.6а/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyakov A. - Nucl.Phys., 1986, v.B268, No.5, p.406.
2. Curtright T.L. et al. - Phys.Rev.Lett., 1986, No.7, p.799.
3. Curtright T.L., Ghandour G.I., Zachos C.K. - Phys.Rev., 1986, v.D34, No.12, p.3811.
4. Brarten E., Zachos C.K. Preprint ANL-HEP-PR-86-114, Argonne: ANL, 1986.
5. Braaten E., Pisarski R.D., Sze-Man Tse. - Phys.Rev.Lett., 1987, v.58, No.2, p.93.
6. Alonso F., Espriu D. - Nucl.Phys., 1987, v.B283, No.3-4, p.393; Preprint HUTP-86/A086, Cambridge: Harvard University, 1986.
7. David F.H. - Europhys.Lett., 1986, v.2(b), p.577.
8. Helfrich W. - J.de Phys., 1985, v.46, No.7, p.1263.
9. Kleinert H. - Phys.Lett., 1986, v.174B, p.335.
10. Kavalov A.R., Sedrakyan A.G. Preprint EFI-815 (42)-85, Erevan, 1985.
11. Hawking S.W. Preprint DAMTP. Cambridge: Cambridge University, 1985.
12. Остроградский М.В. - В сб.: Вариационные принципы механики /под ред. Л.С.Полака/. М.: Физматгиз, 1959, с.315-387.
13. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
14. Nesterenko V.V. JINR Preprint E2-87-9, Dubna, 1987.
15. Гильберт Д. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с.133-145.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. 2-е издание. М.: Наука, 1986.
17. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
18. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. - Fortschritte der Physik, 1983. v. 31, No.10, p.535.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 мая 1987 года.

Нестеренко В.В., Нгуен Суан Хан P2-87-363
Гамильтонов формализм в модели релятивистской струны с жесткостью

Исследуется модель бозонной струны, функционал действия которой содержит помимо действия Намбу - Гото дополнительный член, пропорциональный внешней кривизне мировой поверхности струны. Внешняя кривизна поверхности определяется вторыми производными координат струны. Модифицированный таким путем лагранжиан струны является сингулярным лагранжианом второго порядка. Введены канонические переменные, найдены связи и построено гамильтоново описание классической динамики в этой модели. Кратко обсуждается переход к квантовой теории.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Nesterenko V.V., Nguyen Suan Han P2-87-363
The Hamiltonian Formalism in the Model of the Relativistic String with Rigidity

The model of the bosonic string with the Nambu - Goto action extended by the term, proportional to the external curvature of the world sheet is explored. The external curvature of the world-sheet is determined by the second order derivatives of the string coordinates. Thus the modified Lagrangian is a singular Lagrangian of second order. The canonical variables for this theory are introduced, constraints are found and Hamiltonian formulation of the classical dynamics in this theory is constructed. The transition to the quantum theory is briefly discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987