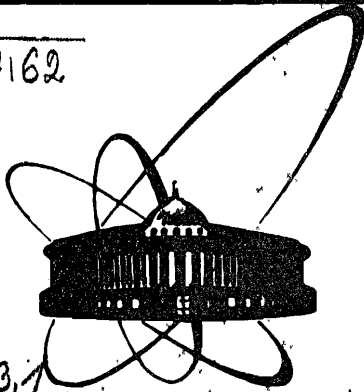


A 162



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-87-347

Л.Александров, М.Дренска, Д.Караджов,  
И.Морозов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАРКОНИЯ  
С ПОЛНЫМ УЧЕТОМ СПИНОВОЙ ЗАВИСИМОСТИ  
В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ И.Т.ТОДОРОВА

1987

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе<sup>/1/</sup> дана постановка прямой задачи для вычисления связанных  $q\bar{q}$ -состояний в квазипотенциальном подходе И.Т.Тодорова<sup>/2,3/</sup> с учетом спиновых взаимодействий без применения теории возмущений. Решением прямой задачи показано, что ранее найденные из бесспиновой обратной задачи<sup>/4,5/</sup> параметры  $q\bar{q}$ -потенциалов дают хорошее начальное соответствие между модельными и экспериментальными значениями масс в  $c\bar{c}$ - и  $b\bar{b}$ -системах. Решения обратной задачи с учетом полной спиновой зависимости для этих систем представлены в настоящей работе в случаях "конвенционального" потенциала<sup>/6/</sup> и потенциала Ричардсона<sup>/7/</sup>. В п.2 приведены формулировка и комментарий особенности прямой задачи кваркония. В п.3 даны основные характеристики метода стержневых сплайнов<sup>/8-10/</sup>, с помощью которого решаются численно уравнения прямой задачи. Постановка обратной задачи для определения параметров производящих потенциалов и масс кварков на основе спектроскопических данных о  $q\bar{q}$ -системах приведена в п.4. Результаты решения совокупности обратных задач в бесспиновом и спиновом случаях и для различных производящих потенциалов представлены в п.5. Обсуждение результатов и сделанные на их основе выводы даны в том же параграфе.

## 2. О ПОСТАНОВКЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Совокупность моделей, используемых для описания спектра  $q\bar{q}$ -систем, включает три варианта прямых задач, основывающихся на различных волновых уравнениях: на нерелятивистском /бесспиновом/ уравнении Шредингера  $/\nu = 1/$ ; на квазипотенциальном релятивистском уравнении<sup>/2,3/</sup> без учета спиновых взаимодействий  $/\nu = 2/$ ; на полном квазипотенциальном уравнении<sup>/2,3/</sup> с прямым учетом всех спиновых структур взаимодействия  $/\nu = 3/$ . Полное взаимодействие строится на основе производящих потенциалов векторного (V) и скалярного (S) типов. В нашем рассмотрении исследованы два таких потенциала - "конвенциональный" потенциал<sup>/6/</sup> /СМ;  $i = 1/$

$$V_1(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \eta_1 \kappa r, \quad (\alpha_s, \kappa) = \text{const} > 0, \quad S_1(r) = (1 - \eta_1) \kappa r$$

и потенциал Ричардсона<sup>/7/</sup> (RM;  $i = 2$ )

$$V_2(r) = \frac{8\pi}{27} \left[ \Lambda^2 r - \frac{1 - 4I_0(\Lambda r)}{r} \right], \quad \Lambda = \text{const} > 0, \quad S_2(r) = \eta_2 r.$$

где значения  $\eta_1 = \frac{1}{2}$  и  $\eta_2 = \frac{8\pi}{27} \Lambda^2$  определены /см.<sup>/8/, п.3.2/</sup>

из условия линейной зависимости запирающего потенциала, а символ  $I_0$  означает

$$I_0(\Lambda r) = \int_1^\infty \frac{e^{-\Lambda \mu r}}{\mu [\pi^2 + \ln^2(\mu^2 - 1)]} d\mu.$$

Постановка прямых задач рассмотрена в деталях в работах<sup>/1,3-5/</sup>. Здесь напомним уравнения и основные характеристики всей совокупности прямых задач, на основе которых решалась обратная задача кваркония.

Уравнение на собственные значения записываем в общепринятом виде

$$\left\{ \Delta + b_\nu^2(w) - V_{NS,\nu i}(r) - V_{LS,\nu i}(r)(\underline{L} \cdot \underline{S}) - V_{SS,\nu i}(r)(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{\sigma}_2) - V_{T,\nu i}(r) \frac{(\underline{\sigma}_1 \cdot \underline{r})(\underline{\sigma}_2 \cdot \underline{r})}{r^2} \right\} \Phi(\underline{r}; w) = 0, \quad /2.1/$$

$\nu = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2,$

где бесспиновая часть ( $V_{NS,\nu i}$ ), спин-орбитальное ( $V_{LS,\nu i}$ ), спин-спиновое ( $V_{SS,\nu i}$ ) и тензорное ( $V_{T,\nu i}$ ) взаимодействия приведены в отдельных частных случаях.

$\nu = 1$ . В классическом случае  $V_{LS,1i} = V_{SS,1i} = V_{T,1i} = 0$ , а

$$V_{NS,1i}(r) = m V_i(r),$$

где  $m$  - масса кварка,  $b_1^2(w) = mw$ ,  $w$  - энергия двухчастичной системы в с.ц.и. Собственные состояния задачи имеют обычную структуру

$$\Phi(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r \ell}(\underline{r}; w) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad n_r = 0, 1, 2, \dots; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots,$$

нумеруются квантовыми числами орбитального момента  $\ell$  и радиальным числом  $n_r$ , а радиальные функции удовлетворяют уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + b_\nu^2(w) - V_{NS,\nu i}(r) \right\} \chi_{n_r \ell}(r; w) = 0, \quad /2.2/$$

$\nu = 1; \quad i = 1, 2,$

и условию нормировки  $\int_0^\infty \chi_{n_r \ell}^2(r; w) dr = 1.$

$\nu = 2$ . Бесспиновый квазипотенциальный случай ( $V_{LS,2i} = V_{SS,2i} = V_{T,2i} = 0$ ) сводится тоже к решению однокомпонентного радиального уравнения /2.2/ для функции  $\chi_{n_r \ell}(r; w)$ . В дан-

ном случае / $\nu = 2$ / величина  $b_2^2(w) = \frac{w^2 - 4m^2}{4}$  имеет смысл

квадрата полного импульса эффективной частицы с релятивистской приведенной массой  $\frac{m^2}{w}$ ,  $w$  - полная энергия частиц в с.ц.и.

Зависящий от энергии квазипотенциал  $V_{NS,2i}$  строится из производящих потенциалов  $V_i$  и  $S_i$ . Квазипотенциал  $V_{NS,2i}$  /равно как и  $V_{NS}$ ,  $V_{LS}$ ,  $V_{SS}$  и  $V_T$  в случае  $\nu = 3$ / регуляризован /см.<sup>/3/, п.3/, что обеспечивает регулярное поведение решений квазипотенциальных уравнений в окрестности нуля. Регуляризирующие потенциалы при этом имеют вид</sup>

$$V_i'(r) = \begin{cases} -C_1 \frac{4\alpha_s}{3r} & \text{при } i = 1, \\ -C_2 \frac{8\pi}{27} \frac{1 - 4I_0(\Lambda r)}{r} & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где  $C_i = \text{const} \geq 1 / i = 1, 2/$ . При предположениях, сделанных в работах<sup>/1,3/</sup>, для бесспиновой компоненты квазипотенциала получается выражение

$$V_{NS,2i} = \begin{cases} -\frac{8E\alpha_s}{3r} + \frac{\kappa w r}{2} + \frac{4\kappa\alpha_s}{3} + \frac{\kappa U_{11}}{2wr} & \text{при } i = 1, \\ \frac{8\pi}{27} \left[ 2E \frac{1 - 4I_0}{r} + \Lambda^2 w r + \frac{16\pi\Lambda^2}{27} (1 - 4I_0) - \frac{4\Lambda^2 m}{w Z_2 r} - \frac{8\pi}{27} \left( \frac{1 - 4I_0}{r} \right)^2 + \frac{\Lambda^2 U_{12}}{wr} \right] & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где

$$U_{11} = \frac{3w-2m}{Z_1}, \quad U_{12} = \frac{3w+2m}{Z_2}, \quad Z_i = w+2m - 2V_i \quad (i = 1, 2),$$

$$E = \frac{w^2 - 2m^2}{2w}.$$

Примечание. В случаях  $\nu = 2$  и  $3$  требуется только, чтобы  $|\frac{1}{r} \chi(r; w)| < \infty \quad \forall (r \in [0, \infty], w \in \mathbb{R}^1)$ .

$\nu = 3$ . Случай полного квазипотенциального уравнения для двух релятивистских частиц со спином  $1/2$ . Бесспиновая часть квазипотенциала совпадает с той же частью из предыдущего случая:  $V_{NS,3i} = V_{NS,2i} \quad /i = 1, 2/$ , а регуляризованные радиальные части операторов спиновых взаимодействий имеют вид <sup>1,3</sup> /:

$$V_{LS,3i} = \begin{cases} \frac{16\alpha_s U_{21}}{3wr^3} + \frac{2\kappa}{Z_1 r} & \text{при } i = 1, \\ \frac{32\pi}{27} [U_{22} \frac{1-4I_0}{wr^3} + \frac{\Lambda^2}{Z_2 r}] & \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$$V_{SS,3i} = \begin{cases} -U_{31} (\frac{2\alpha_s}{3wr^3} - \frac{\kappa}{4wr}) & \text{при } i = 1, \\ -\frac{4\pi}{27w} U_{32} (\frac{1-4I_0}{r^3} - \frac{\Lambda^2}{r}) & \text{при } i = 2; \end{cases}$$

$$V_{T,3i} = \begin{cases} U_{31} (\frac{2\alpha_s}{wr^3} + \frac{\kappa}{4wr}) & \text{при } i = 1, \\ \frac{4\pi}{27w} U_{32} (3\frac{1-4I_0}{r^3} + \frac{\Lambda^2}{r}) & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

где  $U_{2i} = \frac{w+m}{Z_i}, \quad U_{3i} = \frac{w+2m}{Z_i} \quad (i = 1, 2); \quad b_3^2(w) = b_2^2(w).$

Решения уравнения /2.1/ в присутствии тензорного члена  $V_{T,3i}$  характеризуются квантовыми числами полного момента  $J$ , полного спина  $S$ , пространственной четности  $P$  и радиальным числом  $n_r$ . В общем случае они выражаются как суперпозиции базисных функций /см. <sup>11</sup> /, гл.XIII, с.66/  $\Phi_{n_r, LSJ}(\underline{r}; w) =$

$= \frac{1}{r} \chi_{n_r(L)}(r; w) Y_{LSJ}^M(\theta, \phi)$  с определенным квантовым числом полного углового момента  $L$  /чь значения определяются из непереносимости  $|L-S| \leq J \leq L+S$ /. Следуя работе <sup>11</sup> /, приведем набор уравнений, получающийся из уравнения /2.1/, при описании различных /по  $S$  и  $J$ / связанных состояний  $q\bar{q}$ -системы со спином

$\nu = 3, S = 0$ . Тогда  $L = J, P = (-1)^J$  и волновая функция однокомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=0J}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r(J)}(r; w) Y_{J0J}^M(\theta, \phi),$$

а ее радиальная часть удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + 3V_{SS,3i} + V_{T,3i} \right\} \chi_{n_r(J)}(r; w) = 0 \quad /2.3a/$$

( $i = 1, 2$ );

в этот случай входят состояния с сигнатурой  $n_r^1 S_0, n_r^1 P_1$  и т.д. /в стандартных спектроскопических обозначениях  $n_r^{2S+1} L_J$  /.

$\nu = 3, S = 1$ . Здесь  $L = J (J > 0), P = (-1)^J$ , волновая функция тоже однокомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=1J}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} \chi_{n_r(J)}(r; w) Y_{J1J}^M(\theta, \phi)$$

с радиальной частью, удовлетворяющей уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + V_{LS,3i} - V_{SS,3i} - \right.$$

$$\left. - V_{T,3i} \right\} \chi_{n_r(J)}(r; w) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

которое описывает состояния типа  $n_r^3 P_1$ ,  $n_r^3 D_2$ , и т.д.

$\nu = 3, S = 1$ . При  $L = J \pm 1$  ( $J > 0$ ),  $P = (-1)^{J \pm 1}$  собственная функция двухкомпонентная

$$\Phi_{n_r, S=1 J}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} [X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) y_{J-1 1 J}^M(\theta, \phi) + X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) \times \\ \times y_{J+1 1 J}^M(\theta, \phi)],$$

а ее радиальные части являются решениями связанной системы из двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + (J+2)V_{LS,3i} - \right. \\ & \left. - V_{SS,3i} + \frac{V_{T,3i}}{2J+1} \right\} X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_{T,3i} \times \\ & \times X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) = 0, \\ & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} - (J-1)V_{LS,3i} - \right. \\ & \left. - V_{SS,3i} - \frac{V_{T,3i}}{2J+1} \right\} X_{n_r(J-1)}(\underline{r}; w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_{T,3i} \times \\ & \times X_{n_r(J+1)}(\underline{r}; w) = 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \right. \quad /2.3в/$$

Система /2.3в/ отвечает состояниям типа  $n_r^3 S_1$ ,  $n_r^3 D_1$ ,  $n_r^3 P_2$ ,  $n_r^3 F_2$  и т.д.

$\nu = 3, S = 1$ . Если  $J = 0$ , физический смысл имеет только компонента волновой функции с  $L = J + 1$  из предыдущего случая, т.е.

$$\Phi_{n_r, S=1 J=0}(\underline{r}; w) = \frac{1}{r} X_{n_r(1)}(\underline{r}; w) y_{1 1 1}^M(\theta, \phi),$$

чья радиальная часть удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + b_3^2(w) - V_{NS,3i} + 2V_{LS,3i} - V_{SS,3i} + V_{T,3i} \right\} \times$$

$$\times X_{n_r(1)}(\underline{r}; w) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad /2.3г/$$

к которому вырождается в этом случае система /2.3в/ и которое описывает состояния  $n_r^3 P_0$ .

Совокупность уравнений /2.2/, /2.3а-г/ определяет энергии и волновые функции связанной  $q\bar{q}$ -системы в зависимости от заданного вектора параметров

$$X = \begin{cases} X_1(X_{11} = m, X_{12} = a_s, X_{13} = \kappa, X_{14} = C_1)^T & \text{в CM,} \\ X_2(X_{21} = m, X_{22} = \Lambda, X_{32} = C_2)^T & \text{в RM.} \end{cases} \quad /2.4/$$

Прямая задача при значениях параметров  $X_1$ , полученных решением бесспиновой обратной задачи, дает правильное количественное описание энергий и функций  $cc$ - и  $bb$ -систем в спиновой релятивистской модели  $\nu = 3$  /см. /1/, табл.1 и 2/. Отметим только, что спектр уравнения /2.3г/ в работе /1/ оказался значительно смещенным вниз из-за ошибки в компьютерной программе, где был пропущен член  $-\frac{2}{r^2}$ .

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕРЖНЕВЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Дифференциальные уравнения на собственные значения /2.2/, /2.3а-г/ в трех вариантах прямой задачи кваркония решаются численно методом стержневых сплайнов /МСС/ /8-10/. Приближенные радиальные волновые функции  $\tilde{X}_r(\underline{r}; \tilde{w})$  и собственные значения  $\tilde{w}_r$  ищутся на конечном интервале  $[r_a, r_b] \subset [0, \infty]$  в виде /10/

$$\tilde{X}_r(\underline{r}; \tilde{w}) = p_\lambda(\underline{r}; \tilde{w}) \sum_{\lambda^*=1}^M a_{1,\lambda^*}^{(0)} S_{2,\lambda\lambda^*}(r); \quad /3.1/$$

где в случаях  $\nu = 1, 2$  и  $\nu = 3$  /2.3а,б,г/:  $M = 1, \lambda = 1, \tau \equiv (n_r, l)$ , а в случае  $\nu = 3$  /2.3в/:  $M = 2, \lambda = 1, 2; \tau \equiv (n_r, L = J + 1)$ , если  $\lambda = 1, \tau \equiv (n_r, L = J - 1)$ , если  $\lambda = 2$ . Стержневая функция решения /см. /10/, с.2/  $p_\lambda(\underline{r}; w) = X_{r,0}(\underline{r}; w) \times X_{r,\infty}(\underline{r}; w)$  является произведением асимптотических решений уравнения /2.1/ при  $r \rightarrow 0$  ( $X_0$ ) и  $r \rightarrow \infty$  ( $X_\infty$ ). Ее конк-

ретный вид найден в работах <sup>/4/</sup> /с.292/ и <sup>/11/</sup> /с.6-9/. Полиномиальный коллокационный базисный сплайн степени 2  $S_{2,\lambda\lambda^*}(\tau)$  определен в <sup>/10/</sup>, с.7. В случае системы /2.3в/ сплайновые коэффициенты  $\alpha_{1,1}^{(0)}$  и  $\alpha_{1,2}^{(0)}$  дают относительный вес обеих компонент полной функции  $\Phi_{n_r, SJ}$ . При этом в настоящей работе принято, что  $\alpha_{1,2}^{(0)} = 1$ , а  $\alpha_{1,1}^{(0)}$  получается решением системы /2.3в/. Значения этого коэффициента:  $\alpha_{1,1}^{(0)} < 1$  или  $\alpha_{1,1}^{(0)} > 1$ , обуславливают классификацию данного решения системы как  $^{2S+1}(L = J - 1)_J$  или  $^{2S+1}(L = J + 1)_J$  соответственно.

Стабильность и точность приближенных решений зависят от выбора основных параметров МСС -  $\tau_a, \tau_b$  и N /числа подынтервалов в  $[\tau_a, \tau_b]$ /. Путем численных экспериментов установлено, что стабильные решения, гарантирующие не менее пяти верных значащих цифр в собственных значениях  $\bar{w}$ , получают при  $\tau_a = 10^{-5}$  фм /в случае CM;  $i = 1/$  и  $\tau_a = 10^{-4}$  фм /в случае RM;  $i = 2/$  и N = 250. Значения параметра  $\tau_b$  индивидуальные для различных решений, они определялись условием  $\bar{\chi}_r(\tau_b; \bar{w}) \sim h^2/h \approx 0,04$  - шаг сплайновой сетки/.

Вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1061 в режиме с двойной точностью при помощи программы RODSOL, в которой реализован алгоритм <sup>/10/</sup>.

#### 4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КВАРКОНИЯ

Цель обратной задачи - это определение значений основных характеристик X /2.4/q $\bar{q}$ -системы, а также сравнение качеств применяемых моделей / $\nu = 1, 2, 3/$  в их модификациях / $i = 1, 2/$ . Эта цель достигается нахождением среднеквадратических решений <sup>/12/</sup> нелинейной переопределенной системы уравнений, связывающей приближенные /модельные/ значения энергий  $\bar{w}$  с экспериментально известными массами резонансов  $\mathbb{M}$  в чармонии и боттомони.

Формулировка обратной задачи основывается /см. <sup>/4/</sup>, п.3/ на предположении, что в пространстве неизвестных ( $w \in \mathbb{R}^1; X_1 \in \mathbb{R}^4; X_2 \in \mathbb{R}^3$ ) существует неявная функция

$$w = w(X_i), \quad i = 1, 2, \quad /4.1/$$

дифференцируемая по всем компонентам векторов X, которая генерируется методом стержневых сплайнов.

Предположим, что дан вектор измеренных энергий  $q\bar{q}$ -системы

$$\bar{w} = (\bar{w}_{\tau_1}, \bar{w}_{\tau_2}, \dots, \bar{w}_{\tau_\mu})^T \in \mathbb{R}^\mu, \quad \mu - \text{целое} > 1, \quad /4.2/$$

компоненты которого нумеруются набором квантовых чисел  $\tau$

/см. п.3/ и связаны с массами резонансов следующим образом:

$$\bar{w}_\tau = \begin{cases} \mu_\tau - 2m & \text{при } \nu = 1, \\ \mu_\tau & \text{при } \nu = 2, 3. \end{cases}$$

С другой стороны, неявная функция /4.1/ определяет вектор

$$\bar{w}(X) = (\bar{w}_{\tau_1}(X), \bar{w}_{\tau_2}(X), \dots, \bar{w}_{\tau_\mu}(X))^T \in \mathbb{R}^\mu, \quad /4.3/$$

чьи компоненты - это энергии  $\bar{w}(X)$ , вычисленные по МСС.

Решение переопределенной нелинейной системы уравнений

$$f(X) \equiv \bar{w}(X) - \bar{w} = 0 \quad /4.4/$$

относительно неизвестных  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,  $n = 4$  при  $i = 1$  и  $n = 3$  при  $i = 2$ ,  $n < \mu$  в смысле минимизации функционала

$$\chi^2(X) = \|\mathcal{P}(\bar{w}(X) - \bar{w})\|_2^2$$

достигается решением  $(\bar{w}'(X)\mathcal{P})^T$ - усредненной задачи <sup>/12/</sup> размерностью  $(n \times n)$

$$F(X) \equiv (\bar{w}'(X))^T \mathcal{P}^2 f(X) = 0, \quad /4.5/$$

где  $\mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_\mu)$  - матрица взвешивания, а  $\bar{w}'(X)$  - матрица Якоби для вектора  $\bar{w}(X)$ .

Система уравнений /4.5/ относительно неизвестных X представляет /см. <sup>/4/</sup> обратную задачу для связанных состояний кваркония. Численные решения задачи /4.5/ находятся авторегуляризованным итерационным процессом гаусс-ньютоновского типа <sup>/13/</sup>. Статистический характер решаемой задачи учитывается применением двухшаговой процедуры LCH /см. <sup>/4/</sup>, с.297/, которая позволяет определить наследственные ошибки неизвестных и значение статистического критерия  $\bar{\chi}^2 = \chi^2 / (\mu - n + 1)$  в точке решения системы /4.5/.

Вычисления проведены на ЭВМ ЕС-1061 в режиме с двойной точностью. Итерационный процесс осуществлялся программой COMPD <sup>/13/</sup> /библиотека стандартных программ ОИЯИ, программа № С-401/ в варианте <sup>/14/</sup>.

5. РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КВАРКОНИЯ.  
АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Решения обратной задачи - массы кварков и параметры потенциалов  $c\bar{c}$  - и  $b\bar{b}$  - систем - для квазипотенциальной модели с полным учетом спина  $\nu = 3/$  и для бесспиновых моделей  $\nu = 1, 2/$  представлены в табл.1. Расчеты в обоих рассматриваемых вариантах  $i = 1 /CM/$  и  $i = 2 /RM/$  основываются на экспериментальных

Таблица 1

Массы кварков и параметры "конвенционального" потенциала  $i = 1/$  и потенциала Ричардсона  $i = 2/$

Параметры		Уравнение Шредингера ( $\nu = 1$ )		Бесспиновое квазипотенциальное уравнение ( $\nu = 2$ )		Квазипотенциальное уравнение с точным учетом спина ( $\nu = 3$ )	
$i = 1$	$m$ /ГэВ/	$c\bar{c}$	$1,45155 \pm 0,010$	$1,39482 \pm 0,015$	$1,51632 \pm 0,016$		
		$b\bar{b}$	$4,77640 \pm 0,006$	$4,80641 \pm 0,005$	$4,82733 \pm 0,008$		
	$d_s$	$c\bar{c}$	$0,47317 \pm 0,020$	$0,32476 \pm 0,042$	$0,59211 \pm 0,049$		
		$b\bar{b}$	$0,36715 \pm 0,006$	$0,42479 \pm 0,009$	$0,43737 \pm 0,010$		
	$\alpha$ /ГэВ <sup>2</sup> /	$c\bar{c}$	$0,14625 \pm 0,004$	$0,15415 \pm 0,003$	$0,15925 \pm 0,003$		
		$b\bar{b}$	$0,17548 \pm 0,002$	$0,17442 \pm 0,001$	$0,16971 \pm 0,003$		
	$C_1$	$c\bar{c}$	—	(4.)	$6,335 \pm 1,05$		
		$b\bar{b}$	—	(4.)	$7,443 \pm 0,68$		
	$i = 2$	$m$ /ГэВ/	$c\bar{c}$	$1,49754 \pm 0,004$	$1,54328 \pm 0,003$	$1,53120 \pm 0,004$	
			$b\bar{b}$	$4,88704 \pm 0,002$	$4,88075 \pm 0,002$	$4,88755 \pm 0,0008$	
$\Lambda$ /ГэВ/		$c\bar{c}$	$0,39019 \pm 0,003$	$0,27517 \pm 0,002$	$0,28402 \pm 0,0009$		
		$b\bar{b}$	$0,40268 \pm 0,002$	$0,29655 \pm 0,001$	$0,29298 \pm 0,0005$		
$C_2$		$c\bar{c}$	—	(4.)	$5,292 \pm 0,46$		
		$b\bar{b}$	—	(4.)	$9,648 \pm 1,25$		

Таблица 2

Спектр масс чармония, соответствующий различным решениям обратной задачи

$2S_{nL}$ $n_r l$	$M_{\text{эксп.}}$ /ГэВ/	$\tilde{M}/\Gamma_{\text{эВ}}/(\nu=3)$		$n_r l$	$M_{\text{эксп.}}$ /ГэВ/	$\tilde{M}/\Gamma_{\text{эВ}}/(\nu=1)$		$\tilde{M}/\Gamma_{\text{эВ}}/(\nu=2)$	
		$i=1$	$i=2$			$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
$1^1S_0$	2,9810	3,0779	3,0470						
$2^1S_0$	3,5920	3,6135	3,6215						
$3^1S_0$		4,0328	4,0511						
$1^1P_1$		3,5063	3,5128						
$1^3P_1$	3,5100	3,4909	3,4964	$1p^X$	3,5249	3,5205	3,5158	3,4961	3,5264
$2^3P_1$		3,9720	3,9335						
$1^3P_0$	3,4150	3,4145	3,4145						
$2^3P_0$		3,8547	3,8725						
$1^3S_1$	3,0969	3,0835	3,0551	$1S$	3,0969	3,0972	3,0979	3,1214	3,1008
$2^3S_1$	3,6860	3,6177	3,6293	$2S$	3,6860	3,6686	3,6739	3,6389	3,6425
$1^3D_1$	3,7700	3,7714	3,7742	$1d$	3,7700	3,7928	3,7867	3,7760	3,8073
$3^3S_1$	4,0300	4,0414	4,0516	$3S$	4,0300	4,0702	4,0753	4,0522	4,0471
$2^3D_1$	4,1590	4,1631	4,1594	$2d$	4,1590	4,1553	4,1503	4,1603	4,1689
$4^3S_1$	4,4150	4,4114	4,4149	$4S$	4,4150	4,4128	4,4152	4,4140	4,3938
$3^3D_1$		4,5151	4,5023						
$5^3S_1$		4,7497	4,7551						
$1^3P_2$	3,5558	3,5413	3,5492						
$2^3P_2$		3,9690	3,9758						
$\bar{\chi}^2$		0,8120	0,8418			0,9088	0,8349	1,0405	1,1635
$\rho$		$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$			$2 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$

\* Средняя масса мультиплета.

\*\* Максимальная невязка уравнений /4.5/.

данных о связанных состояниях чармония и боттомония из работ /15/ /см. табл.2 и 3/. Размерности решаемых в каждом отдельном случае систем /4.4/ следующие:

$$\nu = 1, 2: \quad \mu = \begin{cases} 7 & \text{для } c\bar{c}, \\ 8 & \text{для } b\bar{b}, \end{cases} \quad n = \begin{cases} 3 & \text{для } i = 1, \\ 2 & \text{для } i = 2. \end{cases}$$

$$\nu = 3: \quad \mu = \begin{cases} 11 & \text{для } \bar{c}\bar{c}, \\ 12 & \text{для } \bar{b}\bar{b}, \end{cases} \quad n = \begin{cases} 4 & \text{для } i = 1, \\ 3 & \text{для } i = 2. \end{cases}$$

Параметр  $C_i$  регуляризирующего потенциала  $V_i'$  не влияет на решения нерелятивистской модели  $\nu = 1$ , а в релятивистском

Таблица 3

Спектр масс боттомония, соответствующий различным решениям обратной задачи

$2S_{nL}$ $n_r L_J$	$M_{\text{эксп.}}$ /ГэВ/	$\tilde{M}/\Gamma\Delta B/(\nu=3)$		$n_r \ell$	$M_{\text{эксп.}}$ /ГэВ/	$\tilde{M}/\Gamma\Delta B/(\nu=1)$		$\tilde{M}/\Gamma\Delta B/(\nu=2)$	
		$i=1$	$i=2$			$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
$1^1S_0$		9,4580	9,4542						
$1^1P_1$		9,9158	9,9078						
$1^3P_1$	9,8945	9,9080	9,9000	$1p^X$	9,9033	9,9130	9,9021	9,9141	9,9042
$2^3P_1$	10,2537	10,2525	10,2537	$2p^X$	10,2603	10,2585	10,2599	10,2604	10,2603
$3^3P_1$		10,5318	10,5348						
$1^3P_0$	9,8729	9,8746	9,8696						
$2^3P_0$	10,2270	10,2270	10,2322						
$1^3S_1$	9,4600	9,4586	9,4598	1 S	9,4600	9,4600	9,4599	9,4605	9,4608
$2^3S_1$	10,0234	9,9933	10,0016	2 S	10,0234	10,0106	10,0216	9,9937	10,0021
$1^3D_1$		10,1516	10,1464						
$3^3S_1$	10,3555	10,3302	10,3404	3 S	10,3555	10,3462	10,3546	10,3331	10,3446
$2^3D_1$		10,4394	10,4383						
$4^3S_1$	10,5730	10,6036	10,6122	4 S	10,5730	10,6185	10,6203	10,6108	10,6210
$3^3D_1$		10,6907	10,6895						
$5^3S_1$	10,8660	10,8529	10,8525	5 S	10,8660	10,8579	10,8477	10,8560	10,8628
$4^3D_1$		10,9189	10,9149						
$6^3S_1$	11,0800	11,0925	11,0768	6 S	11,0800	11,0817	11,0524	11,0804	11,0826
$1^3P_2$	9,9146	9,9303	9,9216						
$2^3P_2$	10,2710	10,2711	10,2694						
$1^3F_2$		10,3491	10,3481						
$\bar{\chi}^2$		0,8757	0,9832			0,7487	0,7724	0,7938	0,5639
$\rho^{XX}$		$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$			$4 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-3}$

\* См. табл. 2.

\*\* См. табл. 2.

бесспиновом случае его влияние мало /см., например, табл. 3 в<sup>1/1/</sup>. Поэтому задача  $\nu = 2$  решалась при фиксированном значении  $C_i = 4 / i = 1, 2/$ , которое обеспечивает регулярность квази-потенциалов  $V_{NS}$  в нуле /см.<sup>1/1/</sup>, с.9/. Определить значение параметра  $C_i$  можно только в модели  $\nu = 3$ .

В табл. 2 и 3 дан спектр масс  $\bar{c}\bar{c}$ - и  $\bar{b}\bar{b}$ -систем, полученный с данными из табл. 1. В этих же таблицах даны как предсказания энергии ряда состояний, не обнаруженных пока экспериментально. В каждом случае приведено и значение величины  $\bar{\chi}^2$ , характеризующее статистическую достоверность решения. В табл. 4 показаны структурные характеристики радиальных функций задачи  $\nu = 3$ : число их нулей и значений коэффициентов  $\alpha_{1,1}^{(0)}$ .

Качественный анализ решений /по числу нулей и по значениям коэффициента  $\alpha_{1,1}^{(0)}$ , определяющего вес компоненты с  $L = J + 1$  в волновой функции системы /2.3в// показывает правильное соответствие между квантовыми числами модельных и экспериментально наблюдаемых состояний кварк-антикварковой системы. Спектр чармония и боттомония описывается количественно хорошо /табл. 2 и 3/.

Из анализа решений всей совокупности обратных задач можно сделать следующие выводы.

1/ Сравнение нерелятивистской и релятивистской задачи в бесспиновом случае на основе модели  $i = 2$  было предметом наших исследований в работах<sup>4,5/</sup>. Здесь, при более полном анализе /включающем модель  $i = 1/$ , подтверждаются сделанные ранее выводы о том, что  $\bar{c}\bar{c}$ -система описывается лучше релятивистским уравнением; сами же релятивистские эффекты меньше затрагивают значения масс кварков, а в гораздо большей степени влияют на параметры взаимодействия. Последнее особо выражено в модели  $i = 2$ , где параметр взаимодействия  $\Lambda$  в релятивистском случае уменьшается примерно на 25% для обеих кварковых систем /табл. 1/.

2/ Анализ результатов, полученных обратной задачей независимо для  $\bar{c}\bar{c}$ - и  $\bar{b}\bar{b}$ -систем, указывает на следующие тенденции в изменении параметров потенциалов /табл. 1/. В модели  $i = 2$  значения параметра  $\Lambda$  примерно одинаковы в чармонии и боттомонии /только в случае  $\nu = 2$  их разница достигает 7%. Это говорит в пользу "ароматной" независимости взаимодействия, которая предполагается а priori многими авторами. В модели  $i = 1$ , где параметр потенциала для малых и больших расстояний отдельные, наблюдается уменьшение /на 26%/ параметра кулоновской части потенциала при переходе от  $\bar{c}\bar{c}$ - к  $\bar{b}\bar{b}$ -системе, что согласуется с явлением асимптотической свободы /табл. 1, случай  $\nu = 3/$ .

3/ В задаче с полным учетом спиновой зависимости модели с конвенциональным потенциалом / $i = 1/$  и с потенциалом Ричардсона / $i = 2/$  дают практически одинаковое количественное описа-



Таблица 4

Структурные данные о решениях спиновой системы / $\nu = 3$ / для CM-потенциала / $i = 1$ / и RM-потенциала / $i = 2$ /

$2S+1$ $n_r$ $L_J$		с $\bar{c}$ - система			b $\bar{b}$ - система		
		$\alpha_{1,1}^{(0)}$	нули функций		$\alpha_{1,1}^{(0)}$	нули функций	
			$\chi_{(j+1)}$	$\chi_{(j-1)}$		$\chi_{(j+1)}$	$\chi_{(j-1)}$
$1^3 S_1$	$i = 1$	-0,0499	0	0	-0,0412	0	0
	$i = 2$	--0,0571	0	0	-0,0299	0	0
$2^3 S_1$	$i = 1$	-0,0454	1	1	-0,0399	1	1
	$i = 2$	-0,0507	1	1	-0,0290	1	1
$1^3 D_1$	$i = 1$	24,74	0	0	25,75	0	1
	$i = 2$	9,989	0	0	16,05	0	0
$3^3 S_1$	$i = 1$	-0,0428	2	2	-0,0391	2	2
	$i = 2$	-0,0471	2	2	-0,0284	2	2
$2^3 D_1$	$i = 1$	25,29	1	2	26,02	1	2
	$i = 2$	11,22	1	2	18,14	1	2
$4^3 S_1$	$i = 1$	-0,0409	3	3	-0,0386	3	3
	$i = 2$	-0,0446	3	3	-0,0280	3	3
$3^3 D_1$	$i = 1$	26,13	2	3	26,33	2	3
	$i = 2$	11,89	2	3	19,61	2	3
$5^3 S_1$	$i = 1$	-0,0395	4	4	-0,0381	4	4
	$i = 2$	-0,0427	4	4	-0,0276	4	4
$4^3 D_1$	$i = 1$	—	—	—	26,58	3	4
	$i = 2$	—	—	—	21,81	3	4
$6^3 S_1$	$i = 1$	—	—	—	-0,0376	5	5
	$i = 2$	—	—	—	-0,0274	5	5
$1^3 P_2$	$i = 1$	-0,0281	0	0	-0,0246	0	0
	$i = 2$	-0,0314	0	0	-0,0179	0	0
$2^3 P_2$	$i = 1$	-0,0264	1	1	-0,0241	1	1
	$i = 2$	-0,0292	1	1	-0,0176	1	1
$1^3 F_2$	$i = 1$	—	—	—	43,36	0	1
	$i = 2$	—	—	—	18,14	0	0

ние спектров с $\bar{c}$ - и b $\bar{b}$ -систем. Для с $\bar{c}$ -системы значения статистического критерия  $\bar{\chi}^2$  одинаковы для обеих моделей /табл.2, случай  $\nu = 3$ /, а в случае b $\bar{b}$ -системы  $\bar{\chi}^2$  для модели  $i = 2$  имеет несколько лучшее значение /табл.3, случай  $\nu = 3$ / . Отметим, однако, что оба потенциала неудовлетворительно описывают сверхтонкое расщепление S-состояний чармония. Этот недостаток, вероятно, связан с отсутствием /по построению/ контактных членов в спин-спиновом взаимодействии ( $V_{SS}$ ), а также с уменьшением вклада запирающего потенциала, вызванным общей процедурой регуляризации потенциалов.

Получаемые в данном подходе волновые функции соответствуют точным состояниям спиновой системы в отличие от функции пертурбативного подхода, где состояния усредненные. Однако, пока вопрос об общем определении скалярного произведения в квази-потенциальном подходе остается нерешенным, собственные функции квазипотенциальной системы нельзя применить на практике.

Авторы выражают благодарность С.Б.Герасимову за конструктивное сотрудничество и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Л., Караджов Д., Морозов П. ОИЯИ P2-86-349, Дубна, 1986.
2. Todorov I.T. - Phys.Rev., 1971, D3, p.2351; Properties of Fundamental Interactions (ed. by A. Zichichi). Ed. Compositori, Bologna, 1973, vol.9c, p.331, Ризов В.А., Тодоров И.Т. - ЭЧАЯ, 1975, 6, с.669.
3. Морозов П.Т. ОИЯИ, P2-85-401, Дубна, 1985.
4. Aleksandrov L. et al. - J.Compt.Phys., 1982, 45, p.291.
5. Aleksandrov L. et al. - J.Phys., 1984, G10, p.1003.
6. Eichten E. et al. - Phys.Rev., 1980, D21, p.203.
7. Richardson L. - Phys.Lett., 1979, B82, p.272.
8. Александров Л., Караджов Д. - ЖВМ и МФ, 1980, 20, с.923.
9. Александров Л., Дренска М., Караджов Д. - ЖВМ и МФ, 1982, 22, с.375.
10. Aleksandrov L., Drenska M., Karadjov D. JINR, E5-86-713, Dubna, 1986.
11. Мессиа А. Квантовая механика. М.: Наука, 1978, т.1; М.: Наука, 1979, т.11.
12. Александров Л. ОИЯИ P5-10366, Дубна, 1977.
13. Александров Л. ОИЯИ P5-7258, Дубна, 1973; Александров Л. ОИЯИ P5-7259, Дубна, 1973.

14. Александров Л., Дренска М., Караджов Д. ОИЯИ Б11-82-162, Дубна, 1982.
15. Particle Data Group. - Rev.Mod.Phys., 1984, vol.56, No.2, part 2; Moxhay P., Rosner J.L. - Phys.Rev., 1983, D28, p.1132; Silverman A. XII Int.Conf. on High En.Phys., Session A11, Leipzig, DDR, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 мая 1987 года.

Александров Л. и др.

P2-87-347

Обратная задача для кваркония с полным учетом спиновой зависимости в релятивистском уравнении И.Т.Тодорова

В квазипотенциальном подходе И.Т.Тодорова с полным учетом спиновой зависимости решена обратная задача для нахождения параметров потенциалов и масс кварков в тяжелых кварковых системах /чармонии и боттомонии/ из полного спектра экспериментально наблюдаемых энергий. В качестве производящих потенциалов использованы конвенциональный потенциал и потенциал Ричардсона. Результаты спиновой обратной задачи сравниваются с результатами ее бесспинового релятивистского варианта и с результатами, полученными на основе уравнения Шредингера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Aleksandrov L. et al.

P2-87-347

Quarkonium Inverse Problem Based on the Relativistic Todorov's Equation

The quarkonium inverse problem based on the quasipotential approach of I.T.Todorov with exact treatment of the spin-dependent interactions is solved. As a result, potential parameters and quark masses in charmonium and bottomium systems are obtained for the complete experimentally observed spectra of these systems. The quasipotentials are constructed from the model generating potentials: the conventional (including Coulomb and linear term) potential and the Richardson potential. Results obtained by the spin inverse problem are compared with the results corresponding to a relativistic spinless equation and to Schrodinger equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987