

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P2-87-216**

**В.А.Бейлин\*, А.В.Радюшкин**

**ФОРМФАКТОРЫ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СОСТОЯНИЙ  
ИЗ ПРАВИЛ СУММ КХД**

---

\* Ростовский государственный университет

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Современная теория сильновзаимодействующих частиц — квантовая хромодинамика (КХД) — представляет собой комплекс достаточно сложных вычислительных методов, идейной основой которого являются принципы квантовой теории поля в соединении с гипотезой конформности<sup>/1/</sup>. Наличие асимптотической свободы<sup>/2,3/</sup> обусловило возможность использования методов теории возмущений, а описание сложной природы вакуума КХД с помощью универсальных феноменологических параметров — вакуумных средних кварковых и глюонных полей — привело к разработке техники правил сумм<sup>/4/</sup>. Эта техника имеет довольно общую природу — она применима, в частности, и к квантовомеханическим системам "с асимптотической свободой"<sup>/5/</sup> (т.е. с потенциалом взаимодействия, обращающимся в нуль на малых расстояниях). Простые квантовомеханические системы, для которых известны точные значения характеристик уровней, могут, таким образом, служить своеобразным "полигоном", на котором можно апробировать новые расчетные приемы в рамках метода правил сумм.

В работе<sup>/5/</sup> исходным объектом исследования является величина

$$M(n, E) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Psi_k(0)|^2}{[1 + E_k/E]^{n+1}}; \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где  $\Psi_k(x)$  — собственная функция,  $E_k$  — собственная энергия  $k$ -го уровня системы,  $E$  — внешний параметр, имеющий размерность энергии. Важно, что сумма (1) выражается через производные от функции Грина под порогом, т.е.

$$M(n, E) = \frac{(-E)^{n+1}}{n!} \left[ \frac{d}{dE} \right]^n G(\bar{x}, E) \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ E \rightarrow -E}}. \quad (2)$$

В пределе  $E \rightarrow \infty$  функция  $G(\bar{x}, E)$  близка к свободной функции Грина, и поэтому  $M(n, E)$  отличается от аналогичной функции  $M_0(n, E)$  для свободного движения на степенные  $O(1/E^k)$  поправки, которые естественно возникают для потенциалов, зависящих от  $r$  степенным образом<sup>/5/</sup>. Это явление названо в<sup>/5/</sup> "асимптотической свободой" по аналогии с КХД, где  $\pi(Q^2)$  для фотона под порогом определяется свободными функциями Грина. Кроме того, в<sup>/5/</sup> было выяснено, что пара-

метры основного состояния системы надежно определяются только из борелевских правил сумм.

В настоящей работе мы хотим проанализировать правила сумм для формфактора низшего состояния системы в модели гармонического осциллятора и обсудить возможность извлечения информации о его "зарядовом радиусе". Такого типа ПС уже использовались при нахождении электромагнитного радиуса пиона<sup>/6/</sup> и К-мезонов<sup>/7/</sup>.

В разделе 2 мы обсудили ПС для "формфактора" осциллятора, в разделе 3 попробуем найти "радиус" основного уровня. В заключении дано резюме полученных результатов.

## 2. "ФОРМФАКТОР" ОСЦИЛЛЯТОРА ИЗ ПРАВИЛ СУММ

Рассмотрим по аналогии с (1) объект вида

$$F(q, E_1, E_2) = \int d^N x e^{iqx} \frac{\Psi_k(x) \Psi_k^*(0) \Psi_\ell(0) \Psi_\ell^*(x)}{(E_k + E_1)(E_\ell + E_2)} = \sum_{k, \ell=0}^{\infty} \frac{\Psi_k^*(0) F_{\ell k}(q) \Psi_\ell(0)}{(E_k + E_1)(E_\ell + E_2)}, \quad (3)$$

где  $\Psi_k(x)$  — нормированные волновые функции  $k$ -го состояния  $N$ -мерного гармонического осциллятора,  $E_1, E_2$  — внешние параметры.

Можно записать (3) также в виде

$$F(q, E_1, E_2) = \int d^N x e^{iqx} G(x, E_1) G^*(x, E_2). \quad (4)$$

Определение (3) приводит к появлению "формфактора"  $F_{\ell k}(q)$ , который при малых  $g^2$  характеризуется среднеквадратичным радиусом волновой функции системы<sup>/8/</sup>. Наша цель состоит в построении ПС, в которых основной вклад дает низший уровень осциллятора и из которых также можно определить "зарядовый радиус" этого уровня. Имея в виду опыт работы<sup>/5/</sup>, перейдем сразу к борелевским образам, используя определение

$$\hat{B}_\epsilon \frac{1}{E_k + E} = e^{-E_k/\epsilon}. \quad (5)$$

Дважды применяя (5), из (3) и (4) получим

$$F_B(q, \epsilon_1, \epsilon_2) = \int G_B(x, \epsilon_1) G_B^*(x, \epsilon_2) e^{iqx} d^N x =$$

$$= \sum_{k, \ell=0}^{\infty} \Psi_k^*(0) F_{\ell k}(q^2) \Psi_\ell(0) e^{-E_k/\epsilon_1} e^{-E_\ell/\epsilon_2}. \quad (6)$$

Полагая в (3) сразу  $E_1 = E_2$ , можно воспользоваться и методом однократного преобразования Бореля<sup>/6/</sup>. Переход между двумя типами получающихся выражений осуществляется с помощью формулы

$$\Phi_B(q, \epsilon) = \int_0^\infty d\nu_1 \int_0^\infty d\nu_2 F_B(q, 1/\nu_1, 1/\nu_2) \delta(\nu_1 + \nu_2 - 1/\epsilon). \quad (7)$$

Используем теперь точный вид  $G_B(x, \epsilon)$ :

$$G_B(x, \epsilon) = \left[ \frac{m\omega}{2\pi \operatorname{sh}(\omega/\epsilon)} \right]^{N/2} \exp \left\{ -\frac{m\omega x^2 \operatorname{ch}(\omega/\epsilon)}{2 \operatorname{sh}(\omega/\epsilon)} \right\}. \quad (8)$$

Подставляя в (6) и раскладывая по  $\omega/\epsilon$ , находим следующие ПС:

$$\left( \frac{m\omega}{\pi} \right)^{N/2} \left\{ F_{00}(q^2) e^{-\frac{N}{2}(\frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2})} + F_{01}(q^2) e^{-\frac{N}{2}(\frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2}) - \frac{2\omega}{\epsilon_1}} + F_{11}(q^2) e^{-\frac{N}{2} + 2)(\frac{\omega}{\epsilon_1} + \frac{\omega}{\epsilon_2})} + \dots \right\} = \left[ \frac{m\omega}{2\pi(1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2)} \right]^{N/2} \times \quad (9)$$

$$\times \left[ 1 - \frac{\omega^2}{6} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)^2 + \frac{\omega^4}{180} \left( \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)^4 + \dots \right]^{N/2} \exp \left\{ -\frac{q^2}{2m(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left( 1 - \frac{\omega^2}{3\epsilon_1\epsilon_2} + \dots \right) \right\}.$$

Здесь при  $N=2$

$$F_{00} = e^{-q^2/4m\omega}, \quad F_{11} = \left( 1 - \frac{q^2}{4m\omega} \right)^2 e^{-q^2/4m\omega}, \quad F_{01} = F_{10} = \frac{q^2}{4m\omega} e^{-q^2/4m\omega}. \quad (10)$$

"Тождества Уорда" проверяются сразу же: полагая в (9)  $N=3, q^2=0, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 2\epsilon$ , приходим к ПС для "2-точки" из<sup>/5/</sup>. При этом, согласно (10),  $F_{00} = F_{11} = 1, F_{01} = F_{10} = 0$ . Отметим, что для "борновского члена" можно записать двойное спектральное представление, найдя спектральную плотность известным методом<sup>/9/</sup>. Тогда для двухточечной функции получаем (для простоты будем рассматривать 2-мерный осциллятор):

$$\frac{m}{2\pi} \left[ 1 - e^{-s_0/\epsilon} - \frac{1}{6} \left( \frac{\omega}{\epsilon} \right)^2 + \dots \right] = \frac{\omega}{\pi\epsilon} \left[ e^{-\omega/\epsilon} + e^{-3\omega/\epsilon} + \dots \right]. \quad (11)$$

Выбирая "точное" значение  $s_0 = 2\omega$  — между 1-м и 2-м резонансами и удерживая только первую степенную поправку, находим с точностью  $\leq 10\%$  хорошее выполнение ПС (11) при  $\epsilon/\omega = 0,8 \div 1,5$ . Здесь мы моделировали вклад высших уровней интегралом

$$\int_{s_0}^{\infty} \rho(s) e^{-s/\epsilon} ds,$$

однако для осциллятора нет континуума состояний, а имеется их бесконечный дискретный набор. Посмотрим теперь, что можно получить для  $F_{00}(q^2)$ .

Запишем спектральное представление:

$$\frac{m\omega}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \exp \left\{ -\frac{q^2}{2m(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right\} = \int ds_1 ds_2 \rho(s_1, s_2) e^{-\frac{s_1}{\epsilon_1} - \frac{s_2}{\epsilon_2}}. \quad (12)$$

Действуя по рецепту<sup>/9/</sup>, находим

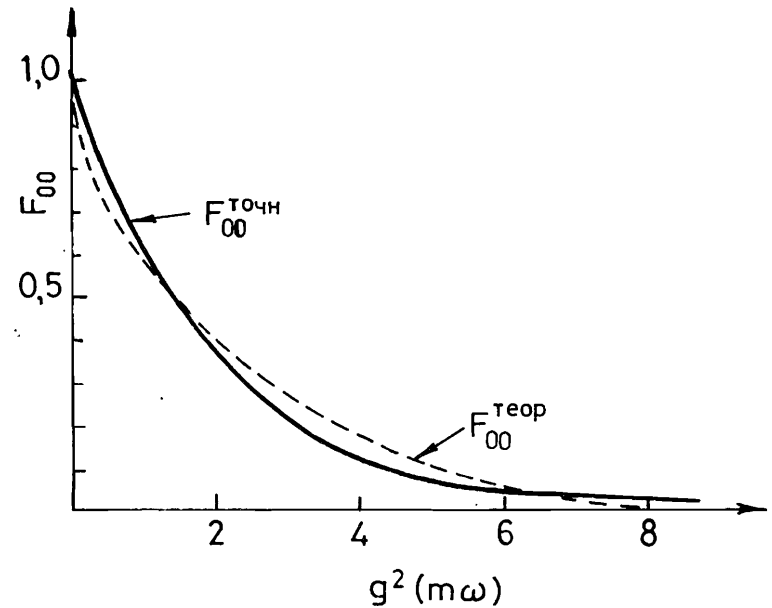
$$\begin{aligned} \rho(s_1, s_2) &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{\theta(4s_1 s_2 - (s_1 + s_2 - q^2)^2)}{[4s_1 s_2 - (s_1 + s_2 - q^2)^2]^{1/2}} = \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \delta(s_1 - \frac{(k+q)^2}{2m}) \delta(s_2 - \frac{k^2}{2m}). \end{aligned} \quad (13)$$

Моделируя вклад низшего состояния интегралом по квадрату  $\theta(s_1 < s_0) \theta(s_2 < s_0)$ , в пределе локальной дуальности получаем при  $s_0 = 2\omega$ :

$$F_{00}^{\text{теор}}(q^2) = \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{q^2}{8m\omega}} - \sqrt{\frac{q^2}{8m\omega} \left( 1 - \frac{q^2}{8m\omega} \right)} \right\}. \quad (14)$$

Сравнение с точным значением (10) приводится на рисунке. Как видно, при  $q^2 \geq 8m\omega$   $F_{00}^{\text{теор}} = 0$ , тогда как точное значение  $F_{00}(q^2)$  отлично от нуля, но весьма мало. Заметим, однако, что ПС (9) можно использовать лишь при  $m\omega \leq q^2 \leq 3m\omega$ , чтобы при  $\epsilon/\omega \approx 1$  степенные вклады были  $\leq 30\%$ .

Можно найти также разложение спектральной плотности при малых  $q^2$ . Тогда вместо (13) получаем



$$\rho(s_1, s_2) = \frac{m}{2\pi} \delta(s_1 - s_2) - \frac{q^2}{4\pi} [s_1 \delta''_{s_1 s_2}(s_1 - s_2) - \delta'_{s_2}(s_1 - s_2)]. \quad (15)$$

Неплохое количественное описание поведения формфактора  $F_{00}(q^2)$  получается при использовании в ПС (9) формулы (13) для  $\rho(s_1, s_2)$ . При этом вновь можно обнаружить, что оптимальным значением параметра  $s_0$  является величина, близкая к  $2\omega$ .

### 3. ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ РАДИУСА ОСНОВНОГО УРОВНЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

При попытке непосредственно вычислить из ПС (9) зарядовый радиус  $\langle r_{00}^2 \rangle$ , где

$$\langle r_{00}^2 \rangle = - \frac{dF_{00}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = 1/4m\omega \text{ (точное значение)}, \quad (16)$$

мы сталкиваемся с определенными трудностями. Во-первых, из соотношения локальной дуальности (14) получается  $\langle r_{00}^2 \rangle_{\text{пок}} = \infty$ . Во-вторых, дифференцируя (9) по  $q^2$ , мы находим правила сумм для  $\langle r_{00}^2 \rangle$ , точность которых  $\sim 40 \div 50\%$ , вследствие роста степенных поправок

и заметно большего вклада высших состояний. Для повышения точности воспользуемся приемом, который применялся для определения радиусов  $\pi$ - и  $K$ -мезонов<sup>8,7/</sup>. Поскольку выполняются "тождества Уорда", т.е., ПС (9)  $\rightarrow$  ПС (22) при  $q^2 \rightarrow 0$ , можно вычесть ПС (11) из ПС (9) без снижения точности; деля затем результат на  $q^2$ , получаем правила сумм для величины  $(F_{00}(q^2) - 1)/q^2$ , совпадающей при  $q^2 = 0$  с  $\langle r_{00}^2 \rangle$ ; вклады высших уровней при этом мы будем моделировать эффективными формфакторами — диагональным  $F'_{11}$  и недиагональными  $F'_{01}$  и  $F'_{10}$ . Таким образом, находим ПС в виде

$$\left(\frac{F_{00} - 1}{q^2}\right)e^{-\omega/\epsilon} + \left(\frac{F'_{01} + F'_{10}}{q^2}\right)e^{-2\omega/\epsilon} + \left(\frac{F'_{11} - 1}{q^2}\right)e^{-3\omega/\epsilon} = (17)$$

$$= -\frac{1}{16m\omega} \left[1 - \frac{q^2}{2m\omega} + \dots\right] \left[1 - \frac{\omega^2}{6\epsilon^2} + \frac{\omega^4}{180\epsilon^4} - \dots\right].$$

Для масс эффективных состояний мы возьмем также значения масс ближайших возбужденных уровней. Это на самом деле слабо влияет на окончательные результаты.

Исключая вклады недиагональных формфакторов из (17) с помощью дифференцирования по  $\epsilon$  (после умножения обеих сторон (17) на  $e^{2\omega/\epsilon}$ ), получаем

$$\frac{F_{00} - 1}{q^2} - \left(\frac{F'_{11} - 1}{q^2}\right)e^{-2\omega/\epsilon} = \frac{e^{\omega/\epsilon}}{16m\omega^2} \left\{ (t/2m - 2\omega) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{3\epsilon} + \frac{\omega^3}{3\epsilon^2} + t\left(\frac{\omega}{m\epsilon} - \frac{\omega^2}{4m\epsilon^2} - \frac{\omega^3}{6m\epsilon^3}\right) + \dots \right\}. \quad (18)$$

Дифференцируя теперь ПС (18) по  $\epsilon$ , находим правила сумм, обработка которых в области  $\epsilon = (2 \div 4)\omega$  дает

$$\frac{F'_{11} - 1}{q^2} \approx -0,13/m\omega, \quad (19)$$

при  $q^2 = 0,01m\omega$ . Используя далее это значение в ПС (18), находим в области стабильности кривых  $\epsilon = (1 \div 4)\omega$  с точностью 10%:

$$\langle r_{00}^2 \rangle_{\text{теор}} = (0,23 \pm 0,02) \frac{1}{m\omega}. \quad (20)$$

Найденная величина хорошо согласуется с точным значением (16).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов можно сделать несколько выводов. Во-первых, использование локальной дуальности для описания поведения  $F_{00}(q^2)$  вполне пригодно в области промежуточных ( $1 \leq q^2 \leq 3 \div 4m\omega$ ). При этом порог "континуума" практически точно находится между значениями "масс" уровней. (Однако все же для обоснования такого выбора  $s_0$  необходимо рассмотрение ПС с учетом степенных поправок). Локальная дуальность, однако, не позволяет определить величину среднеквадратичного радиуса основного уровня системы.

Во-вторых, для извлечения значения радиуса основного состояния из ПС (9) требуется некоторая модификация стандартной процедуры обработки ПС (см. раздел 3). Причина этого заключается в том, что, как видно из (5), в спектральную плотность вносят большой вклад высшие уровни, не лежащие на диагонали  $s_1 = s_2$ . Количественно этот эффект можно оценить, сравнивая эффективное значение (19) с соответствующей величиной для точного  $F'_{11}$ :

$$\frac{F'_{11} - 1}{q^2} \Big|_{q^2 \approx 0} = -0,75/m\omega.$$

Введение эффективного формфактора позволяет с точностью 10% зафиксировать величину радиуса  $\langle r_{00}^2 \rangle$  в простой модели двумерного гармонического осциллятора. Отметим, что число измерений осциллятора  $N$  не принципиально — аналогичные выводы следуют и из анализа ПС для 3,4-мерного осциллятора, однако выкладки при этом значительно более громоздки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fritsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — *Phys. Lett.*, 1973, 44B, p.365.
2. Gross B.J., Wilczek F. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v.30, No.26, p.1343.
3. Politzer H.D. — *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v.30, No.26, p.1346.
4. Shifman M.A., Vainshtein A.I. — *Nucl. Phys.*, 1979, 147B, p.385.
5. Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. — *ЯФ*, 1980, т.32, в.6(12), с.1622.
6. Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. — *Письма в ЖЭТФ*, 1984, т.39, с.576.
7. Бейлин В.А., Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. *Препринт ОИЯИ Р2-87-134*, Дубна, 1987.
8. Липкин Г. *Квантовая механика*. М.: Мир, 1972.
9. Veilin V.A., Radyushkin A.V. — *Nucl. Phys.*, 1985, 260B, p.61.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 апреля 1987 года

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Бейлин В.А., Радюшкин А.В.  
Формфакторы осцилляторных состояний  
из правил сумм КХД

P2-87-216

Метод правил сумм КХД используется для определения формфактора и среднеквадратичного радиуса основного состояния двумерного квантовомеханического осциллятора. Полученные результаты для этих параметров находятся в хорошем (~ 10%) согласии с их точными значениями. Развитый в работе подход применим для расчета зарядовых радиусов мезонов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод авторов

Beilin V.A., Radyushkin A.V.  
Form Factors of Oscillator States  
from QCD Sum Rules

P2-87-216

The QCD sum rule method is used to determine the form factor and the mean square radius of the ground state of the quantum mechanical oscillator. The results obtained for these parameters are in good (~ 10%) agreement with their exact values. The approach developed in this paper can be applied to calculate the charge radii of mesons.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987